ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА: НАУКА ТА ОСВІТА

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education

Електронний науковий журнал
Electronic scientific journal

Том 2, № 2
Volume 2, No. 2

Вінниця / Vinnytsia 2025

УДК [001+37.016]: [51+53+004](06)
М 34

e-ISSN 3041-1955
DOI: 10.31652/3041-1955-2025-2(2)

Рішенням Міністерства освіти і науки України журнал включено до Переліку наукових фахових видань (**категорія Б**), в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт з фізико-математичних і педагогічних наук за **спеціальностями Е7, Е5, А4, А5** (Наказ МОН України № 1721 від 10.12.2024 р.).

Рекомендовано до публікації рішенням Вченої ради Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол № 5 від 26 листопада 2025 р.)

Редакційна колегія:

Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. Вінниця: ВДПУ, 2025. Том 2, № 2. С. 176–369.

В журналі публікуються дослідження вітчизняних і закордонних науковців з актуальних проблем математики та математичного моделювання, зокрема, математичного моделювання в інформатиці, фізиці та освіті. Основні тематичні напрями: 1) актуальні проблеми математики; 2) математичне моделювання та обчислювальні методи; 3) моделювання освітніх процесів.

Періодичність видання – двічі на рік (травень, листопад).
Категорія читачів – науковці, викладачі, вчителі, аспіранти і здобувачі вищої освіти.
Засновник і видавець: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського.
Рік заснування: 2024.
Ідентифікатор медіа R40-05379.
DOI: 10.31652/3041-1955.

UDC [001+37.016]: [51+53+004](06)
M 34

e-ISSN 3041-1955
DOI: 10.31652/3041-1955-2025-2(2)

By the resolution of the Ministry of Education and Science of Ukraine the journalis included in the List of scientific professional publications (**category B**), in which the results of dissertations on physical, mathematical and pedagogical sciences can be published (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine № 1721 of December 10, 2024).

Recommended for publication by the decision of the Academic Council of Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University
(prot. No. 5, 26.11.2025)

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education. Vinnytsia: VSPU, 2025. Volume 2, No. 2. P. 176–369.

The journal publishes research by domestic and foreign scientists on current problems of mathematics and mathematical modeling, including mathematical modeling in computer science, physics, and education. Main thematic areas: 1) actual problems of mathematics; 2) mathematical modeling and computational methods; 3) modeling of educational processes.

Publication Frequency: twice a year.
The category of readers is scientists, lecturers, teachers, graduate students and higher education students.
Founder and publisher: Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University.
Year of foundation: 2024.
Media Identifier R40-05379.
DOI: 10.31652/3041-1955.

ЗМІСТ / CONTENTS

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ / ACTUAL PROBLEMS OF MATHEMATICS

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ / MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATIONAL METHODS

МОДЕЛЮВАННЯ ОСВІТНІХ ПРОЦЕСІВ / MODELING OF EDUCATIONAL PROCESSES

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

Actual problems of mathematics

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 176–185.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 176–185.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.95

Інтегро-диференціальні системи стохастичних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності

Олег Бугрій[1], Ігор Куцевол[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
oleh.buhrii@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1698-5559

[2]Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
ihor.kutsevol@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0009-2157-5376

Анотація. В статті розглянуто нелінійну параболічну систему другого порядку зі змінним показником нелінійності, інтегральним доданком та білим шумом. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для цієї системи.

Ключові слова: стохастичне параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, білий шум, узагальнений розв'язок.

1. Вступ

Рівняння з частинними похідними моделюють багато процесів оточуючої дійсності. Наприклад, дослідження процесу дифузії чи поширення тепла відіграють важливу роль в медицині, приладобудуванні, енергетиці тощо. Процеси теплопровідності переважно описуються нелінійними параболічними рівняннями чи системами таких рівнянь. Останнім часом активно розвиваються дослідження рівнянь з нелінійними доданками степеневого характеру, показник степеня яких (показник нелінійності) є функцією просторових та часової змінних, тобто є змінним. Вільний член параболічного рівняння переважно відповідає за внутрішні джерела чи стоки тепла, характерні для даного явища.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-01

Часто такі параметри процесу є непередбачуваними. Стохастичні ефекти теплопровідності можуть виникати через неоднорідність матеріалів, що спричиняє неможливість чітко визначити їх теплові характеристики. З точки зору теорії рівнянь з частинними похідними випадковий характер зміни температури досліджуваного об'єкта чи явища можна спробувати врахувати, ввівши у вільний член рівняння доданок типу білого шуму. Отримані стохастичні рівняння з частинними похідними (СРЧП) слід досліджувати методами класичного функціонального аналізу та теорії випадкових процесів, що ми і робитимемо в цій праці.

Нехай $N, n \in \mathbb{N}$ та $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є обмеженою областю з гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір, зокрема, $\mathbb{S}$ – простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра підмножин множини $\mathbb{S}$ та $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – імовірнісна міра. Введемо також такі позначення:

$$Q_{0,T} := \Omega \times (0,T), \quad \Sigma_{0,T} := \partial\Omega \times (0,T),$$

$$\Pi_{0,T} := \Omega \times (0,T) \times \mathbb{S}, \quad \Theta_{0,T} := (0,T) \times \mathbb{S},$$

У цій статті розглянемо систему СРЧП зі змінним показником нелінійності та інтегральним доданком, збурену випадковим доданком типу білого шуму. Шукатимемо вектор-функцію $u = (u_1, \dots, u_N) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^N$ таку, що

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t) u_{x_i} \Big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q(x,t)-2} u +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,y,t) u(y,t)\, dy = F(x,t,\omega) + b_t(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{1}$$

$$u(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{2}$$

$$u(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{3}$$

Тут A_{ij}, G, $\mathfrak{Z}$ – деякі матриці, $q = q(x,t)$ – змінний показник нелінійності системи, F, b_t та u_0 – деякі вектори, зокрема, b_t – вектор типу білого шуму. Далі покажемо, що мішана задача (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок. Відповідне (1) модельне рівняння без інтегрального доданка розглянуто у попередній праці першого автора [1], де також є стислий перелік літератури по цій тематиці. У [2]-[3], зокрема, деталізовано поняття білого шуму та розглянуто деякі його властивості. Рівняння зі змінними показниками нелінійності та без білого шуму досліджено, наприклад, у [4]-[7].

2. Постановка задачі і основні результати

Перш за все введемо необхідні позначення. Нехай $m, s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, B – банахів простір, $|| \cdot ||_B \equiv || \cdot ; B||$ – його норма, B^* – спряжений до B простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ – скалярний добуток між B^* та B, $B^N := B \times \ldots \times B$ – декартовий степінь B, $||z; B^N|| := ||z_1||_B + \ldots + ||z_N||_B$, $z = col(z_1, \ldots, z_N) \in B^N$, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ – скалярний добуток в деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $|\cdot|_{\mathcal{H}} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}}$.

Користуватися такими стандартними позначеннями функційних просторів: $C(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ – простори гладких функцій, $D(\Omega)$ – простір основних функцій, $L^p(\Omega)$ – стандартний простір Лебега, $W^{m,p}(\Omega)$ та $W_0^{m,p}(\Omega)$ – стандартні простори Соболєва, $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$, $C(\Omega; B)$ та $C^m(\Omega; B)$ – простори B-значних гладких функцій, визначених на Ω, $L^p(\Omega;B)$ – простори Лебега-Бохнера B-значних інтегровних функцій, визначених на Ω. Нехай $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(x)$ – деяка функція, $L^{\mathfrak{p}(x)}(\Omega)$ – узагальнений простір Лебега функцій, інтегровних зі степенем $\mathfrak{p}(x)$ на Ω (див. [3, с. 84-85] для деталізації). Аналогічні позначення використовуватимемо для просторів функцій, які визначено на $(0,T)$ чи $Q_{0,T}$ тощо.

Нехай $L_p(\mathbb{S})$ – випадковий простір Лебега, тобто простір випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом порядку p (див. [2, с.16-17] для деталізації), $L_p(\mathbb{S};B)$ – відповідний простір B-значних випадкових величин, $L_{r(t)}(\Theta_{0,T})$ – узагальнений випадковий простір Лебега, де $r=r(t)$ – деяка функція (див. [3, с. 87]). Аналогічно визначимо простір $L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$ вимірних функцій $u:\Pi_{0,T}\to\mathbb{R}$ таких, що

$$\rho_q(u,\Pi_{0,T}):=\int\limits_{\Pi_{0,T}}|u(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\,dxdt\mathbb{P}(d\omega)<\infty,$$

де $q\in L^\infty(Q_{0,T})$, $q^0:=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,t)\in Q_{0,T}}q(x,t)$, $q_0:=\operatorname*{ess\,inf}\limits_{(x,t)\in Q_{0,T}}q(x,t)$ та $q_0>1$. Розглядатимемо цей простір з нормою Люксембурга

$$||u;L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})||:=\inf\{\lambda>0\ \mid\ \rho_q(u/\lambda;\Pi_{0,T})\le 1\}. \tag{4}$$

Нехай (див. [4] для деталей)

$$\mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T}):=\{q\in L^\infty(Q_{0,T})\ \mid\ q\ \text{– глобально log-неперервна}$$

$$\text{за Гельдером функція},\quad q_0\ge 1\}. \tag{5}$$

Введемо також такі позначення:

$$H:=[L^2(\Omega)]^N,\quad V_s:=[H_0^s(\Omega)]^N, \tag{6}$$

$$V(t):=V_1\cap[L^{q(x,t)}(\Omega)]^N,\quad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$U(Q_{0,T}):=L^2(0,T;V_1)\cap[L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N, \tag{8}$$

$$W(Q_{0,T}):=\{u\in U(Q_{0,T})\ \mid\ u_t\in[U(Q_{0,T})]^*\}, \tag{9}$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A1): A_{ij} – квадратні матриці N-го порядку з елементами з $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij}=A_{ji}$ $(i,j=\overline{1,n})$; майже для всіх (м.д.в.) $(x,t)\in Q_{0,T}$ та для всіх (д.в.) $\xi^1,\dots,\xi^n\in\mathbb{R}^N$ виконуються оцінки

$$a_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2\le\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\Big)_{\mathbb{R}^N}\le a^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2\quad(0<a_0\le a^0<+\infty);$$

(Q1): $q\in\mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$, $q_0\ge 2$;

(G1): G – квадратна матриця N-го порядку, $G=diag(g_1,\dots,g_N)$, $g_l\in L^\infty(Q_{0,T})$ та $0<g_0\le g_l(x,t)\le g^0<+\infty$ м.д.в. $(x,t)\in Q_{0,T}$, $l=\overline{1,N}$;

(F1): $F\in L_2(\mathbb{S};L^2(0,T;H))$;

(U1): $u_0\in L_2(\mathbb{S};H)$;

(W1): W – вінерівський процес (див. [1, с. 109]), $b_0\in[C_0^\infty(\Omega)]^N$,

$$b(x,t,\omega)=b_0(x)W(t,\omega),\quad(x,t,\omega)\in\Pi_{0,T}. \tag{10}$$

Нехай b_t – білий шум, тобто похідна в сенсі розподілів від функції b з умови **(W1)**. Щоб ввести поняття розв'язку задачі (1)-(3) зробимо в ній заміну невідомої функції $u \leftrightsquigarrow \widetilde{u}$ за правилом

$$u(x,t,\omega) = \widetilde{u}(x,t,\omega) + b(x,t,\omega). \tag{11}$$

Оскільки $b|_{x\in\partial\Omega} = 0$ та $b|_{t=0} = 0$, то для знаходження нової невідомої функції $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1,\dots,\widetilde{u}_N) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^N$ отримаємо таку задачу:

