ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ІННОВАЦІЙНІ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

УДК 519.674:373.3/.5.091.33-027.22
DOI: 10.31652/2412-1142-2026-80-91-103

Кравчук Ольга Мусіївна
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математичного аналізу та статистики,
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
м. Луцьк, Україна
ORCID ID: 0000-0003-3828-7783
olikr57@ukr.net

Никитюк Анна Леонідівна
здобувач вищої освіти факультету інформаційних технологій і математики,
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
м. Луцьк, Україна
ORCID ID: 0009-0004-7158-2068
anna.nykytiukk@gmail.com

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ НАВИЧОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Анотація. Динаміка результатів НМТ за останні роки вказує на зниження рівня математичної підготовки вступників. Результати НМТ з математики 2025 року показали найвищу кількість 200-бальників (1163 учасники), водночас цей предмет мав найнижчий середній бал (132,3) та найвищий відсоток тих, хто не склав іспит (майже 12%). Згідно з аналізом симуляцій і реальних тестів, лише близько 22% абітурієнтів дають правильну відповідь на останнє завдання тесту, яке зазвичай містить параметр (Математика. Результати НМТ, 2025). Чимало випускників зізнаються, що не планують розв'язувати завдання з параметрами під час НМТ через їхню високу складність. Зрозуміло, у чому полягає складність: виконання таких завдань потребує застосування комплексних знань з різних розділів математики, логічного мислення, творчого підходу, вміння аналізувати, досліджувати, робити висновки. Посилаючись на власний досвід спілкування з учнями ЗЗСО, можемо зауважити, що їх практично не навчають доводити твердження, не кажучи вже про проведення досліджень під час розв'язування задач та обґрунтування розв'язків. Саме таких вмінь і навичок не вистачає учасникам НМТ для розв'язання завдань з параметрами. Тому в даному дослідженні ми поставили за мету на прикладах продемонструвати ефективність графічного методу для розв'язання задач із параметрами, що передбачає точну побудову графіків та дослідження можливих випадків розв'язків залежно від параметра. Визначено надважливу роль правильної побудови графіків, знання властивостей функцій та їх застосування в дослідженні розв'язків. Розглянуто дев'ять прикладів різних типів та рівнів складності. До задач, ефективно використовуючи можливості редактора Microsoft Word, змодельовано в належному стилі кольорові рисунки. Подано методичні коментарі про роль і місце графіків, ефективність їхнього використання для розв'язання завдань з параметрами. Зауважено, зокрема, на можливому застосуванні сучасних комп'ютерів, ІКТ та інших новітніх технологічних засобів навчання в роботі як з учнями школи, так і студентами університету.

Ключові слова: графічний метод, завдання з параметром, результати НМТ, навички логічного мислення.

ВСТУП

Постановка проблеми. Задачі з параметрами належать до найскладніших у шкільному курсі математики. У навчальних програмах з математики для закладів загальної середньої

© О. М. Кравчук, А. Л. Никитюк, 2026

освіти різних рівнів навчання відсутня тема щодо розв'язування параметричних рівнянь, нерівностей, їх систем. Розв'язування завдань з параметрами завжди викликало певні труднощі. В учнів переважно виникає страх, коли трапляються параметричні завдання, тобто коли у завданні є слово «параметр». Вони розуміють, що наявність букви (параметра) змінює все розв'язання, і, що треба розв'язати не одне рівняння, а цілу низку, залежно від можливих значень параметра. Розв'язати задачу з параметрами - це значить встановити, для яких значень параметрів задача має розв'язки і знайти ці розв'язки (як правило, в залежності від параметрів). Тобто розв'язування таких задач має супроводжуватись дослідженням.

Універсальних алгоритмів для розв'язання задач із параметрами не існує. Кожне завдання потребує особливого підходу. Серед основних методів розв'язання параметричних задач визначають такі: аналітичний метод, графічний метод**,** метод інтервалів (для нерівностей), метод використання властивостей функцій, розв'язання систем лінійних рівнянь.

Використання графічного методу мінімізує труднощі при роботі з рівняннями з параметрами та забезпечує повноту аналізу всіх можливих розв'язків. Адже на графіку можемо бачити, при яких значеннях параметра рівняння має розв'язок (і скільки), при яких - не має. Таких знань та вмінь їх застосувати в розв'язанні завдань з параметрами не вистачає випускникам ЗЗСО при виконанні НМТ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема дослідження задач з параметрами та методів їх розв'язування привертала увагу багатьох науковців у галузі прикладної математики та математичної освіти. У працях дослідників розглядаються різні підходи до аналізу параметричних рівнянь, систем рівнянь і нерівностей, а також методи дослідження залежності розв'язків від значень параметрів [2, 4, 6, 8, 11-14].

Задачі з параметрами — це рівняння, нерівності або системи, де значення змінних залежать від одного або кількох параметрів (a,b,c,... тощо), які вважаються сталими для певного розв'язку. Методи розв'язування включають аналітичний (дослідження коефіцієнтів), графічний (перетин ліній) та метод «мажорант». Основна мета — визначити кількість коренів або знайти їх залежно від значення параметра. У посібнику (Кучевський, 2002) розглянуто методи і прийоми розв'язування широкого класу задач: рівнянь, нерівностей та їхніх систем із параметрами.

Розв'язати рівняння виду $f(x,a)=g(x,a)$ з параметром , де x — невідоме, а a — довільне стале число (параметр),— це означає для кожного значення параметра a з'ясувати, чи має рівняння розв'язки; якщо так, то знайти ці розв'язки, які, як правило, залежать від параметра a (Репета та ін., 2002).

Складність такої задачі зумовлена подвійною природою параметра a: з одного боку, він є фіксованою величиною, що дає змогу оперувати ним як числом; з іншого — цей параметр є довільним, тобто невідомим, що вимагає проведення відповідного дослідження для всіх його можливих значень.

Аналітичний метод розв'язання задач із параметром є найважчим способом, що вимагає високої грамотності та найбільших зусиль в оволодінні ним (Аналіз схем..., 2002).