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x,t)\Big(\widetilde{u}+b(x,t,\omega)\Big)_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x,t)\Big|\widetilde{u}+b(x,t,\omega)\Big|^{q(x,t)-2}\Big(\widetilde{u}+b(x,t,\omega)\Big) +$$

$$+\int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,y,t)\Big(\widetilde{u}+b(y,t,\omega)\Big)\,dy = F(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega)\in\Pi_{0,T}, \tag{12}$$

$$\widetilde{u}(x,t,\omega) = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad (t,\omega)\in\Theta_{0,T}, \tag{13}$$

$$\widetilde{u}(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x\in\Omega, \quad \omega\in\mathbb{S}. \tag{14}$$

Визначимо оператори $A(t) : V_1 \to V_1^*$, $\mathsf{A} : L^2(0,T;V_1) \to L^2(0,T;V_1^*)$, $N(t) : [L^{q(x,t)}(\Omega)]^N \to [L^{q'(x,t)}(\Omega)]^N$ (тут $q' = \frac{q}{q-1}$), $\mathsf{N} : [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N \to [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^N$, $E(t) : [L^2(\Omega)]^N \to [L^2(\Omega)]^N$ та $\mathsf{E} : [L^2(Q_{0,T})]^N \to [L^2(Q_{0,T})]^N$ за такими правилами:

$$\langle A(t)z,w\rangle_{V_1} := \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x,t)z_{x_i}(x), w_{x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^N}\,dx, \quad t\in(0,T), \quad z,w\in V_1; \tag{15}$$

$$\langle \mathsf{A}u,v\rangle_{L^2(0,T;V_1)} := \int\limits_0^T \langle A(t)u(t),v(t)\rangle_{V_1}\,dt, \quad u,v\in L^2(0,T;V_1); \tag{16}$$

$$(N(t)s)(x) := G(x,t)|s(x)|^{q(x,t)-2}s(x), \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \quad s\in[L^{q(x,t)}(\Omega)]^N; \tag{17}$$

$$(\mathsf{N}r)(x,t) := G(x,t)|r(x,t)|^{q(x,t)-2}r(x,t), \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \quad r\in[L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N; \tag{18}$$

$$(E(t)h)(x) := \int\limits_{\Omega}\mathfrak{Z}(x,t,y)h(y)\,dy, \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \quad h\in[L^2(\Omega)]^N; \tag{19}$$

$$(\mathsf{E}p)(x,t) := \big(E(t)p(t)\big)(x) = \int\limits_{\Omega}\mathfrak{Z}(x,t,y)p(y,t)\,dy, \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \quad p\in[L^2(Q_{0,T})]^N. \tag{20}$$

Використовуватимемо позначення

$$(z,v)_\Omega := \begin{cases} \int\limits_\Omega (z(x),v(x))_{\mathbb{R}^N}\,dx, & z = col(u_1,\dots,u_N) : \Omega\to\mathbb{R}^N, \\ & v = col(v_1,\dots,v_N) : \Omega\to\mathbb{R}^N, \\ \int\limits_\Omega z(x)v(x)\,dx, & z,v : \Omega\to\mathbb{R}. \end{cases} \tag{21}$$

Насамкінець введемо оператори $S(t) : V(t)\to V^*(t)$ та $\mathsf{S} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$ так:

$$\langle S(t)z,w\rangle_{V(t)} := \langle A(t)z,w\rangle_{V_1} + (N(t)z,w)_\Omega + (E(t)z,w)_\Omega, \quad z,w\in V(t), \quad t\in(0,T); \tag{22}$$

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}u, v\rangle_{L^2(0,T;V_1)} + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[(\mathsf{N}u)(x,t) + (\mathsf{E}u)(x,t)\Big] v(x,t)\, dxdt, \tag{23}$$

$u, v \in U(Q_{0,T})$. Припустимо, що виконується умова

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big), \quad h = \min\Big\{2, \frac{q^0}{q^0 - 1}\Big\}. \tag{24}$$

Зазначимо, що з (24) випливає, що простір V_s з позначення (6) задовольняє включення: $V_s \overset{\circlearrowleft}{\subset} (V_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^N) \overset{\circlearrowleft}{\subset} V(t)$, $t \in [0,T]$.

Означення 1. Функція $\widetilde{u}$ називається узагальненим розв'язком задачі (12)-(14), якщо

1) $\widetilde{u} \in W(Q_{0,T})$ майже напевно (м.н.);

2) м.н. функція $\widetilde{u}$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\Big(\widetilde{u},\ z_t\Big)_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}),\ z_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^N} + \Big(G|\widetilde{u} + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u} + b),\ z\Big)_{\mathbb{R}^N} + \\ + \Big(\int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,y,t)\Big(\widetilde{u} + b\Big) dy,\ z\Big)_{\mathbb{R}^N}\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\ z)_{\mathbb{R}^N}\, dxdt \tag{25}$$

для всіх пробних функцій $z \in U(Q_{0,T})$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $[D^*(Q_{0,T})]^N$ м.н. виконується рівність

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u} + b) = F; \tag{26}$$

3) $\widetilde{u}$ м.н. задовольняє умову (14) в сенсі простору $C([0,T];H)$.

Означення 2. Функція u називається узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо u має вигляд (11) та функція $\widetilde{u}$ є узагальненим розв'язком (12)-(14) в сенсі означення 1.

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* ***(A1)-(W1)****, стала s взята з умови (24), $\partial\Omega \subset C^{2s}$. Тоді задача (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок u. Крім того,*

$$u \in L_2\Big(\mathbb{S};\ C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V_1)\Big) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T}).$$

3. Доведення основних результатів

Для доведення теореми 3 спершу розглянемо схожу до (12)-(14) задачу

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t)\Big(\widetilde{u} + b(x,t)\Big)_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x,t)\Big|\widetilde{u} + b(x,t)\Big|^{q(x,t)-2}\Big(\widetilde{u} + b(x,t)\Big) + \\ + \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,y,t)\Big(\widetilde{u} + b(y,t)\Big)\, dy = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{27}$$

$$\widetilde{u}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{28}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{29}$$

де функції F, b, u_0 не залежать від випадкового параметра ω (тому казатимемо, що це детермінована задача). Припустимо, що замість **(F1)**-**(W1)** тепер виконуються умови

(F2): $F \in L^2(0,T;H)$;

(U2): $u_0 \in H$;
(W2): $b \in U(Q_{0,T})$.

Означення 4. Функція $\widetilde{u}$ називається узагальненим розв'язком детермінованої задачі (27)-(29) (коротко записуватимемо цей факт так: $\widetilde{u} \in SP(u_0, F, b)$), якщо

1) $\widetilde{u} \in W(Q_{0,T})$;
2) функція $\widetilde{u}$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\Big(\widetilde{u},\ z_t\Big)_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}),\ z_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^N} + \Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\ z\Big)_{\mathbb{R}^N} + \\ + \Big(\int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,y,t)(\widetilde{u}+b)\ dy,\ z\Big)_{\mathbb{R}^N}\Big]\ dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\ z)_{\mathbb{R}^N}\ dxdt \tag{30}$$

для всіх пробних функцій $z \in U(Q_{0,T})$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $[D^*(Q_{0,T})]^N$ виконується рівність

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u}+b) = F; \tag{31}$$

3) $\widetilde{u}$ задовольняє умову (29) в сенсі простору $C([0,T];H)$.

Використовуючи методику праці [1] доводимо таке твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови **(A1)-(G1)**, **(F2)-(W2)**, стала s взята з умови (24), $\partial\Omega \subset C^{2s}$. Тоді існує єдиний розв'язок $\widetilde{u}$ детермінованої задачі (27)-(29).*

За умов теореми 5 можна показати, що розв'язок задачі (27)-(29) неперервно залежить від вхідних даних u_0, F, b, тобто, якщо для всіх $u_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;H)$, $b \in U(Q_{0,T})$ і всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільних функцій $u_0^\delta \in H$, $F^\delta \in L^2(0,T;H)$, $b^\delta \in U(Q_{0,T})$ таких, що задовольняють оцінки

$$||u_0^\delta - u_0; H|| < \delta, \quad ||F^\delta - F; L^2(0,T;H)|| < \delta, \tag{32}$$

$$||b^\delta - b; U(Q_{0,T})|| < \delta, \tag{33}$$

відповідні розв'язки $\widetilde{u} \in SP(u_0, F, b)$ та $\widetilde{u}^\delta \in SP(u_0^\delta, F^\delta, b^\delta)$ задовольняють оцінку

$$||u^\delta - u; C([0,T];H)|| + ||u^\delta - u; U(Q_{0,T})|| < \varepsilon. \tag{34}$$

Доведення цього факту опустимо.

Тепер перейдемо до доведення існування розв'язку відповідної (27)-(29) задачі з випадковим параметром, тобто задачі (12)-(14).

Теорема 6. *Якщо $F \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0,T;H))$, $b \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0,T;V_1)) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$ та $u_0 \in L_2(\mathbb{S}; H)$, то задача (12)-(14) має єдиний розв'язок $\widetilde{u}$. Крім того,*

$$\widetilde{u} \in L_2(\mathbb{S}; C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V_1)), \tag{35}$$

$$\widetilde{u} \in L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T}). \tag{36}$$

Доведення. <u>*Крок 1.*</u> Для кожного фіксованого $\omega \in \mathbb{S}$ задача (12)-(14) має розв'язок в сенсі означення 1 як розв'язок детермінованої задачі (27)-(29) з випадковим параметром $\omega \in \mathbb{S}$. Нехай

$$\mathfrak{R} : H \times L^2(0,T;H) \times U(Q_{0,T}) \to C([0,T];H) \cap U(Q_{0,T})$$

– таке відображення, що
$$\mathfrak{R}\{u_0,\ F,\ b\} = \widetilde{u}, \tag{37}$$
де $\widetilde{u}$ – розв'язок детермінованої задачі (27)-(29). З наведених нами міркувань слідує, що функція $\mathfrak{R}$ визначена коректно і є неперервною.

Введемо функцію випадкового аргументу
$$\phi : \mathbb{S} \to H \times L^2(0,T;H) \times U(Q_{0,T})$$
за правилом
$$\phi(\omega) := \{u_0(\cdot,\omega),\ \ F(\cdot,\cdot,\omega),\ \ b(\cdot,\cdot,\omega)\},\quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{38}$$
Використаємо (37) та (38) для означення функції $\Psi : \mathbb{S} \to C([0,T];H) \cap U(Q_{0,T})$ за таким правилом:
$$\Psi(\omega) := \mathfrak{R} \circ \phi(\omega) = \mathfrak{R}(\phi(\omega)),\quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{39}$$
Отже, для кожного $\omega \in \mathbb{S}$ значення $\Psi(\omega)$ дорівнює $\widetilde{u}(\cdot,\cdot,\omega)$, де $\widetilde{u}$ – розв'язок детермінованої задачі (27)-(29) з фіксованим випадковим параметром ω.