Для розв'язування та дослідження рівнянь, систем рівнянь з параметрами часто зручно використовувати графічний спосіб (Рівняння з параметрами..., 2002)**.**

Одним із ефективних та оригінальних способів розв'язання нестандартних нерівностей і рівнянь, заснованому на властивості обмеженості функції, є метод мажорант. Цим методом можна розв'язувати нестандартні рівняння, рівняння підвищеної складності, наприклад: рівняння, в лівій і правій частинах яких знаходяться функції, що мають різну природу; рівняння або систему рівнянь, в яких кількість змінних перевищує кількість рівнянь; задачі з параметром і модулем (Метод мажорант..., 2002).

Задачі з параметрами — один із найбільш складних розділів елементарної математики. Інтерес до задач з параметрами не випадковий. Теоретичне вивчення фізичних процесів часто приводить до деяких рівнянь або нерівностей, які містять параметри. Необхідною

частиною розв'язання таких задач є дослідження характеру процесу в залежності від значень параметрів (Матеріал для факультативу..., 2002).

Завдання з параметрами відіграють важливу роль у формуванні логічного мислення, математичної культури, дослідницької компетентності школярів. Ці завдання належать до творчого рівня навчальних досягнень учнів, а тому передбачають здатність до узагальнення, абстрагування, творчості, що дає учням можливість активно залучатися до дослідницької діяльності, у процесі якої відбувається формування дослідницьких умінь.

Розв'язування завдань з параметрами є одним із засобів реалізації наступності навчання у ланці «Школа – ЗВО». Задачі з параметрами традиційно входять до завдань з математики на НМТ (ЗНО) і мають за мету перевірку логічного мислення учнів. Оскільки шкільна програма не передбачає набуття стійких навичок розв'язання таких рівнянь учнями, то ці питання
доцільно розглядати на факультативних заняттях (Захоплюючий світ параметрів, 2019).

Питання підготовки майбутніх педагогів до викладання складних алгебраїчних тем детально висвітлено у дослідженні (Ясінський, 2024), де проаналізовано український досвід формування компетентностей із розв'язування задач з параметрами. Особливу увагу вчений звертає на відхід від механічного зазубрювання алгоритмів. У контексті нашого дослідження це зумовлює необхідність детального вивчення саме методичних аспектів графічного методу.

Метою даної роботи є демонстрація на конкретних прикладах ефективності графічного методу розв'язання задач із параметрами, що ґрунтується на точній побудові графіків та дослідженні множини розв'язків залежно від параметра.

2. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв'язування задач з параметрами не вимагається ніяких спеціальних знань, які виходять за рамки шкільної програми. Проте, розв'язування рівнянь з параметрами часто викликає певний страх в учнів, оскільки потребує грунтовних теоретичних математичних знань: властивостей елементарних функцій (область визначення, множина значень, проміжки зростання та спадання), властивостей рівнянь (рівносильність та нерівносильність перетворень), вміння проводити дослідження, розглядаючи усі можливі випадки. Крім того, для застосування графічних методів потрібні вміння виконувати побудову графіків функцій та проводити графічні дослідження, що відповідають різним значенням параметра.

Учням потрібно давати необхідні поради з метою приборкання цього страху і формування навичок розв'язування завдань з параметрами. Найперше, варто запропонувати сприймати параметр як конкретне число (a=3 або a =7). Загальна структура отриманого рівняння допоможе знайти алгоритм розв'язання. Зрозумівши логіку дій для звичайного числа, вони зможуть повернутися до букви (параметра) й опрацювати всі можливі випадки.

Звісно, варто звертати увагу на тип рівняння, якщо розв'язання його є дуже громіздким або ж на це витрачається багато часу , тоді варто використати графічний метод розв'язання. Зазвичай його використовують, якщо: 1) рівняння з модулями ; 2) системи рівнянь; 3) рівняння містять корені або тригонометричні функції ; 4) рівняння має вигляд типу $f(x) = g(a)$або $f(x) = g(x, a)$.

Покажемо актуальність і ефективність даного методу під час розв'язання деяких завдань з параметром із сесій НМТ з математики (Бондар, 2023).

Приклад 1. *Визначте найменше ціле значення а, за якого система* $\begin{cases}(x-8)^2+(y-6)^2=16,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ *має два розв'язки.*

Знаємо, що канонічне рівняння кола має вигляд $(x-x_0)+(y-y_0)=R^2$, де $(x_0;y_0)$ −координати центра даного кола, R − його радіус.

Відповідно в нашому випадку рівняння $(x-8)^2+(y-6)^2=16$ визначає коло з центром у точці P(8;6), радіус якого рівний 4 (R=4), а рівняння $x^2+y^2=a$ − сім'ю кіл з центром у початку координат та радіусом $R=\sqrt{a}$ (рис. 1).

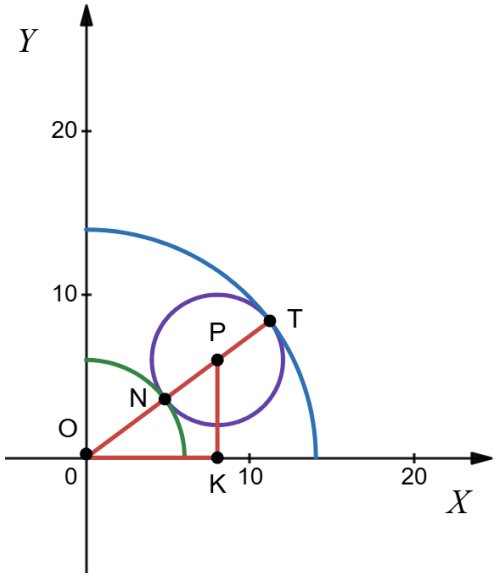


Рис.1. Дві точки дотику

Нам потрібно знайти найменше ціле значення a, за якого дана система має два розв'язки, тобто при яких $a = R^2$ дані два кола перетинаються двічі.