Оскільки функція ϕ з (38) є вимірною, а $\mathfrak{R}$ є неперервною, то функція Ψ з (39) є вимірною. Отже, $\widetilde{u}$ буде $C([0,T];H) \cap U(Q_{0,T})$-значною випадковою величиною.

Крім того, можна показати, що $\widetilde{u}$ задовольняє такі оцінки:
$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau,\omega)|^2\, dx \le C_1 \mathbf{F}(\tau,\omega), \tag{40}$$
$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^2 + |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le C_1 \mathbf{F}(\tau,\omega), \tag{41}$$
де стала $C_1 > 0$ не залежить від ω, u_0, F, b,
$$\mathbf{F}(\tau,\omega) = \int\limits_{\Omega} |u_0(x,\omega)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F(x,t,\omega)|^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^{q(x,t)} + |b(x,t,\omega)|^2\Big]\, dxdt,\quad \tau \in (0,T],\quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{42}$$

Візьмемо в (40) максимум за τ, а в (41) $\tau = T$. Оскільки функція $\mathbf{F}(T,\cdot)$ належить до $L_1(\mathbb{S})$, то, зінтегрувавши отримані рівності за змінною $\omega \in \mathbb{S}$, отримаємо існування інтегралів, що гарантують виконання вкладень (35)-(36).

Крок 2. Доведення єдиності розв'язку проводимо методом від супротивного. Якщо $\widetilde{u}_1$ та $\widetilde{u}_2$ – розв'язки задачі (12)-(14), то можна показати, що їх різниця $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$ задовольняє таку оцінку:
$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau,\omega)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[C_2 \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}(x,t,\omega)|^2 +$$
$$+ C_3 |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le 0,\quad \tau \in (0,T],\quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{43}$$
де $C_2, C_3 > 0$ – деякі сталі. При доведенні (43) використано формулу інтегрування частинами для функцій з простору $W(Q_{0,T})$, яка виконується згідно умови **(Q1)** та [4, с. 95]. Зінтегрувавши за $\omega \in \mathbb{S}$, отримаємо з (43), що $\widetilde{u}_1 = \widetilde{u}_2$, наприклад, в сенсі простору $L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$. Теорему 6 доведено. $\square$

Доведення основної теореми 3. Якщо виконується умова **(W1)**, то функція b має вигляд (10), де $b_0 \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$. Тоді існує стала $C_4 > 0$ така, що для всіх $x \in \Omega$ виконуються оцінки

$$|b_0(x)| \le C_4, \quad |(b_0)_{x_i}(x)| \le C_4, \quad i = \overline{1,n}. \tag{44}$$

Тому

$$|b(x,t,\omega)| \le C_4 |W(t,\omega)|, \tag{45}$$

$$|b_{x_i}(x,t,\omega)| \le C_4 |W(t,\omega)|, \quad i = \overline{1,n}. \tag{46}$$

З оцінок (45)-(46) та властивостей вінерівського процесу W випливає, що

$$\int\limits_{\Pi_{0,T}} \Big[|b(x,t,\omega)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^{q(x,t)} \Big] \, dxdt \, \mathbb{P}(d\omega) \le C_5.$$

Тому функція b з умови **(W1)** задовольняє умови Теореми 6.

Оскільки в теоремі 6 ми довели існування єдиного розв'язку задачі (27)-(29), то згідно формули (11) та означення 2 маємо, що теорему 3 доведено. ☐

Висновки. В статті розглянуто мішану задачу для системи нелінійних параболічних рівнянь зі змінним показником нелінійності, інтегральним доданком та білим шумом. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку цієї задачі. Отримані результати є узагальненням результатів праці [1], де було розглянуто модельне рівняння без інтегрального члена і з показником нелінійності, що залежав тільки від змінної x.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бугрій Н., Бугрій О., Доманська О. Напівлінійне стохастичне параболічне рівняння зі змінним показником нелінійності. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2022. Випуск 93. С. 108–121. DOI: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.108-121
2. Бугрій О., Бугрій Н., Власов В. Просторово-часовий стохастичний інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда. *Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта.* 2024. Том 1, №1. С. 13–26. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-02
3. Бугрій О., Хома М., Вовк І.-М. Стохастичне диференціювання в рівняннях зі змінними показниками нелінійності. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2024. Випуск 96. С. 83–104. DOI: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092
4. Kaltenbach A. Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents. *Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 2329. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023. 358 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-29670-3
5. Bokalo M.M., Ilnytska O.V. Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay. *Applicable Anal.* 2017. Vol. 96, No. 7. P. 1240–1254. DOI: https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1183771
6. Bokalo M. Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity. *J. Optim., Diff. Eq. Appl.* 2022. Vol. 30, No. 1. P. 98–121. DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142205

7. Bokalo M.M., Domanska O.V. Higher-orders elliptic-parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity. *Matematychni Studii.* 2023. Vol. 59, No. 1. P. 86–105. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.1.86-105

UDC 517.95

Integro-differential systems of stochastic parabolic equations with variable exponents of nonlinearity

Oleh Buhrii, Ihor Kutsevol

Abstract. Some nonlinear second order parabolic system with the variable exponents of nonlinearity, integral term, and the white noise is considered. The existance and uniqueness of the weak solution for the corresponding initial-boundary value problem are proved.

Keywords: stochastic parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, white noise, weak solution.

References

1. Buhrii, N., Buhrii, O., Domanska, O. (2022). *Semilinear stochastic parabolic equation with variable exponent of nonlinearity*, Visnyk of the Lviv Univ., Series Mech. Math., **93**, 108–121. [in Ukrainian]. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.108-121
2. Buhrii, O., Buhrii, N., Vlasov, V. (2024). *On stochastic space-time Paley-Wiener-Zygmund integral*, Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, **1** (1), 13–26. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-02
3. Buhrii, O., Khoma, M., Vovk, I.-M. (2024). *Stochastic differentiations in equations with variable exponents of nonlinearity*, Herald of Lviv University, Ser. Mech.-Math., **96**, 83–104. [in Ukrainian]. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092
4. Kaltenbach, A. (2023). *Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, **2329**, Springer Nature Switzerland AG, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29670-3
5. Bokalo, M.M., Ilnytska, O.V. (2017). *Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay*, Applicable Anal., **96** (7), 1240–1254. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1183771
6. Bokalo, M. (2022). *Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity*, J. Optim., Diff. Eq. Appl., **30** (1), 98–121. http://dx.doi.org/10.15421/142205
7. Bokalo, M.M., Domanska, O.V. (2023). *Higher-orders elliptic-parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Matematychni Studii, **59** (1), 86–105. https://doi.org/10.30970/ms.59.1.86-105

Про авторів / About the authors

Олег Бугрій, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

Oleh Buhrii, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine;

Ігор Куцевол, аспірант, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

Ihor Kutsevol, Postgraduate student, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine.

Отримано / Received 25.06.2025
Прийнято до друку / Accepted 29.10.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 186–197.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 186–197.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.5:512.55

Диференційовні функції кватерніонної змінної

Леся Вотякова[1], Людмила Наконечна [2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
lesia.votiakova@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-4799-7752

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
liudmila.nakonechna@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-6348-2180

Анотація. У цій статті проводиться дослідження в алгебрі кватерніонів. Зокрема, розглядаються функції кватерніонної змінної. Ми пропонуємо інший підхід до введення поняття диференційовної функції $f(q)$. Також ми побудували деякі елементарні функції, диференційовані в рамках цього підходу.

Ключові слова: алгебра кватерніонів; диференційовна функція; кватерніонна змінна; частинна похідна.

1.Вступ

Початок XIX ст. в математиці ознаменувався тим, що комплексні числа посіли важливе місце в науці. Як виявилось, застосування комплексних чисел дозволяє зручно і компактно сформулювати багато математичних моделей, що ефективно застосовуються в математичній фізиці і природничих науках.

У 1843 році ірландський математик Вільям Гамільтон відкрив алгебру кватерніонів, яка стала історично першою гіперкомплексною системою. З того часу наукові дослідження в алгебрі кватерніонів не припиняються. Тривають побудова кватерніонного аналізу і пошуки усе нових застосувань кватерніонів.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-02

2.Постановка проблеми

У роботах [1], [2] і [3] побудовано аналіз в алгебрі скінченного рангу за допомогою ізоморфної матричної алгебри. Таким самим шляхом ми йшли в дослідженні алгебри кватерніонів і побудові функцій кватерніонної змінної. У праці [4] описано два різні підходи до означення диференційовності функцій кватерніонної змінної. А в нашій роботі побудуємо ще одну версію диференційовних функцій кватерніонної змінної і означено деякі елементарні функції кватерніонної змінної.

3.Основні результати

Нехай маємо функцію кватерніонної змінної $f(q)$, визначену в деякій області $G \subset Q$.

Наша мета – означити поняття диференційовної функції кватерніонної змінної, причому щоб були диференційовними функції виду q^n і щоб виконувалось $(q^n)' = nq^{n-1}$.

Зрозуміло, що в основному ми будемо орієнтуватись на означення диференційовності функції комплексної змінної.

Будемо говорити, що функція $f(q)$ подається в канонічному вигляді, якщо існують дійснозначні функції від 4-х дійсних змінних $f_0(t,x,y,z), f_1(t,x,y,z), f_2(t,x,y,z), f_3(t,x,y,z)$ такі, що

$$f(q) = f_0(t,x,y,z) + f_1(t,x,y,z)i + f_2(t,x,y,z)j + f_3(t,x,y,z)k. \tag{1}$$

Будемо вважати, що функція $f(q)$ від чотирьох змінних t,x,y,z диференційовна (в розумінні дійсного аналізу), якщо її диференціал подається у вигляді

$$df(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial t}\partial t + \frac{\partial f(q)}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f(q)}{\partial y}\partial y + \frac{\partial f(q)}{\partial z}\partial z. \tag{2}$$

Як приклад, розглянемо функцію $f(q) = q^3$, визначену на Q.

$$\begin{aligned} q^3 &= (t + xi + yj + zk)^3 = \\ &= t^3 + 3t(xi + yj + zk) + 3t(xi + yj + zk)^2 + (xi + yj + zk)^3 = \\ &= t^3 - 3t(x^2 + y^2 + z^2) + (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)(xi + yj + zk). \end{aligned}$$

Тут

$$f_0(t,z,y,z) = t^3 - 3t(x^2 + y^2 + z^2), f_1(t,x,y,z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)x,$$
$$f_2(t,x,y,z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)y, f_3(t,x,y,z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)z.$$

Оскільки функції f_0, f_1, f_2, f_3 мають неперервні частинні похідні за всіма змінними, то функція q^3 диференційовна в розумінні дійсного аналізу.

Нехай

$$\partial q = \partial t + i\partial x + j\partial y + k\partial z, \quad \partial\overline{q} = \partial t - i\partial x - j\partial y - k\partial z.$$

Подамо $\partial t, \partial x, \partial y, \partial z$ через ∂q і $\partial\overline{q}$. Маємо $\partial t = \frac{1}{2}(\partial q + \partial\overline{q})$,

$$i\partial q = \partial ti - \partial x + \partial yk - \partial zj, \ \partial qi = \partial ti - \partial x - \partial yk + \partial zj,$$
$$\partial\overline{q}i = \partial ti + \partial x + \partial yk - \partial zj, \ i\partial\overline{q} = \partial ti + \partial x - \partial yk + \partial zj.$$

Звідси

$$\partial x = \frac{1}{2}(\partial\overline{q}i - i\partial q),\ \partial x = \frac{1}{2}(i\partial\overline{q} - \partial qi).$$

Аналогічно

$$\partial y = \frac{1}{2}(\partial\overline{q}j - j\partial q),\ \partial j = \frac{1}{2}(j\partial\overline{q} - \partial qj).$$

$$\partial z = \frac{1}{2}(\partial\overline{q}k - k\partial q),\ \partial z = \frac{1}{2}(k\partial\overline{q} - \partial qk).$$

Скориставшись цими поданнями, (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
df(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k\right)(\partial\overline{q} + \partial q) + \\
+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x}i + \frac{\partial f_2}{\partial x}j + \frac{\partial f_3}{\partial x}k\right)(i\partial\overline{q} - \partial qi) + \\
+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y}i + \frac{\partial f_2}{\partial y}j + \frac{\partial f_3}{\partial y}k\right)(j\partial\overline{q} - \partial qj) + \\
+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}i + \frac{\partial f_2}{\partial z}j + \frac{\partial f_3}{\partial z}k\right)(k\partial\overline{q} - \partial qk) = \\
= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial z} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)i + \right.\\
\left. + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_0}{\partial z}\right)k\right)\partial\overline{q} + \\
+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k\right)\partial q - \\
- \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x}i + \frac{\partial f_2}{\partial x}j + \frac{\partial f_3}{\partial x}k\right)\partial qi - \\
- \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y}i + \frac{\partial f_2}{\partial y}j + \frac{\partial f_3}{\partial y}k\right)\partial qj - \\
- \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}i + \frac{\partial f_2}{\partial z}j + \frac{\partial f_3}{\partial z}k\right)\partial qk.
\end{aligned}$$

За аналогією з аналізом функцій комплексної змінної назвемо функцію $f(q)$ диференційовною, якщо в $df(q)$ вираз, що стоїть перед $\partial\overline{q}$ дорівнює нулю, тобто виконуються умови

$$\begin{cases}
\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_0}{\partial z} = 0.
\end{cases} \tag{3}$$

Слід зазначити, що умови (3) досить жорсткі. Їх не задовольняє навіть функція $f(q) = q$. Задовольняють ці умови функції виду

$$f(q) = f_0(t,x) + f_1(t,x)i, \text{ де } \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t},$$
$$f(q) = f_0(t,y) + f_2(t,y)j, \text{ де } \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t},$$
$$f(q) = f_0(t,z) + f_3(t,z)k, \text{ де } \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}.$$

Розглянемо інший підхід. Оскільки за функцією

$$f(q) = f_0(t,x,y,z) + f_1(t,x,y,z)i + f_2(t,x,y,z)j + f_3(t,x,y,z)k$$

можна побудувати три функції типу функцій комплексної змінної

$$h_1(t,x) = f_0(t,x,y,z) + f_1(t,x,y,z)i, \text{ де } y,z \text{ — параметри},$$
$$h_2(t,y) = f_0(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)j, \text{ де } x,z \text{ — параметри},$$
$$h_3(t,z) = f_0(t,x,y,z) + f_3(t,x,y,z)k, \text{ де } x,y \text{ — параметри},$$

то для диференційовності цих функцій достатніми є умови

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}.$$

Тобто умови

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}. \tag{5}$$

Якраз такий підхід пропонується в роботі [4], тобто функція $f(q)$ диференційовна, якщо вона задовольняє умови (4), (5), причому похідна цієї функції обчислюється за формулою

$$f'(q) = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k.$$

Очевидно, що диференційовними згідно умов (4) є функції:

$$f(q) = q \text{ і } q' = 1, f(q) = q^2 \text{ і } \left(q^2\right)' = 2q.$$

Однак вже функція

$$f(q) = q^3 = (t + xi + yj + zk)^3 =$$
$$= t^3 - 3t\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(3t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right)(xi + yj + zk).$$

не є диференційовною

Тут

$$f_0(t,x,y,z) = t^3 - 3t\left(x^2+y^2+z^2\right),$$
$$f_1(t,x,y,z) = \left(3t^2-x^2-y^2-z^2\right)x,$$
$$f_2(t,x,y,z) = \left(3t^2-x^2-y^2-z^2\right)y,$$
$$f_3(t,x,y,z) = \left(3t^2-x^2-y^2-z^2\right)z$$

і очевидно, що для цих функцій умови (4) не виконуються.

Разом з тим умови (5) виконуються

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -6tx, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -6ty, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -6tz,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 6tx, \frac{\partial f_2}{\partial t} = 6ty, \frac{\partial f_3}{\partial t} = 6tz.$$

Ми пропонуємо опустити умову (4) і залишити умову (5), а саме диференційовність функції кватерніонної змінної означити так.

Означення 1. *Функція $f(q)$ називається диференційовною у точці $q_0 = t_0 + x_0 i + y_0 j + z_0 k$, якщо вона диференційовна в розумінні дійсного аналізу і виконуються умови (5), тобто у цій точці*

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}.$$

Причому якщо функція $f(q)$ диференційовна в точці, то її похідною будемо називати

$$f'(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k. \tag{6}$$

(В математиці використовують термін «слабші умови», то тут можна говорити про «слабшу диференційовність» у порівнянні з означенням, прийнятим в роботі [6].)

Теорема 1. *Якщо функції $f(q)$ і $g(q)$ диференційовні у розумінні означення 1, то їхня сума є диференційовною функцією, причому $\forall \alpha, \rho \in \mathbb{R}$ виконується*

$(\alpha \cdot f(q) + \beta \cdot g(q))' = \alpha \cdot f'(q) + \beta \cdot g'(q)$.

Доведення. Нехай $f(q)$ і $g(q)$ диференційовні за означенням 1 і $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$.

$$f(q) = f_0(t,x,y,z) + f_1(t,x,y,z)i + f_2(t,x,y,z)j + f_3(t,x,y,z)k.$$
$$g(q) = g_0(t,x,y,z) + g_1(t,x,y,z)i + g_2(t,x,y,z)j + g_3(t,x,y,z)k.$$

Розглянемо лінійну комбінацію $F(q) = \alpha \cdot f(q) + \beta \cdot g(q)$. Умови (5) виконуються. Знайдемо похідну цієї функції за формулою (6)

$$F'(q) = (\alpha \cdot f(q) + \beta \cdot g(q))' =$$
$$\left(\frac{\partial(\alpha f_0 + \beta g_0}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha f_1 + \beta g_1}{\partial t}i + \frac{\partial(\alpha f_2 + \beta g_2}{\partial t}j + \frac{\partial(\alpha f_3 + \beta g_3}{\partial t}k\right) =$$
$$\alpha\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k\right) + \beta\left(\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial t}i + \frac{\partial g_2}{\partial t}j + \frac{\partial g_3}{\partial t}k\right) =$$
$$= \alpha \cdot f'(q) + \beta g'(q).$$

Легко показати, $(q^3)' = 3q^2, (q^4)' = 4q^3$.

Покажемо, що функція $f(q) = \frac{1}{q}$, де q – ненульовий кватерніон, диференційовна.

Подамо $\frac{1}{q}$ в канонічному вигляді.

$$\frac{1}{q} = \frac{\overline{q}}{q\overline{q}} = \frac{t - xi - yj = -zk}{(t + xi + yj + zk)(t - xi - yj - zk)}.$$

$$q\overline{q} = t^2 - (xi + yj + zk)^2 = t^2 - (xi + yj + zk)(xi + yj + zk) =$$
$$= t^2 + x^2 + y^2 + z^2 - (xyk - xzj - xyk + yzi + xzj - yzi) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Позначимо $\|q\|^2 = q\overline{q} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$.

А тому $\frac{1}{q} = \frac{t}{\|q\|} - \frac{x}{\|q\|}i - \frac{y}{\|q\|}j - \frac{z}{\|q\|}k$.

Тому

$$f_0(t, x, y, z) = \frac{t}{\|q\|}, f_1(t, x, y, z) = -\frac{x}{\|q\|},$$
$$f_2(t, x, y, z) = -\frac{y}{\|q\|}, f_3(t, x, y, z) = -\frac{z}{\|q\|}.$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{t}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{2tx}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{2ty}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{2tz}{\|q\|^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{x}{\|q\|}\right) = \frac{2tx}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{2ty}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{2tz}{\|q\|^2}.$$

Отже, для цієї функції $\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}$, тобто вона диференційовна. Її похідна дорівнює

$$f'(q) = \left(\frac{1}{q}\right)' =$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\|q\|}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{x}{\|q\|}\right)i + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{y}{\|q\|}\right)j + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{z}{\|q\|}\right)k.$$

З того що

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{-t^2 + x^2 + y^2 + z^2}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{2tx}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{2ty}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{2tz}{\|q\|^2}.$$

випливає

$$\left(\frac{1}{q}\right)' = \frac{1}{\|q\|^2}\left(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2txi + 2tyj + 2tzk\right) =$$
$$= -\frac{1}{\|q\|^2}\left(t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2txi - 2tyj - 2tzk\right) = -\frac{1}{\|q\|^2}(\overline{q})^2.$$

А оскільки $\|q\|^2 = (q\overline{q})^2 = q^2(\overline{q})^2$, то $\left(\frac{1}{q}\right)' = -\frac{1}{q^2}$.

Степенева функція q^n

Спочатку розглянемо функцію $f(q) = (xi + yj + zk)^n$

Маємо $(xi + yj + zk)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2)$,

$(xi + yj + zk)^3 = -(x^2 + y^2 + z^2)(xi + yj + zk)$,

$(xi + yj + zk)^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

Тоді для показників степеня маємо $4n,\ 4n + 1,\ 4n + 2,\ 4n + 3$ маємо

$$(xi + yj + zk)^{4n} = \left((xi + yj + zk)^2\right)^{2n} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n},$$
$$(xi + yj + zk)^{4n+1} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n}(xi + yj + zk), \quad (7)$$

$(xi + yj + zk)^{4n+2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{2n+1}$,

$(xi + yj + zk)^{4n+3} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{2n+1}(xi + yj + zk)$.

Розглянемо тепер функцію $q^{4n} = (t + xi + yj + zk)^{4n}$.