Як бачимо, ця умова виконується тоді, коли коло, задане рівнянням $(x-8)^2+16,(y-6)^2$, перетинає інше коло з радіусом більшим за ON та меншим за OT. В точках N і T кола дотикаються. Розглянемо $\triangle OKP$: $\angle OKP$=90°; OK=8; KP=6, тоді OP=10. NP=4; NO=10-4=6. OT=6+8=14.

Отже, щоб дана система мала два розв'язки, R має набувати значень: 6<R<14.Оскільки нам необхідно визначити найменше ціле значення , то $a = R^2 = 7^2 = 49$.

Приклад 2. *Графіком функції* $y = f(x)$ *є відрізок* AB, $A(2;-1), B$). *Визначте кількість всіх цілих значень параметра a, за яких система рівнянь* $\begin{cases} y = f(x), \\ (x-3)^2+(y-3)^2 = a \end{cases}$ *має розв'язки.*

Дана функція$y = f(x)$задає відрізок, а рівняння $(x-3)^2+(y-3)^2 = a$ –сімейство кіл з центром у точці C(3;3) та радіусом $\sqrt{a}$ (рис. 2).

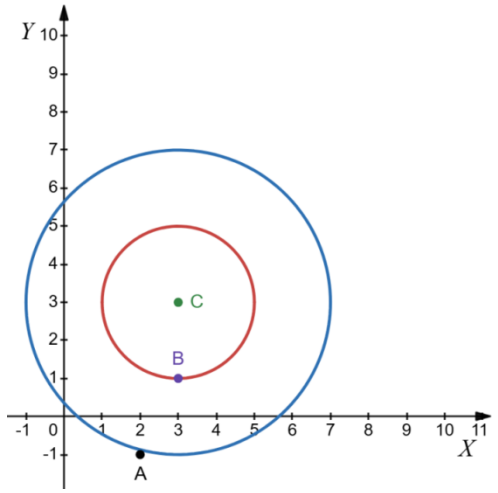


Рис.2. Система має розв'язки для $4 \le a \le 17$

Система має розв'язок у тому випадку, коли графік функції$y = f(x)$(відрізок AB) перетинається із сімейством кіл

$$(x-3)^2+(y-3)^2 = a.$$

ISSN 2412-1142
e-ISSN 2415-8097

Таким чином необхідно, щоб радіус заданого кола $(x-3)^2+(y-3)^2=a$ був більший або рівний за довжину відрізка СВ та менший або рівний за довжину відрізка СА, тобто кінець його належав кільцю, утвореному даними концентричними колами.

Для відшукання довжини деякого відразка NM, де $N(x_n;y_n); M(x_m;y_m)$користуються формулою:$NM=\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2}$.

Тоді: $CB=\sqrt{(3-3)^2+(1-3)^2}=2$, $CA=\sqrt{(2-3)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{17}$.

Тобто ми отримали , що $4\le a\le 17$.

У відповідь потрібно вказати кількість всіх цілих значень параметра a, а це: 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17.

Отже, їх кількість рівна 14.

Приклад 3. *Визначте значення а, за якого система рівнянь*

$$\begin{cases} y+(x-1)^2=5a, \\ x^2-2x+y^2+8y=47 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Очевидно, друге рівняння системи потребує такого запису, який допоможе визначити тип заданої лінії та швидко її побудувати. Скористаємось методом виділення повного квадрата

Виконаємо перетворення: до правої та лівої частини рівняння $x^2-2x+y^2+8y=47$ додамо 1.

Отримаємо $x^2-2x+y^2+8y+1=48$.

Додавши до обох частин 16, будемо мати $(x-1)^2+y^2+8y+16=47+1+16$.

Звідси $(x-1)^2+(y+4)^2=64$.

Це рівняння кола з центром в (1;-4) та радіусом рівним 8 (R=8) (рис.3).

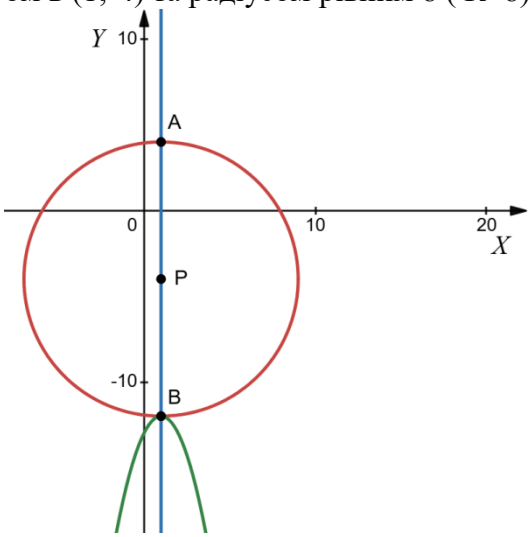


Рис.3. Єдиний розв'язок системи

Тепер розглянемо перше рівняння системи $y+(x-1)^2=5a$, $y=5a-(x-1)^2$.

Очевидно, рівняння задає параболу вітками вниз, а вершина знаходиться на прямій x=1 та рухається по ній залежно від значення у.

Дана система має єдиний розв'язок у випадку, коли парабола $y=5a-(x-1)^2$ своєю вершиною дотикається до кола$(x-1)^2+(y+4)^2=64$. Потрібно знайти точку дотику – спільну точку для параболи і кола. Оскільки вона належить прямій x = 1, то отримаємо два значення y: $y=4$ або $y=-12$, тобто у двох точках А(1; 4), В(1;-12) парабола своєю вершиною дотикається до кола.

За допомогою графіка визначаємо одне значення $y = -12$, яке задовольняє вимогу задачі, і звідси отримуємо відповідне значення параметра a:

$$5a = -12;\ a = \frac{-12}{5} = -2\frac{2}{5} = 2{,}4.$$

Отже, якщо $a = 2{,}4$, то дана система рівнянь має єдиний розв'язок.

Графічний метод дуже ефективний, якщо дотримуватися логіки побудови. Він наочно показує зв'язок між розв'язками та значеннями параметра. Можна знайти «особливі» точки, які визначаються певними умовами заданого рівняння (деякими значеннями параметра, значенням дискримінанта, коефіцієнт при старшому степені перетворюється в нуль, вимоги ОДЗ тощо) .

Розглядаємо декілька рівнянь з параметрами, скориставшись властивостями функцій та їх графіками.

Приклад 4. *Розв'язати рівняння* $a^2 cos4\pi x + a|x| = 1$.

Враховуючи властивості заданих у рівнянні функцій (обидві є парними), робимо висновок про те, що рівняння матиме один розв'язок лише за умови, коли x=0.

Тоді отримуємо рівняння $a^2 cos0 = 1$, звідки $a^2 = 1$, $a = \pm 1$.

Розглянемо ці два випадки.

1) $a = 1$. Отримуємо рівняння $cos4\pi x = 1 - |x|$.

Побудуємо графіки у $= cos4\pi x$ та у = 1- $|x|$ (рис.4а)

Очевидно, це рівняння має більше, ніж один розв'язок.

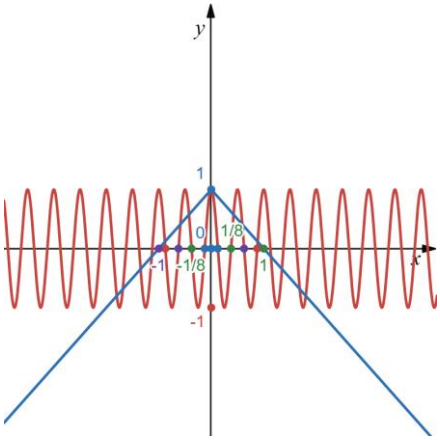


Рис.4а)

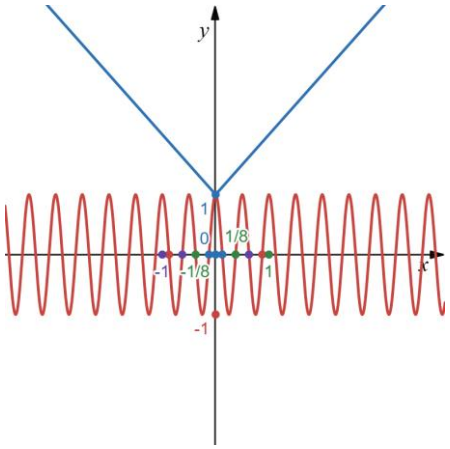


Рис.4б)

2) У другому випадку $a = -1$.

Будемо мати рівняння $cos4\pi x = 1 + |x|$.

Побудувавши графіки функцій у = $cos4\pi x$ та у = 1+ $|x|$, робимо висновки про єдиний розв'язок рівняння (рис.4б)

Цей приклад ілюструє, як легко отримуємо розв'язок рівняння з параметром, скориставшись властивостями функцій та їх графіками.

Приклад 5. *При яких значеннях а рівняння* $sin\frac{\pi}{|x|+a} = 0$ *має:*

а) 5 коренів; б) безліч коренів; в) порожню множину розв'язків ?

Оскільки $sin\frac{\pi}{|x|+a} = 0$, то отримаємо $\frac{\pi}{|x|+a} = \pi k,\ k \epsilon z$. Звідси $\frac{1}{|x|+a} = k,\ k \epsilon z$.

Рівняння має стільки коренів, скільки разів графік функції $f(x) = \frac{1}{|x|+a}$ перетинає нескінченну сукупність прямих $y = k, k \epsilon z$. Побудуємо графіки функцій $f(x) = \frac{1}{|x|+a}$ і $y = k, k \epsilon z$ (рис.5).

ISSN 2412-1142
e-ISSN 2415-8097

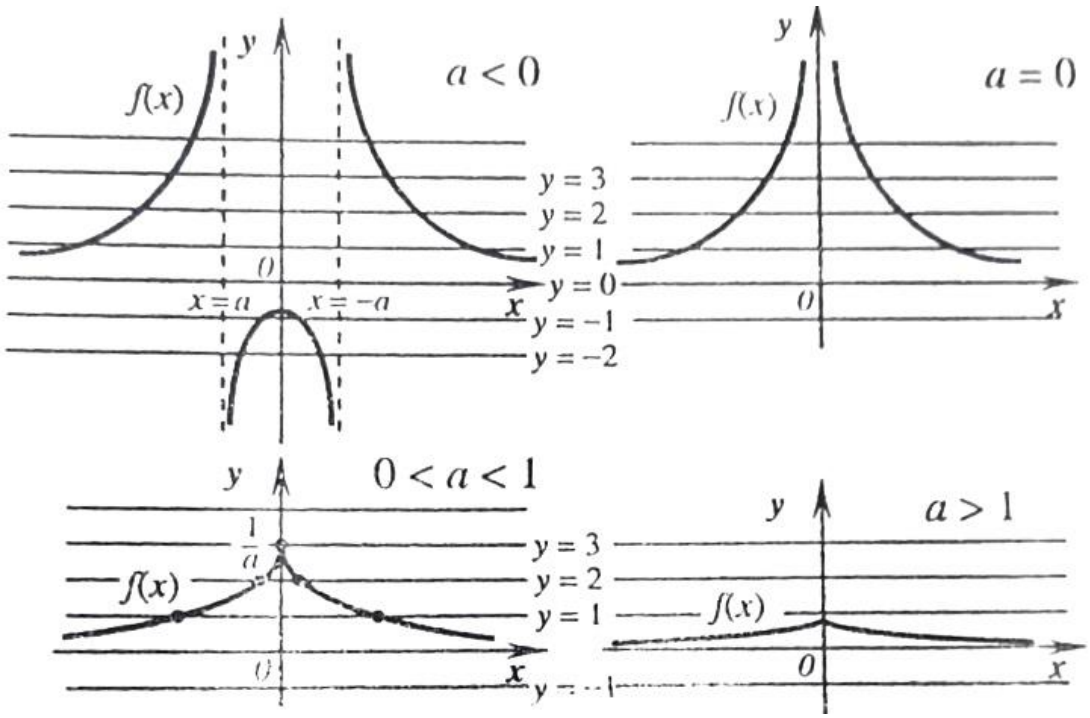


Рис.5. Кількість коренів залежно від значень параметра

З рисунків бачимо, що дане рівняння має 5 коренів, якщо $\frac{1}{a} = 3$, тобто $a = \frac{1}{3}$.