Скористаємось біномом Ньютона і рівностями ((7)). Подамо функцію в канонічному вигляді

$$q^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k t^{4n-k}(xi + yj + zk)^k = t^{4n} - C_{4n}^2 t^{4n-2}(x^2 + y^2 + z^2) +$$
$$+ C_{4n}^4 t^{4n-4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - \ldots + C_{4n}^{4n-4} t^4 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-2} -$$
$$- C_{4n}^{4n-2} t^2 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-1} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n} +$$
$$+ \Big(C_{4n}^1 t^{4n-1} - C_{4n}^3 t^{4n-3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \ldots +$$
$$+ C_{4n}^{4n-3} t^3 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-2} - C_{4n}^{4n-1}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-1}\Big) \cdot$$
$$\cdot (xi + yj + zk).$$

Тут

$$f_0(t, x, y, z) = t^{4n} - C_{4n}^2 t^{4n-2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + C +$$
$$+ 4n^4 t^{4n-4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - \ldots + +C + 4n^{4n-4} t^4 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-2} -$$
$$- C_{4n}^{4n-2} t^2 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-1} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n},$$
$$f_1(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)x,\ f_2(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)y,$$
$$f_3(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)z, \text{де}$$
$$\varphi(t, x, y, z) = C_{4n}^1 t^{4n-1} - C_{4n}^3 t^{4n-3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \ldots +$$
$$+ C_{4n}^{4n-3} t^3 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-2} - C_{4n}^{4n-1} t \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{2n-1}.$$

Перевіряємо умови диференційовності

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -C_{4n}^2 t^{4n-2} 2x + C_{4n}^4 t^{4n-4}\left(x^2+y^2+z^2\right)4x - \ldots +$$
$$+ C_{4n}^{4n-4} t^4 (2n-2)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-3} 2x -$$
$$- C_{4n}^{4n-2} t^2 (2n-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-2} 2x + 2n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-1} 2x =$$
$$= 4n\left(-C_{4n-1}^1 t^{4n-2} x + C_{4n-1}^3 t^{4n-4}\left(x^2+y^2+z^2\right)x - \ldots +\right.$$
$$+ C_{4n-1}^{4n-5} t^4 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-3} x -$$
$$\left. - C_{4n-1}^{4n-3} t^2 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-2} x + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-1} x\right),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = C_{4n}^1 (4n-1) t^{4n-2} x - C_{4n}^3 (4n-3) t^{4n-4} (x^2+y^2+z^2) x + \ldots +$$
$$+ C_{4n}^{4n-3} 3t^2 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-2} x - C_{4n}^{4n-1}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-1} x =$$
$$= 4n\left(C_{4n-1}^1 t^{4n-2} x - C_{4n-1}^3 t^{4n-4}\left(x^2+y^2+z^2\right)x + \ldots -\right.$$
$$- C_{4n-1}^{4n-5} t^4 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-3} x +$$
$$\left. + C_{4n-1} 4n - 3t^2 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-2} x - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-1} x\right).$$

Отже, $\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}$. Аналогічно $\frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}$.

Функція $f(q) = q^{4n}$ диференційовна і її похідна дорівнює

$$\left(q^{4n}\right)' = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} i + \frac{\partial f_2}{\partial t} j + \frac{\partial f_3}{\partial t} k = 4n t^{4n-1} -$$
$$- C_{4n}^2 (4n-2) t^{4n-3}\left(x^2+y^2+z^2\right) +$$
$$+ C_{4n}^4 (4n-4) t^{4n-5}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - \ldots +$$
$$+ C_{4n}^2 (4n-4) t^3 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-2} - C_{4n}^2 (4n-2) 2t \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-1} +$$
$$+ 4n\Bigg(C_{4n-1}^1 t^{4n-2} - C_{4n-1}^4 (4n-2) t^{4n-4}\left(x^2+y^2+z^2\right) +$$
$$+ \ldots - C_{4n-1}^{4n-5} t^4 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-3} + C_{4n-1}^{4n-3} t^2 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-2} -$$
$$- \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2n-1}\Bigg) \cdot (xi+yj+zk) =$$
$$= 4n\left(t^{4n-1} + C_{4n-1}^1 t^{4n-2}(xi+yj+zk) + \right.$$
$$+ C_{4n-1}^2 t^{4n-3}(xi+yj+zk)^2 + C_{4n-1}^3 t^{4n-4}(xi+yj+zk)^3 + \ldots +$$
$$+ C_{4n-1}^{4n-3} t^2 (xi+yj+zk)^{4n-3} + C_{4n-1}^{4n-2} t (xi+yj+zk)^{4n-2} +$$
$$\left. + (xi+yj+zk)^{4n-1}\right) = 4n(t+xi+yj+zk)^{4n-1} = 4nq^{4n-1}$$

Перевіримо це для $q^{4n+1}f(q) = q^{4n+1}(t + xi + yj + zk)^{4n+1}$.

$$
\begin{aligned}
q^{4n+1} = \sum_{k=0}^{4n+1} & C_{4n+1}^{k} t^{4n+1-k}(xi+yj+zk)^k = \\
&= t^{4n+1} + C_{4n+1}^{1} t^{4n}(xi+yj+zk) + C_{4n+1}^{2} t^{4n-1}(xi+yj+zk)^2 + \\
&+ C_{4n+1}^{3} t^{4n-2}(xi+yj+zk)^3 + C_{4n+1}^{4} t^{4n-3}(xi+yj+zk)^4 + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-4} t^{5}(xi+yj+zk)^{4n-4} + C_{4n+1}^{4n-3} t^{4}(xi+yj+zk)^{4n-3} + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-2} t^{3}(xi+yj+zk)^{4n-2} + C_{4n+1}^{4n-1} t^{2}(xi+yj+zk)^{4n-1} + \\
&+ C_{4n+1}^{4n} t(xi+yj+zk)^{4n} + (xi+yj+zk)^{4n+1} = \\
&= t^{4n+1} + C_{4n+1}^{1} t^{4n}(xi+yj+zk) - C_{4n+1}^{2} t^{4n-1}(x^2+y^2+z^2) - \\
&- C_{4n+1}^{3} t^{4n-2}(x^2+y^2+z^2)(xi+yj+zk) + C_{4n+1}^{4} t^{4n-3}(x^2+y^2+z^2)^2 + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-4} t^{5}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} + C_{4n+1}^{4n-3} t^{4}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2}(xi+yj+zk) - \\
&- C_{4n+1}^{4n-2} t^{3}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} - C_{4n+1}^{4n-1} t^{4}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1}(xi+yj+zk) + \\
&+ C_{4n+1}^{4n} t(x^2+y^2+z^2)^{2n} + (x^2+y^2+z^2)^{2n}(xi+yj+zk) = \\
&= t^{4n+1} - C_{4n+1}^{2} t^{4n-1}(x^2+y^2+z^2) + C_{4n+1}^{4} t^{4n-3}(x^2+y^2+z^2)^2 + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-4} t^{5}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-2} t^{3}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + \\
&+ C_{4n+1}^{4n} t(x^2+y^2+z^2)^{2n} + \\
&+ \big(C_{4n+1}^{1} t^{4n} - C_{4n+1}^{3} t^{4n-2}(x^2+y^2+z^2) + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-3} t^{4}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^{2}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + \\
&+ (x^2+y^2+z^2)^{2n}\big)(xi+yj+zk).
\end{aligned}
$$

Тут

$$
\begin{aligned}
f_0(t,x,y,z) = {} & t^{4n+1} - C_{4n+1}^{2} t^{4n-1}(x^2+y^2+z^2) + \\
&+ C_{4n+1}^{4} t^{4n-3}(x^2+y^2+z^2)^2 + \ldots + C_{4n+1}^{4n-4} t^{5}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} - \\
&- C_{4n+1}^{4n-2} t^{3}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + C_{4n+1}^{4n} t(x^2+y^2+z^2)^{2n}, \\
f_1(t,x,y,z) = {} & \big(C_{4n+1}^{1} t^{4n} - C_{4n+1}^{3} t^{4n-2}(x^2+y^2+z^2) + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-3} t^{4}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^{2}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + \\
&+ (x^2+y^2+z^2)^{2n}\big) \cdot x, \\
f_2(t,x,y,z) = {} & \big(C_{4n+1}^{1} t^{4n} - C_{4n+1}^{3} t^{4n-2}(x^2+y^2+z^2) + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-3} t^{4}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^{2}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + \\
&+ (x^2+y^2+z^2)^{2n}\big) \cdot y, \\
f_3(t,x,y,z) = {} & \big(C_{4n+1}^{1} t^{4n} - C_{4n+1}^{3} t^{4n-2}(x^2+y^2+z^2) + \ldots + \\
&+ C_{4n+1}^{4n-3} t^{4}(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^{2}(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + \\
&+ (x^2+y^2+z^2)^{2n}\big) \cdot z.
\end{aligned}
$$

Знайдемо необхідні похідні. Маємо:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -C_{4n+1}^2 t^{4n-1} 2x + C_{4n+1}^4 t^{4n-3}(x^2+y^2+z^2)4x - \ldots +$$
$$+ C_{4n+1}^{4n-4} t^5 (x^2+y^2+z^2)^{2n-3}(4n-4)x -$$
$$- C_{4n+1}^{4n-2} t^3 (2n-1)(x^2+y^2+z^2)^{2n-2} 2x + C_{4n+1}^{4n} t(x^2+y^2+z^2)^{2n-1} 4nx =$$
$$= (4n+1)x\left(-4nt^{4n-1}x + C_{4n}^3 t^{4n-3}(x^2+y^2+z^2) - \ldots +\right.$$
$$+C_{4n}^{4n-3} t^5 (x^2+y^2+z^2)^{2n-3} - C_{4n}^{4n-1} t^3 (x^2+y^2+z^2)^{2n-2} +$$
$$\left. +4nt(x^2+y^2+z^2)^{2n-1}\right),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = (4n+1)x\left(4nt^{4n-1}x - C_{4n}^3 t^{4n-3}(x^2+y^2+z^2) + \ldots -\right.$$
$$+C_{4n}^{4n-3} t^5 (x^2+y^2+z^2)^{2n-3} + C_{4n}^{4n-1} t^3 (x^2+y^2+z^2)^{2n-2} -$$
$$\left. -4nt(x^2+y^2+z^2)^{2n-1}\right).$$

Маємо $\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}$. Аналогічно $\frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}$.
Отже, функція $f(q) = q^{4n+1}$ диференційовна і

$$f'(q) = \frac{\partial}{\partial f} f(q) = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} i + \frac{\partial f_2}{\partial t} j + \frac{\partial f_3}{\partial t} k =$$
$$= (4n+1)\left(t^{4n} - C_{4n}^2 t^{4n-2}(x^2+y^2+z^2) +\right.$$
$$+ C_{4n}^4 t^{4n-4}(x^2+y^2+z^2)^2 - \ldots + C_{4n}^{4n-4} t^4 (x^2+y^2+z^2)^{2n-2} -$$
$$- C_{4n}^{4n-2} t^2 (x^2+y^2+z^2)^{2n-1} + (x^2+y^2+z^2)^{2n} +$$
$$+ (4n+1)(C_{4n}^1 t^{4n-1} - C_{4n}^3 t^{4n-1}(x^2+y^2+z^2) + \ldots -$$
$$- C_{4n}^{4n-3} t^5 (x^2+y^2+z^2)^{2n-3} + C_{4n}^{4n-1} t^3 (x^2+y^2+z^2)^{2n-2} -$$
$$\left. -C_{4n}^{4n-1} t(xi+yj+zk)^{2n}\right)(xi+yj+zk) = (4n+1)q^{4n}$$
$$\left(q^{4n+1}\right)' = (4n+1)q^{4n}.$$

Аналогічно переконуємося, що функції q^{4n+2} і q^{4n+3} диференційовні і їхні похідні дорівнюють $(4n+2)q^{4n+1}$ і $(4n+3)q^{4n+2}$ відповідно. **А отже, для будь-якого натурального n функція q^n диференційовна і** $(q^n)' = n \cdot q^{n-1}$.

Висновки

У своїй роботі ми проводили дослідження в алгебрі кватерніонів. Основними результатами даної роботи є означення диференційовної функції кватерніонної змінної $f(q)$ та її похідної в особливий спосіб. А саме:
якщо

$$f(q) = f_0(t,x,y,z) + f_1(t,x,y,z)i + f_2(t,x,y,z)j + f_3(t,x,y,z)k$$

то умовами її диференційовності є

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t} \end{cases}$$

і похідна обчислюється за формулою

$$f'(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} i + \frac{\partial f_2}{\partial t} j + \frac{\partial f_3}{\partial t} k.$$

В роботі ми побудували функції $f(q) = q^n$ і $f(q) = \frac{1}{q}$. Показали їх диференційовність за нашим означенням і переконались, що їхні похідні є такими ж, як для відповідних функцій дійсної і комплексної змінної, а саме:

$$(q^n)' = n \cdot q^{n-1},$$

$$\left(\frac{1}{q}\right)' = -\frac{1}{q^2}.$$

Перспективу подальших досліджень бачимо у побудові елементарних функцій, диференційовних за введеним нами означенням.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Вотякова Л. А. Основи аналізу функцій тернарної змінної. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова.* Серія 1: Фізико-математичні науки. Київ, 2008. № 9. С. 111–119.
2. Вотякова Л. А. Елементарні функції тернарної змінної. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.* Серія: фізико-математичні науки. Київ, 2009. Вип. 1. С. 11–13.
3. Вотякова Л. А. Нормована алгебра тернарних чисел. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.* Серія: фізико-математичні науки. Київ, 2009. Вип. 2. С. 7–10.
4. Abdel-Khalek K. Quaternion analysis. Dipartimento di Fisica – Universita di Lesse, Italy, 1996. arXiv: https://arxiv.org/abs/hep-th/9607152v2

UDC 517.5:512.55

Differentiable functions of quaternion variable

Lesia Votiakova, Liudmila Nakonechna

Abstract. This paper conducts research in the algebra of quaternions. In particular, functions of a quaternion variable are considered. We propose a different approach to introducing the concept of a differentiable function. We have also constructed some elementary functions that are differentiable within this approach.

Keywords: quaternion algebra, differentiable function, quaternion variable, partial derivative.

References

1. Votiakova, L. A. (2008). *Foundations of analysis of functions of a ternary variable,* Naukovyi chasopys NPU im. M. P. Drahomanova, Series 1: Physical and Mathematical Sciences, **9**, 111–119. [in Ukrainian]
2. Votiakova, L. A. (2009). *Elementary functions of a ternary variable,* Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics], **1**, 11–13. [in Ukrainian]
3. Votiakova, L. A. (2009). *Normed algebra of ternary numbers,* Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics, **2**, 7–10. [in Ukrainian]
4. Abdel-Khalek, K. (1996). *Quaternion analysis (v2),* Preprint, arXiv.https://arxiv.org/abs/hep-th/9607152v2

Про авторів / About the authors

Леся Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Lesia Votiakova, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematics Education, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Людмила Наконечна, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Liudmyla Nakonechna, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematics Education, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 24.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

МІФ
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 198–205.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 198–205.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.5

Про існування розв'язку рівняння згортки у півсмуговій області

Христина Дум'як[1], Володимир Дільний[2]

[1]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математики та економіки, м. Дрогобич, Україна
khrystyna.dumiak@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0005-4942-3922

[2]Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8208-7960

Анотація. Розглядається рівняння типу згортки для просторів типу Гарді у півсмуговій області комплексної площини. Досліджено питання існування розв'язків цього рівняння, якщо породжуюча функція визначається двома полюсами. Результати отримані прямими методами. Показано відмінності у поведінці розв'язків в залежності від взаєморозміщення полюсів. Розроблений метод може бути застосований до аналізу інших функціональних просторів, в теорії інформації для ідентифікації сигналів.

Ключові слова: рівняння згортки, простір Гарді,.аналітична функція, теорія сигналів.

1. Вступ

Дослідження рівнянь типу згортки є важливим напрямком сучасного математичного аналізу, пов'язаним із розвитком теорії аналітичних функцій і функціонального аналізу. Такі рівняння виникають пр. розв'язуванні крайових задач для диференціальних рівнянь, а також у задачах, пов'язаних з інтегральними перетвореннями.

Особливий інтерес становить розгляд рівнянь типу згортки у півсмузі комплексної площини, де аналітичність функцій в області поєднується з наявністю граничних значень на межі області. Поведінка розв'язків у таких просторах істотно залежить від структури рівняння та умов належності функцій до певного простору аналітичних функцій.

Питання існування та єдності розв'язків рівнянь типу згортки вивчалися у працях [2], [4], [5] М. Джрбашяна, Дж. Якубовського, М. Віснєвольського, Н. Нікольського, Дж. Машрегі, Б. В. Винницького та його учнів і співробітників, багатьох інших математиків,

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-03

продовжують викликати значний інтерес в останні десятиліття. Багато в чому цей інтерес зумовлений застосуваннями різного типу згорток у теорії інформації, зокрема задачах шифрування, передачі та відтворення інформації.

Попри значний розвиток даного напрямку, невирішеними до кінця залишаються питання про конкретні умови існування розв'язку рівняння типу згортки у кутових областях та про зв'язок між структурою рівняння і властивостями його розв'язків.

2. Постановка задачі

Розглянемо простори типу Гарді у півсмугових областях, які ввів Б. Винницький у [2]. Нехай $\mathfrak{D}_\sigma = \{z : |Im\, z| < \sigma, Re\, z < 0\}, 0 \le \sigma < +\infty$,

$\mathfrak{D}_\sigma^* = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathfrak{D}}_\sigma$ а $E^p[\mathfrak{D}_\sigma]$ і $E_*^p[\mathfrak{D}_\sigma], 1 \le p < +\infty$, - простори функцій, аналітичних відповідно в $\mathfrak{D}_\sigma$ і $\mathfrak{D}_\sigma^*$, для яких

$$\sup\left\{\int_\gamma |f(z)|^p dz|\right\} < +\infty$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, які лежать відповідно в $\mathfrak{D}_\sigma$ і $\mathfrak{D}_\sigma^*$ (можна розглядати тільки ті відрізки γ, які паралельні принаймні одній із сторін $\partial\mathfrak{D}_\sigma$). Функції f із цих просторів мають майже всюди (м.в.) на $\partial\mathfrak{D}_\sigma$ кутові граничні значення (їх позначаємо через $f(z)$ і, отже, f природним чином визначена м.в. на $\partial\mathfrak{D}_\sigma$, $f \in L^p(\partial\mathfrak{D}_\sigma)$ і кожний із просторів $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$ і $E_*^2[\mathfrak{D}_\sigma]$ є повним відносно норми

$$\|f\| = \left(\int_{\partial\mathfrak{D}_\sigma} |f(z)|^2 dz|\right)^{1/2}.$$

Згідно з лемою 2 [1], функція $f(\omega) = \omega^{m-1}e^{\lambda\omega}, m \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}_+$, є розв'язком рівняння

$$\int_{\partial\mathfrak{D}_\sigma} f(\omega+\tau)g(\omega)d\omega = 0, \quad \tau \le 0, \quad g \in E_*^2[\mathfrak{D}_\sigma], \tag{1}$$

тоді і тільки тоді, коли в точці λ функція

$$G(\omega) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial\mathfrak{D}_\sigma} g(z)e^{z\omega}dz.$$

має нуль порядку k≥m.

Б. Винницький довів прямим методом [1], що для $g(\omega) = \frac{1}{\omega-\omega_1}\omega_1 \in \mathfrak{D}_\sigma$, рівняння (1) має тільки нульовий розв'язок. Однак сума двох таких функцій g_1, g_2 для яких рівняння згортки має тільки нульовий розв'язок, не обов'язково є функцією, що володіє тією ж властивістю. Нашим завданням є отримання методів виявлення наявності розв'язків рівняння (1) для функцій g, що визначаються скінченною кількістю полюсів у півсмуговій області.

3. Основні результати

У нашій роботі розглядаються функції g, що визначаються двома полюсами в області $\mathfrak{D}_\sigma$. Розглянемо різні випадки взаєморозміщення цих полюсів. Отримано наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $g(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}$, *де* $\omega_1 \ne \omega_2$ *і* $\omega_1 - \omega_2 \in \mathbb{R}, \omega_1 \in \mathfrak{D}_\sigma$, $\omega_2 \in \mathfrak{D}_\sigma$. *Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок* $f \equiv 0$.

Доведення. Нехай $g(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}$, $\omega_1 \ne \omega_2$, $\omega_1 \in \mathfrak{D}_\sigma, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Для того, щоб знайти розв'язки рівняння (1), розкладемо функцію $g(\omega)$ на елементарні дроби:

$$g(\omega)=\frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}=\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)}-\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)}$$

Підставимо значення функції $g(\omega)$ у ліву частину рівняння (1):

$$\int_{\partial\mathrm{D}_\sigma} f(\omega+\tau)\left(\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)}-\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)}\right)d\omega=0$$

Тоді

$$\int_{\partial\mathrm{D}_\sigma}\frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)}-\frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)}d\omega=0.$$

Звідси ми отримаємо

$$\frac{1}{\omega_1-\omega_2}\int_{\partial\mathrm{D}_\sigma}\frac{f(\omega+\tau)}{(\omega-\omega_1)}-\frac{f(\omega+\tau)}{(\omega-\omega_2)}d\omega=0.$$

За інтегральною формулою Коші для півсмуги [2]

$$\int_{\partial\mathrm{D}_\sigma}\frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)}-\frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)}d\omega=$$

$$=\frac{2\pi i}{\omega_2-\omega_1}\cdot(2\pi i(f(\omega_1+\tau)-f(\omega_2+\tau))$$

Отже, отримаємо наступну рівність

$$\frac{2\pi i}{\omega_2-\omega_1}\cdot(2\pi i(f(\omega_1+\tau)-f(\omega_2+\tau))\equiv 0, \forall\tau\le 0.$$

Звідси випливає, що $f(\omega_1+\tau)\equiv f(\omega_2+\tau), \forall\tau\le 0$.

Нехай $\tau=0$. Тоді отримаємо, що, $f(\omega_1)=f(\omega_2)$. Отже, можна зробити висновок, що при довільних $\tau\le 0$ також значення $f(\omega_1+\tau)$ і $f(\omega_2+\tau)$ співпадають.

Введемо нове позначення

$$\widetilde{f_1}(\tau)=f(\omega_1+\tau);$$

Тоді

$$f(\omega_2+\tau)=f\big(\omega_1+(\omega_2-\omega_1+\tau)\big)=\widetilde{f_1}(\omega_2-\omega_1+\tau)$$

Звідси

$$\widetilde{f_1}(\tau)\equiv\widetilde{f_1}(\omega_2-\omega_1+\tau).$$

Це означає, що функція f періодична з періодом $(\omega_2-\omega_1)$.

Якщо $(\omega_2-\omega_1)$ – дійсне число, то функція f – періодична з цим дійсним періодом. Доведемо, що оскільки f належить $E^2[\mathrm{D}_\sigma]$, то $f\equiv 0$.