Якщо $a \leq 0$, то – безліч розв'язків; при $a > 1$ рівняння розв'язків не має.

Досить часто під час розв'язання рівнянь з параметром у відповіді не дають повну інформацію про розв'язки рівняння відносно кожного значення параметра $\boldsymbol{a}$ із проміжка $(-\infty; +\infty)$. Причина такого стану речей, очевидно, пояснюється недостатньою кількістю часу, відведеного на розв'язання завдань з параметрами у процесі навчання математики у ЗЗСО.

Приклад 6. *При яких значеннях пар*аметра a *рівняння*

$(x - a)^2 + 2|x| - 4 = 0$

має: а) два корені різних знаків; б) два додатні корені?

Запишемо дане рівняння у вигляді:

$(x - a)^2 = 4 - 2|x|$ і розглянемо, відповідно, функції $f(x) = (x - a)^2$ та $g(x) = 4 - 2|x|$.

Зауважуємо, що функція $g(x) = 4 - 2|x|$ не залежить від параметра, тому можемо побудувати її нерухомий графік (рис.6).

Розміщення графіка функції $\boldsymbol{f(x) = (x - a)^2}$ відносно системи координат буде залежати від значення параметра $\boldsymbol{a}$ (рис.6). Він визначає: у якому напрямі вздовж осі ox (вліво чи вправо) і на скільки одиниць зсувається графік. Досліджуючи різні випадки, аналізуючи взаємне розміщення графіків при цьому, можемо зробити висновки:

а) Два корені різних знаків існують тоді, коли точка A(0;4) лежить всередині параболи $y = \boldsymbol{(x - a)^2}$. Адже тоді будемо мати:

$f(0)) < 4 \Leftrightarrow a^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < a < 2$.

б) Два додатні корені існують, коли парабола дотикається до прямої $y = 4 - 2|x|$, тобто графіки мають одну спільну точку:

$$(x - a)^2 = 4 - 2x.$$

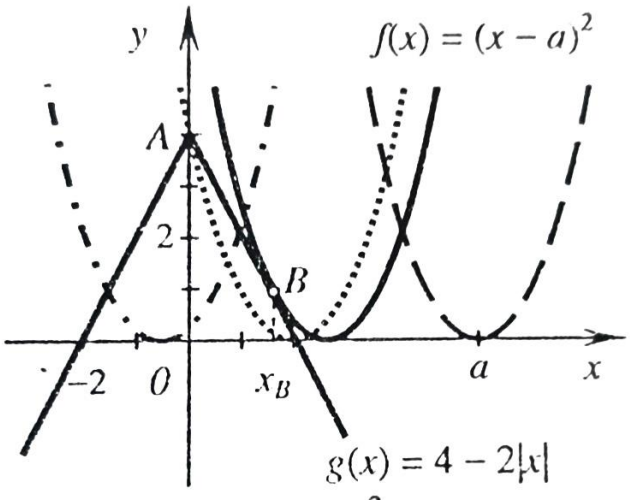


Рис.6. Взаємне розміщення графіків залежно від параметра

Отримаємо квадратне рівняння:

$$x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 4 = 0.$$

Тепер потрібно виявнити умову дотику графіків (рівняння має один розв'язок). Зрозуміло − дискримінант D = 0:

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 + 4 = 0.$$

Звідси $a = 2.5$.

Отже, при $a \in (2; 2.5)$ маємо два додатні корені.

Відповідь потрібно записати так:

а) якщо $a \in (-2; 2)$, то існують два корені різних знаків; б) якщо $a \in (2; 2{,}5)$, то маємо два додатні корені.

Наведений приклад підтверджує доцільність застосування графічного методу при розв'язанні рівнянь, що містять параметр.

Досить часто трапляються завдання з параметром у розв'язанні квадратних рівнянь, або тих, що зводяться до них.

Приклад 7. Визначити при яких значеннях а сума квадратів коренів рівняння $x^2 + 2ax + 2a + 1 = 0$ найменша?

Якщо x_1, x_2 корені цього квадратного рівняння, то для суми квадратів їх запишемо:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$(-2a)^2 - 2(2a+1) = 4a^2 - 4a - 2 = (2a-1)^2 - 3.$$

Отриманий вираз набуває найменшого значення при $a = \frac{1}{2}$.

Обчислимо дискримінант при $a = \frac{1}{2}$: $D = -7 < 0$.

Оскільки за умовою корені даного рівняння існують, то $D \geq 0$, тобто $a^2 - 2a - 1 \geq 0$. Нерівність виконується, коли $a \epsilon (-\infty; 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; \infty)$.

Серед знайдених значень a нам потрібно вибрати таке, при якому значення функції $f(a)$ буде найменшим.

Дати відповідь на це питання нам допоможе графік функції $f(a)$ (рис. 7).

Як бачимо, на проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ функція спадає, на проміжку $(\frac{1}{2}; \infty)$ – зростає. Тому функція $f(a)$ набуває найменшого значення на проміжку $(-\infty; 1-\sqrt{2})$ при $a = 1-\sqrt{2}$, а на проміжку $(1+\sqrt{2}; \infty)$ −при $a = 1+\sqrt{2}$. Порівняти значення функції у цих точках можемо також за графіком, який симетричний відносно осі $a = \frac{1}{2}$. Звідси випливає, що менше значення функції буде при тому a, яке ближче розміщене до $\frac{1}{2}$. Це $a = 1-\sqrt{2}$.