Справді, $\widetilde{f_1}$ є періодичною функцією. Припустимо, що вона тотожно не дорівнює нулю. Тоді

$$\int_{\gamma_1}|\widetilde{f_1}(\omega)|^2 d\omega=\beta,\qquad \beta>0,\qquad \gamma_1=[\omega_1;\omega_2]$$

Розглянемо нескінченний промінь $[-\infty+Im(\omega_2);\omega_2]$, що складається з нескінченної кількості відрізків довжини $\ddot{\omega}=\omega_2-\omega_1$, тоді інтеграл $\int_{\gamma_1}|\widetilde{f_1}(\omega)|^2 d\omega=\beta,\quad \beta>0,\quad \gamma_1=[\omega_1;\omega_2]$ дорівнює сумі інтегралів по відрізках $\ddot{\omega}$. Оскільки на кожному з цих відрізків $\int_{\gamma_1}|\widetilde{f_1}(\omega|^2 d\omega=\beta,\ \beta>0$, що означає, що сума нескінченної кількості інтегралів буде нескінченною. Ми отримали суперечність.

Це означає, що якщо функція f – періодична з дійсним періодом і належить $E^2[\mathrm{D}_\sigma]$, то $f\equiv 0$.

Теорему доведено.

З доведення теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок. *Якщо $f\in E^2[\mathrm{D}_\sigma]$ і є періодичною, то звідси випливає, що $f\equiv 0$.*

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_1 = \omega_2,\ \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Тоді

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2}$$

Теорема 2. *Нехай* $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^n}, n \in \mathbb{N},$ *тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок* $f \equiv 0$.

Доведення. За інтегральною формулою Коші для півсмуги [2] виконується формула

$$\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega+\tau)}{\omega-\omega_1} d\omega = 2\pi i f(\omega_1 + \tau) \tag{2}$$

і функція в правій частині останньої рівності аналітична відносно ω_1.

Продиференціювавши рівність (2) по $\omega_1 \in D_\sigma$, отримаємо

$$\left(\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega\right)'_{\omega_1} = (2\pi i f(\omega_1 + \tau))'$$

$$\int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega-\omega_1}\right)'_{\omega_1} d\omega = f'(\omega_1 + \tau),$$

бо

$$\left(\frac{1}{\omega-\omega_1}\right)'_{\omega_1} = \frac{1}{(\omega-\omega_1)^2}\,.$$

Повторивши диференціювання $n - 1$ разів, отримаємо рівність

$$n \int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1}\right)^{(n+1)}_{\omega_1} d\omega = f^{(n)}(\omega_1 + \tau).$$

Тоді

$$f^{(n-1)}(\omega_1 + \tau) = c_1;$$

$$f^{(n-2)}(\omega_1 + \tau) = \int_{\partial D_\sigma} f^{(n-2)}\,(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1}\right)^{(n+1)}_{\omega_1} d\omega = c_1 x + c_2;$$

Остаточно отримаємо

$$f\quad(\omega_1 + \tau) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_n, \tag{3}$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – сталі.

Оскільки (3) є многочленом, що є необмеженою функцією в $\mathcal{D}_\sigma$, то $f\quad(\omega_1 + \tau) \neq c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_n$.

Ця суперечність доводить, що

$$f\quad(\omega_1 + \tau) \notin E^2[\mathcal{D}_\sigma].$$

Звідси

$$f \quad (\omega_1 + \tau) \equiv 0, \forall \tau \leq 0.$$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_1 - \omega_1 \notin \mathbb{R}$.

Нам відомо, що $\widetilde{f_1}(\tau) = \widetilde{f_1}(\omega_2 - \omega_1 + \tau) = \widetilde{f_1}(2\omega_2 - 2\omega_1 + \tau)$, де $(\omega_2 - \omega_1)$ – період функції $\widetilde{f_1}$ як функції аргумента $\tau < 0$. Використавши дану періодичність, отримаємо, що $\widetilde{f_1}$ існує за межами D_σ і буде визначена в нескінченних трапеціях T_1, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) > 0$ та T_2, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) < 0$.

Сформулюємо ці означення точніше. Трапеція T_1 визначається множиною таких точок ω, що $\arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)$. Тобто,

$$T_1 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$$

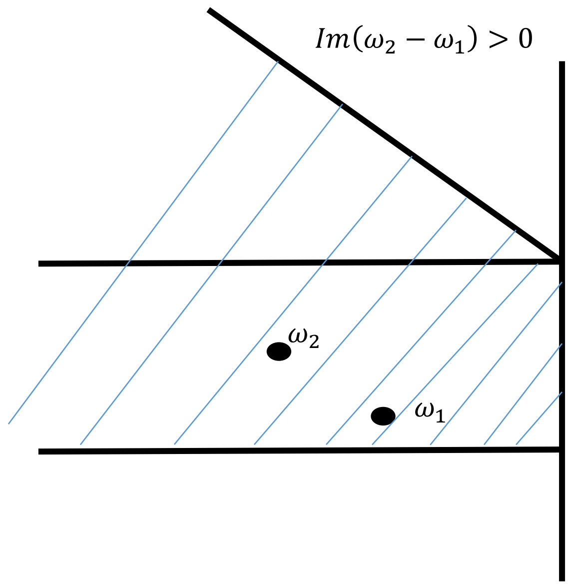


Рис.1

Приклад. Нехай $T_1 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$,

де $\omega_1 = -\sigma$, $\omega_2 = \frac{i\sigma}{2} - 2\sigma$. *Тоді* $\omega_2 - \omega_1 = \frac{i\sigma}{2} - 2\sigma - (-\sigma) = \frac{i\sigma}{2} + \sigma$

$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \varphi$, *де*

$$\varphi = \begin{cases} \cos\varphi = \frac{-\sigma}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{\sigma/2}{|z|} \end{cases}, \varphi \epsilon [0; 2\pi]$$

Оскільки $z = \frac{i\sigma}{2} + \sigma$, $|z| = \frac{\sigma\sqrt{5}}{2}$, то

$$\varphi = \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Отже,

$$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Тоді

$$T_1 = \left\{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, arg\,(\omega - i\sigma) < \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Аналогічно, трапеція T_2 можна визначити як множину таких точок ω, що $\arg(\omega + i\sigma) > \arg\,(\omega_2 - \omega_1)$. Тобто,

$$T_2 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) < \sigma, \arg(\omega + i\sigma) > \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$$

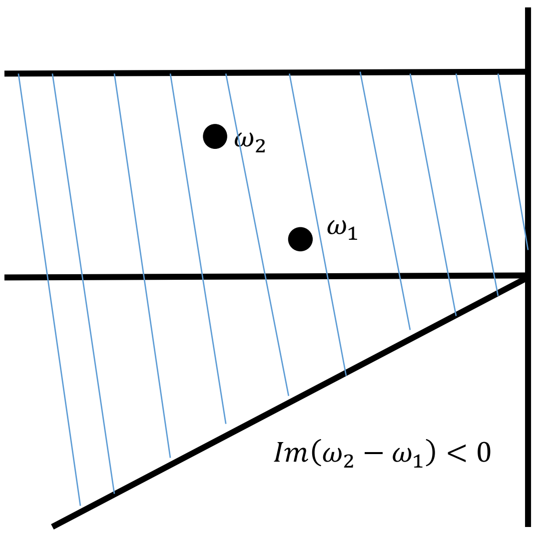


Рис.2

З вищенаведених міркувань випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо f є розв'язком рівняння (1), де $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$, $\omega_1 - \omega_1 \notin \mathbb{R}$, то функція f є аналітичною в нескінченній трапеціях T_1, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) > 0$ та T_2, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) < 0$ а також періодичною на кожному промені $L_s = \{\omega: arg(\omega - is) = arg(\omega_2 - \omega_1), s\epsilon[0;\sigma)\}$*

Висновки. У нашому дослідженні розглядається рівняння згортки в кутових областях комплексної площини. Отримано пряме доведення існування лише нульового розв'язку, якщо породжуюча функція g визначається двома полюсами, що містяться у півсмузі. Розроблена методика може бути використана для проведення спектрального синтезу просторів Гарді, ідентифікації сигналів за допомогою тестових функцій.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи'.

Список використаних джерел

1. Винницький Б.В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичих у пів смузі. *Математичні Студії*. 1995. Т.7, №1. С. 41-50.
2. Винницький Б.В. On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents. *Український математичний журнал*. 1994. Т.46, № 5. С. 492-497. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01058515
3. Дільний В.М. Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування. Дисертація на здоб. ... докт. ф.-м. н, Львів, 2015. 322 с.
4. Nikolskii N. Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. *Mathematical Surveys and Monographs*. 2002. DOI: https://doi.org/10.1090/surv/093
5. Lectures on Analytic Function Spaces and their Applications. 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-33572-3

UDC 517.5

On the existence of solutions of a convolution-type equation in a half-strip

Khrystyna Dumiak, Volodymyr Dilnyi

Abstract. A convolution-type equation for Hardy-type spaces in a half-strip domain of the complex plane is considered. The existence of solutions to this equation is studied when the generating function is defined by two poles. The results are obtained by direct methods. Differences in the behavior of solutions depending on the relative positions of the poles are shown. The developed method can be applied to the analysis of other functional spaces and in information theory for signal identification.

Keywords: convolution equation, Hardy space, analytic function, signal theory.

References

1. Vinnitskii, B.V. (1995). *On the Solutions of the Homogeneous Convolution Equation in a Class of Functions Analytic in a Half-Strip*., Matematychni Studii, **7** (1), 41–50. [in Ukrainian]
2. Vinnitskii, B.V. (1994). *On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents*, Ukrainian Mathematical Journal, **46** (5), 514–532. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.1007/BF01058515
3. Dilnyi, V.M. (2015). *Asymptotic and approximation properties of functions of exponential type and their applications*, The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree, Lviv.
4. Nikolskii, N. (2002). *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading*, Mathematical Surveys and Monographs, University of Bordeaux I, Talence. https://doi.org/10.1090/surv/093
5. Lectures on Analytic Function Spaces and their Applications, Editor Javad Mashreghi, Springer Cham, 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-33572-3

Про авторів / About the authors

Христина Дум'як, магістрантка, кафедра математики та економіки, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Khrystyna Dumiak, Master's Student, Department of Mathematics and Economics, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24 Ivan Franko Street, Drohobych, 82100, Ukraine;

Володимир Дільний, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра вищої математики, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

Volodymyr Dilnyi, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv, 79000, Ukraine.

Отримано / Received 01.11.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 206–215.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 206–215.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.9:517.977.2

Асимптотична поведінка розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь з малими параметрами

Мар'яна Ковтонюк[1], Олена Соя[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukmm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7444-1234

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

Анотація. Побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел, досліджено його асимптотичний характер.

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел, має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь, малий параметр, формальний розв'язок, асимптотичний характер розв'язку.

1. Вступ

Диференціальні рівняння та скінченні системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами досліджували відомі українські учені, зокрема С. Фещенко, М. Шкіль [8-9], М. Рашевський [8], А. Самойленко та І. Ключник [7], М. Сотніченко, В. Яковець та М. Стрельніков [10], М. Перестюк, О. Капустян, П. Фекета, Н. Касімова [6]. Для таких рівнянь побудовано формальний розв'язок та встановлено їх асимптотичний характер.

Зчисленні системи диференціальних рівнянь досліджували К. Валєєв [1], О. Жаутиков [2], М. Ковтонюк [3-5], К. Персидський, інші учені-математики.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-04

2. Постановка проблеми

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел, має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Цей результат присвячено асимптотичному розщепленню нескінченної системи лінійних диференціальних рівнянь на зчислену множину скінченних систем диференціальних рівнянь першого порядку. При цьому характеристичне рівняння кожної відщепленої системи має тільки один корінь кратності n, якому відповідає один елементарний дільник тотожної кратності. А для таких систем можна використати методику розв'язування систем диференціальних рівнянь з малим параметром в евклідовому просторі.