 ISSN 2412-1142
e-ISSN 2415-8097

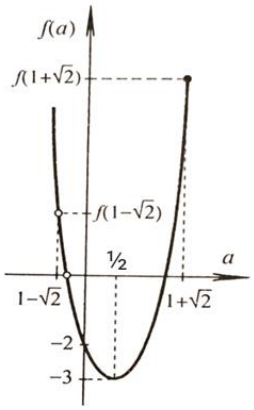


Рис.7. Найменше значення функції

Таке розв'язання є яскравим прикладом ефективності використання графічного методу.

Приклад 8. *При яких значеннях параметра а функція* $y = 3^{x+a} + (11 - a)3^{-x}$ *парна?*

Маємо зауважити, що функція $f(x)$ буде парною, коли одночасно виконуються дві умови:

- Симетричність області визначення: якщо значення x належить області визначення функції, то $-x$ також має їй належати.

- Рівність значень функції: для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

Тому, дана функція буде парною за умови:

$$3^{x+a} + (11 - a)3^{-x} = 3^{-x+a} + (11 - a)3^{x}.$$

Записавши її у вигляді

$$3^{x}(3^{a} - 11 + a) = 3^{-x}(3^{a} - 11 + a),$$

можемо зробити висновок, що отримана рівність виконується для всіх значень x, коли $3^{a} - 11 + a = 0$, тобто $3^{a} = 11 - a$. Потрібно розв'язати отримане рівняння.

Найефективнішим методом при цьому буде графічний.

Побудуємо графіки функцій $y=3^{a}$ та $y= 11 - a$ (рис.8), які допоможуть швидко знайти корені.

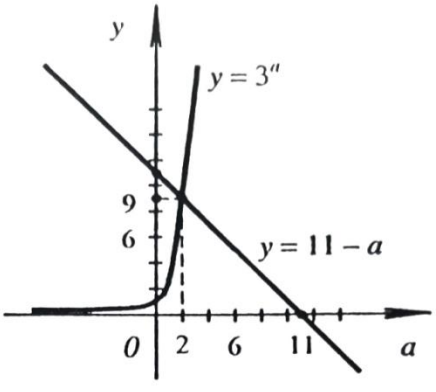


Рис.8. Єдина точка парності функції

Як демонструє рисунок 8, значення $a = 2$ є єдиним коренем рівняння.

Для $a = 2$ дана функція $y = 3^{x+a} + (11 - a)3^{-x}$ набуває вигляду

$$y = 3^{x+2} + (11 - 2)3^{-x}, \text{ або}$$

$$y = 9(3|x + 3^{-x}).$$

Ця функція, зрозуміло, є парною

Задачі з параметрами виникають у прикладній математиці під час моделювання різноманітних процесів: руху транспортних засобів, економічних процесів виробництва та споживання, динаміки біологічних популяцій тощо. У таких моделях параметри відображають характеристики системи, що можуть змінюватися залежно від умов функціонування.

Розглянемо класичну задачу – ***аналіз беззбитковості підприємства***, де графік одразу дає відповідь на питання «за яких умов не будемо збитковими ?».

Приклад 9. *Вплив ціни оренди на прибуток.*

Відкривається крамничка домашньої випічки. Витрати $C(x)$, *що складаються з оренди* (a) *та собівартості кожного пиріжка (наприклад, 15 грн.) виразимо формулою:* $C(x) = 15x + a$, *дохід* $R(x)$ *(продаж пиріжків по 50 грн.) – формулою:* $R(x) = 50x$. *Знайти точку беззбитковості (кількість продажів* x*) залежно від параметра* a.

Параметр a – вартість оренди, яка може змінюватися залежно від обраного приміщення.

Саме функціонально-графічний підхід є дієвим методом розв'язання цієї задачі. Побудуємо графік доходу. Це нерухома пряма y = $50x$, що виходить з нуля. Графіки витрат - це сімейство прямих y =$15x + a$, які утворюють однаковий кут з додатним напрямом осі оx, а точка перетину з віссю оу залежить від параметра a (рис.9).

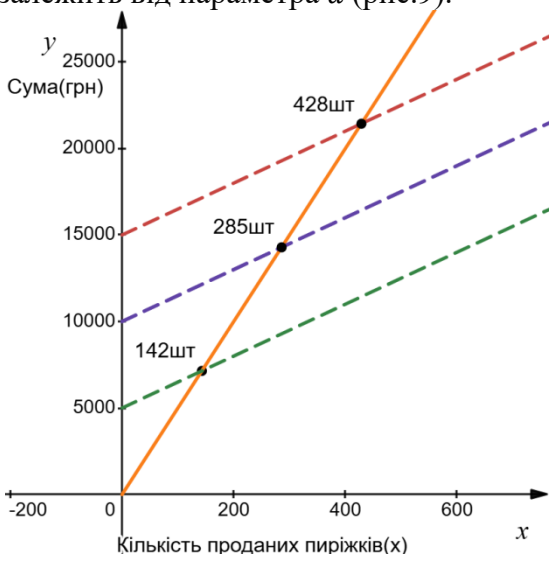


Рис.9. Вплив ціни оренди на прибуток

Знайдемо точку перетину цих графіків, де C(x) = R**(x).**

За графіком легко досліджуємо, як відбувається зміна прямої витрат залежно від параметра a.

Якщо a *збільшується* (дорожчає оренда), пряма витрат піднімається вгору. Точка перетину зміщується вправо. Це означає, що потрібно продати більше пиріжків, щоб вийти в нуль.

Якщо a *зменшується* – пряма опускається. Точка перетину зміщується вліво — бізнес стає менш ризикованим.

Таким чином, розв'язавши рівняння $50x = 15x + a$, отримаємо: $x = \frac{a}{35}$.

— - дохід R(x) = 50x;
- - - витрати C(a =5000);
- - - витрати C(a =10000);
- - - витрати C(a =15000);

Графічно це виглядає як промінь у координатах (a,x) який показує: якщо оренда зростає на 3500 грн., то треба продати рівно на 100 пиріжків більше.

Наведені приклади є підтвердженням дієвості графічного методу під час розв’язування завдань з параметрами.

3. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Дослідження спрямоване на демонстрацію ефективності графічного методу при розв'язуванні задач із параметрами через побудову графічних моделей та аналіз можливих випадків пошуку розв'язків. У статті представлено розв’язання дев’яти задач із параметрами, включно з тестовими завданнями ЗНО.

Встановлено, що задачі з параметрами є складним типом математичних завдань. Їх виконання вимагає від учня здатності до комплексного аналізу, критичного осмислення умов творчого підходу до побудови алгоритму розв’язання та дослідження випадків можливих розв’язків, залежно від параметра.

Підтверджено, що графічні інтерпретації сприяють глибшому розумінню властивостей функцій і залежностей між параметрами моделі. Візуалізація допомагає у сухих цифрах і формулах бачити наочні образи, що дозволяє легше виявляти закономірності, особливості, межі зміни параметрів та їх зв'язок з даними елементами. Функціонально-графічний підхід розв’язання завдань з параметрами наповнює змістом абстрактні моделі та робить їх інтуїтивно зрозумілими.

У сучасних дослідженнях також підкреслюється важливість використання графічних і мультимедійних засобів, які сприяють візуалізації абстрактних понять і підвищують рівень активності учнів.

Усвідомлення ролі математики в освіті, особистісному розвитку людини та житті суспільства визначає надзвичайно актуальним питання пошуку нових підходів до її викладання у ЗЗСО. З огляду на відсутність у шкільному курсі математики окремого розділу з параметрами, доцільно впроваджувати такі завдання у програму факультативних занять. Це сприятиме формуванню дослідницьких навичок старшокласників. Тут особливу увагу варто звертати на задачі прикладного характеру. Проведення факультативів з математики для старшокласників — це чудовий спосіб вийти за межі шкільної програми та підготувати учнів до НМТ/ЗНО або олімпіад.

Варто використовувати математичне моделювання, щоб показати прикладне значення математики: від розрахунку складних відсотків за кредитами до прогнозування вірусних епідемій та оптимізації логістичних маршрутів. Потрібно демонструвати учням ефективність графічного підходу при роботі з завданнями з параметрами будь-якої складності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Аналіз схем розв’язування рівнянь та нерівностей з параметром. (2002). *Фільнюк Марина*. https://file:///C:/Users/User/Downloads/1385-2679-1-PB.pdf

[2] Барановська, Г. С., & Ясінський, В. В. (1997). *Практикум з математики. Тригонометрія* (В. В. Ясінський, Ред.). НТУУ «КПІ».

[3] Бондар, М. О. (Уклад.). (2023). *НМТ 2023. Завдання 07.06.23-20.06.23*. Studinfo. studinfo.org

[4] Вишенський, В. А., Перестюк, М. О., & Самойленко, А. М. (2000). *Збірник задач з математики*. ТВ і МС.

[5] Городецький, Ш. Г. та ін. (1988). *Збірник конкурсних задач з математики* (3-тє вид.). Вища школа.

[6] Захоплюючий світ параметрів. Частина 2. (2019). Кам’янець-Подільський.

[7] Збірник конкурсних і олімпіадних задач з математики. (1995). (О. К. Закусило, Ред.). Діалектика.

[8] Каплан, Я. Л. (1971). *Математика: Посібник для підготовки до конкурсних екзаменів до вузів*. Вища школа.

[9] Кучевський, М. І. (2002). *Деякі методи і прийоми розв'язування задач з параметрами*. Всеосвіта. vseosvita.ua

[10] Математика. Результати НМТ 2025 року. (2025). *Osvita.ua*. https://osvita.ua/test/rez_zno/95643/

[11] Матеріал для факультативу: «Задачі з параметрами». (2002). На Урок. naurok.com.ua

[12] Метод мажорант та його застосування для розв'язування нестандартних рівнянь та нерівностей. (2002). SchoolLife. www.schoollife.org.ua
[13] Практикум з розв'язування задач з математики. (1989). (В. І. Михайловський, Ред.). Вища школа.
[14] Репета, В. К., Кисилиця, Н. О., & Репета, Л. А. (2000). *Задачі з параметрами*. КМУЦА.
[15] Рівняння з параметрами (посібник для підготовки до ЗНО). (2002). Всеосвіта. vseosvita.ua
[16] Ясінський, В. та ін. (2024). *Навчання майбутніх учителів математики розв'язуванню задач з параметрами: український досвід*. Advanced Education, 11(24), 112–128. researchgate.net

Kravchuk Olga Moiseyevna
Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Statistics,
Lesia Ukrainka Volyn National University,
Lutsk, Ukraine.
ORCID ID: 0000-0003-3828-7783
olikr57@ukr.net

Nykytiuk Anna Leonidivna
3nd year student, Faculty of Information Technologies and Mathematics,
Lesya Ukrainka Volyn National University,
Lutsk, Ukraine.
ORCID ID: 0009-0004-7158-2068
anna.nykytiukk@gmail.combstract.

METHODICAL ASPECTS OF FORMING SKILLS IN SOLVING PROBLEMS WITH PARAMETERS USING GRAPHIC METHODS

Abstract. The dynamics of the NMT results in recent years indicates a decrease in the level of mathematical preparation of applicants. The NMT results in mathematics in 2025 showed the highest number of 200-scorers (1163 participants), while this subject had the lowest average score (132.3) and the highest percentage of those who did not pass the exam (almost 12%). According to the analysis of simulations and real tests, only about 22% of applicants give the correct answer to the last task of the test, which usually contains a parameter (Mathematics. NMT Results, 2025). Many graduates admit that they do not plan to solve tasks with parameters during the NMT due to their high complexity. It is clear what the difficulty is: performing such tasks requires the application of comprehensive knowledge from different sections of mathematics, logical thinking, a creative approach, the ability to analyze, research, and draw conclusions. Referring to our own experience of communicating with students of the ZZSO, we can note that they are practically not taught to prove statements, not to mention conducting research when solving problems and justifying solutions. It is precisely these skills and abilities that the participants of the NMT lack to solve problems with parameters. Therefore, in this study, we set the goal of demonstrating the effectiveness of the graphical method for solving problems with parameters using examples, which involves the accurate construction of graphs and the study of possible cases of solutions depending on the parameter. The crucial role of correct construction of graphs, knowledge of the properties of functions and their application in the study of solutions has been determined. Nine examples of different types and levels of complexity are considered. For the tasks, effectively using the capabilities of the Microsoft Word editor, color drawings are modeled in the appropriate style. Methodological comments are given on the role and place of graphs, the effectiveness of their use for solving tasks with parameters. The paper formulates the problem statement, analyzes recent research and publications, and thoroughly presents conclusions and prospects for further exploration. Attention is paid, in particular, to the possible use of modern computers, ICT and other new technological means of teaching in work with both school and university students.

K**eywords**: graphical method, tasks with a parameter, NMT results

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

[1] Analiz skhem rozviazuvannia rivnian ta nerivnostei z parametrom [Analysis of schemes for solving equations and inequalities with a parameter]. (2002). *Filniuk Maryna*. https://file:///C:/Users/User/Downloads/1385-2679-1-PB.pdf
[2] Baranovska, H. S., & Yasinskyi, V. V. (1997). *Praktykum z matematyky. Tryhonometriia* [Mathematics workshop. Trigonometry] (V. V. Yasinskyi, Ed.). NTUU
[3] "KPI".
[4] Bondar, M. O. (Ed.). (2023). *NMT 2023. Zavdannia 07.06.23-20.06.23* [NMT 2023. Tasks 07.06.23-20.06.23]. Studinfo. https://studinfo.org/materials/mathematics/NMT_2023_osnovna_sesiya.pdf

[5] Horodetskyi, Sh. H. et al**.** (1988). *Zbirnyk konkursnykh zadach z matematyky* [Collection of competitive problems in mathematics] (3rd ed.). Vyshcha shkola.
[6] Kaplan, Ya. L. (1971). *Matematyka: posibnyk dlia pidhotovky do konkursnykh ekzameniv do vuziv* [Mathematics: A guide for preparing for competitive exams to universities]. Vyshcha shkola.
[7] Kuchevskyi, M. I. (2002). *Deiaki metody i pryiomy rozviazuvannia zadach z parametramy* [Some methods and techniques for solving problems with parameters]. Vseosvita. vseosvita.ua
[8] Material dlia fakultatyvu: «Zadachi z parametramy» [Material for the elective: "Problems with parameters"]. (2002). Na Urok. naurok.com.ua
[9] Matematyka. Rezultaty NMT 2025 roku [Mathematics. NMT 2025 results]. (2025). *Osvita.ua*. https://osvita.ua/test/rez_zno/95643/
[10] Metod mazhorant ta yoho zastosuvannia dlia rozviazuvannia nestandartnykh rivnian ta nerivnostei [The majorant method and its application for solving non-standard equations and inequalities]. (2002). SchoolLife. www.schoollife.org.ua
[11] Praktykum z rozviazuvannia zadach z matematyky [Workshop on solving problems in mathematics]. (1989). (V. I. Mykhailovskyi, Ed.). Vyshcha shkola.
[12] Repeta, V. K., Kysylytsia, N. O., & Repeta, L. A. (2000). *Zadachi z parametramy* [Problems with parameters]. KMUTSA.
[13] Rivniannia z parametramy (posibnyk dlia pidhotovky do ZNO**)** [Equations with parameters (a guide for preparing for the EIT)]. (2002). Vseosvita. vseosvita.ua
[14] Viktor, R., Kleshnia, N., Korobova, M., & Repeta, L. (2002). *Zadachi z parametramy: Navchalnyi posibnyk dlia starkhoklasnykiv ta abiturientiv* [Problems with parameters: A textbook for high school students and applicants]. Pidruchnyky i posibnyky.
[15] Zakhopliuiuchyi svit parametriv. Chastyna **2** [The fascinating world of parameters. Part 2]. (2019). Kamianets-Podilskyi. Zbirnyk konkursnykh i olimpiadnykh zadach z matematyky [Collection of competitive and Olympiad problems in mathematics]. (1995). (O. K. Zakusylo, Ed.). Dialektyka.
[16] Yasinskyi, V., et al. (2024). *Teaching Future Mathematics Teachers to solve Problems with Parameters: Ukrainian Experience*. Advanced Education, 11(24), 112–128. researchgate.net

Надійшла до редакції / Received: 20.02.2026 *Схвалено до друку / Accepted: 06.04.2026*

УДК 378.016:[796.011.3:37-056.2/.3]
DOI: 10.31652/2412-1142-2026-80-103-111

Коваль Людмила Михайлівна
аспірантка,
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
м. Вінниця, Україна
ORCID ID: 0000-0002-2662-2209
ludmila.koval83@gmail.com

ПРОБЛЕМИ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ФІЗИЧНОЇ КУЛЬТУРИ ДО ДІЯЛЬНОСТІ В УМОВАХ ІНКЛЮЗИВНОГО ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Анотація. У статті розглядається проблема професійної підготовки майбутніх вчителів фізичної культури до діяльності в умовах інклюзивного освітнього середовища. Проаналізовано освітні програми підготовки бакалаврів та магістрів спеціальності А4.11 Середня освіта (Фізична культура) закладів освіти України, які готують вчителів фізичної культури до професійної діяльності. Звернено особливу увагу на формування інклюзивної професійної компетентності, оскільки в сучасних закладах освіти значно зросла кількість учнів та студентів з особливими освітніми потребами, тому готовність вчителя фізичної культури до роботи в інклюзивному освітньому середовищі є провідним аспектом його педагогічної діяльності. Метою дослідження є комплексний аналіз освітніх програм підготовки бакалаврів і магістрів зі спеціальності А4.11 «Середня освіта (Фізична культура)» в закладах вищої освіти України щодо професійної підготовки майбутніх вчителів фізичної культури до роботи в умовах інклюзивного освітнього середовища. Аналіз освітніх програм показує наявність або відсутність спеціальних складових, у

© Л. М. Коваль, 2026