Отже, розглянемо систему

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{dt}=A(\tau,\varepsilon,\mu)x(\tau,\varepsilon,\mu), \tag{1}$$

де $\tau=\varepsilon^m\mu^p t$, m і p – цілі додатні числа $(m,p\in N)$, $\varepsilon,\ \mu$ – малі параметри з областей $\varepsilon\in\pi_\varepsilon=\{0<|\varepsilon|\le\varepsilon_0,\ |\arg\varepsilon|\le\alpha\}$, $\mu\in\pi_\mu=\{0<|\mu|\le\mu_0,|\arg\mu|\le\beta\}$, змінна τ належить області $\tau\in\pi_\tau=\{|\tau|\le L\}$ $\varepsilon_0,\ \mu_0,\ L,\ \alpha,\ \beta$ – сталі величини.

$x(\tau,\varepsilon,\mu)$ – нескінченний шуканий вектор, $A(\tau,\varepsilon,\mu)$ – нескінчена матриця, елементи якої обмежені та аналітичні за комплексними змінними τ,ε,μ в області $D=\pi_\tau\times\pi_\varepsilon\times\pi_\mu$.

Припустимо, що матриця $A(\tau,\varepsilon,\mu)$ допускає при $\tau\in\pi_\tau$ і $\mu\in\pi_\mu$ рівномірний асимптотичний розклад

$$A(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau,\mu) \tag{2}$$

при $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon\in\pi_\varepsilon)$. Коефіцієнти $A_s(\tau,\mu)$ $(s=0,1,2,...)$ нехай є обмеженими і аналітичними функціями по τ і μ.

Нехай

$$A(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^t A_r(\tau,\varepsilon) \tag{3}$$

є рівномірним асимптотичним розкладом $A(\tau,\varepsilon,\mu)$ за степенями μ $(\mu\to 0)$ з аналітичними коефіцієнтами $A_r(\tau,\varepsilon)$, $r=0,1,2,...$ за змінними $\tau\in\pi_r$ і $\varepsilon\in\pi_\varepsilon$.

В обох випадках вважаємо, що матриця $A(\tau,\varepsilon,\mu)$ належить простору рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Тоді коефіцієнти $A_r(\tau,\varepsilon)$ допускають асимптотичний розклад

$$A_r(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_{rs}(\tau) \tag{4}$$

при $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon\in\pi_\varepsilon)$.

3. Основні результати

Отже, відносно коефіцієнтів системи (1) припускаємо, що:

1. Матрицю $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ можна подати у вигляді асимптотичного розкладу

$$A_r(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s A_{rs}(\tau) \tag{5}$$

2. Матрицю $A_{00}(\tau)$ можна подати у вигляді

$$A_{00}(\tau) = diag\left\{A_{00}^{(1)}(\tau), A_{00}^{(2)}(\tau), \ldots\right\} \tag{6}$$

де $A_{00}^{(j)}(\tau)$ – клітини Жордана розмірності n з характеристичним числом $\lambda_{00}^{(j)}(\tau)$.

3. Функції $\dfrac{d^n a_k(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{d^n |a_{ki}(\tau, \varepsilon, \mu)|}{d\tau^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ аналітичні й обмежені за змінною $\tau \in \pi_\tau$ у цій області.

4. Для матриці $A_{00}(\tau)$ має місце умова $\lambda_{00}^{(j)}(\tau) \neq \lambda_{00}^{(i)}(\tau)$,

$$\left|\lambda_{00}^{(j)}(\tau) - \lambda_{00}^{(i)}(\tau)\right| \geq d,\ \ \tau \in \pi_\tau, \left(j \neq i,\ i,\ j = 1, 2 \ldots\right).$$

Теорема 1. *Нехай для матриці $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ з нескінченної системи диференціальних рівнянь (1) виконуються умови 1 – 4, тоді дана система має формальний вектор–розв'язок*

$$x(\tau, \varepsilon, \mu) = U(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu) \tag{7}$$

де $U(\tau, \varepsilon, \mu)$ – нескінченна матриця, $h(\tau, \varepsilon, \mu)$ – нескінченний вектор, який можна визначити з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dh(\tau, \varepsilon, \mu)}{dt} = \Omega(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu) \tag{8}$$

в якій $\Omega^{(j)}(\tau, \varepsilon, \mu)$ є квадратними матрицями порядку n.

При цьому припустимо, що матриці $U(\tau, \varepsilon, \mu)$, $\Omega(\tau, \varepsilon, \mu)$ мають аналітичні елементи по τ, ε, μ в D і їх можна подати у вигляді рівномірних асимптотичних розкладів

$$U(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r U_r(\tau, \varepsilon),\ \ U_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_{rs}(\tau) \tag{9}$$

$$\Omega(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \Omega_r(\tau, \varepsilon),\ \ \Omega_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_{rs}(\tau) \tag{10}$$

при $\mu \to 0$, $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \in \pi_\varepsilon, \mu \in \pi_\mu) \forall \tau \in \pi_\tau$.

Доведення теореми полягає в побудові алгоритму, за яким можна знайти невідомі члени розкладів (9) і (10).

Підставимо вектор (7) у систему (1) і врахувавши, що $\dfrac{dx(\tau, \varepsilon, \mu)}{dt} = \dfrac{dx(\tau, \varepsilon, \mu) d\tau}{d\tau} \dfrac{d\tau}{dt} = \varepsilon^m \cdot \mu^p \dfrac{dx(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau}$, отримаємо тотожність

$$\varepsilon^m \mu^p \frac{dU(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} h(\tau, \varepsilon, \mu) + \varepsilon^m \mu^p \frac{dh(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon, \mu) U(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu),$$

або

$$\varepsilon^m \mu^p U(\tau, \varepsilon, \mu) \frac{dh(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = \left(A(\tau, \varepsilon, \mu) U(\tau, \varepsilon, \mu) - \varepsilon^m \mu^p \frac{dU(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} \right) h(\tau, \varepsilon, \mu).$$

Врахуємо тепер умову (8), тоді остання рівність запишеться у вигляді

$$U(\tau, \varepsilon, \mu)\Omega(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu) = \left(A(\tau, \varepsilon, \mu) U(\tau, \varepsilon, \mu) - \varepsilon^m \mu^p \frac{dU(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} \right) h(\tau, \varepsilon, \mu).$$

Припустимо, що в останній тотожності матриці при векторі $h(\tau, \varepsilon, \mu)$ рівні:

$$U(\tau, \varepsilon, \mu)\Omega(\tau, \varepsilon, \mu) = \left(A(\tau, \varepsilon, \mu) U(\tau, \varepsilon, \mu) - \varepsilon^m \mu^p \frac{dU(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} \right)$$

або

$$\varepsilon^m \mu^p \frac{dU(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon, \mu) U(\tau, \varepsilon, \mu) - U(\tau, \varepsilon, \mu)\Omega(\tau, \varepsilon, \mu) \tag{11}$$

В останньому співвідношенні прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра μ, прийдемо до рекурентних формул вигляду:

$$\mu^0 : A_0(\tau, \varepsilon) U_0(\tau, \varepsilon) - U_0(\tau, \varepsilon)\Omega(\tau, \varepsilon) = 0 \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \mu^r : A_0(\tau, \varepsilon) U_r(\tau, \varepsilon) - U_r(\tau, \varepsilon)\Omega(\tau, \varepsilon) = U_0(\tau, \varepsilon)\Omega_r(\tau, \varepsilon) - \\ - \sum_{j=1}^{r} A_j(\tau, \varepsilon) U_{r-j}(\tau, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{r-1} U_j(\tau, \varepsilon)\Omega_{r-j}(\tau, \varepsilon) \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \mu^r : A_0(\tau, \varepsilon) U_r(\tau, \varepsilon) = U_r(\tau, \varepsilon)\Omega_0(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{r-1} U_j(\tau, \varepsilon)\Omega_{rj}(\tau, \varepsilon) - \\ - \sum_{j=1}^{r} A_j(\tau, \varepsilon) U_{r-j}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^m \frac{dU_{r-p}(\tau, \varepsilon)}{d\tau}. \end{gathered} \tag{14}$$

Тепер у рівняннях (12) – (14) будемо $(r \ge p)$ прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε.

Зокрема, з рівняння (12) отримаємо:

$$\varepsilon^0 : A_{00}(\tau) U_{00}(\tau) - U_{00}(\tau)\Omega_{00}(\tau) = 0. \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon^s : A_{00}(\tau) U_{0s}(\tau) - U_{0s}(\tau)\Omega_{00}(\tau) = U_{00}(\tau)\Omega_{0s}(\tau) + \\ + \sum_{j=1}^{s-1} U_{0i}(\tau)\Omega_{0,s-i}(\tau) - \sum_{i=1}^{s} A_{0i}(\tau) U_{0,s-i}(\tau) \qquad i = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{16}$$

У рівнянні (14) покладемо $\Omega_{00}(\tau) = A_{00}(\tau)$. Тоді матрицю $U_{00}(\tau)$ можна взяти рівною нескінченній одиничній матриці, тобто $U_{00}(\tau) = E_\infty$.

Запишемо $U_{0s}(\tau)$ і $A_{0s}(\tau)$ у вигляді блочних матриць, відповідно до структури матриць $\Omega_{0s}(\tau)$, $s = 0, 1, 2, ..., k$

$$U_{0s}(\tau) = \begin{pmatrix} U_{0s,11}(\tau) & U_{0s,12}(\tau) \\ U_{0s,21}(\tau) & U_{0s,22}(\tau) \\ U_{0s,31}(\tau) & U_{0s,32}(\tau) \end{pmatrix}, \quad A_{0s}(\tau) = \begin{pmatrix} A_{0s,11}(\tau) & A_{0s,12}(\tau) \\ A_{0s,21}(\tau) & A_{0s,22}(\tau) \\ A_{0s,31}(\tau) & A_{0s,32}(\tau) \end{pmatrix},$$

де $U_{0s,ij}(\tau)\left\|u_{0s,ij}^{kl}(\tau)\right\|_{k,l=1}^{n}$, $A_{0s,ij}(\tau)=\left\|a_{0s,ij}^{kl}(\tau)\right\|_{k,l=1}^{n}$, $j=1,2$ – квадратні матриці розмірів $n\times n$.

У цьому випадку, використовуючи правило множення блочних матриць, рівняння (16) можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}U_{0s,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(j)}(\tau)-\Omega_{00}^{(j)}(\tau)U_{0s,ij}(\tau)=\Omega_{0s}(\tau)+\\+\sum_{i=1}^{s-1}U_{0i}(\tau)\Omega_{0s-1}^{(j)}(\tau)-\sum_{l=1}^{s}A_{0l,ij}(\tau)\cdot U_{0s-1,ij}(\tau),\end{gathered}\tag{17}$$

причому, вказана матрична система рівнянь розглядається уже в евклідовому просторі.

Нехай $i=j$, при цьому останню систему рівнянь можна подати у вигляді

$$U_{0s,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(j)}(\tau)-\Omega_{00}^{(j)}(\tau)U_{0s,ij}(\tau)=\Omega_{01}^{(j)}(\tau)-A_{01,ij}(\tau),\quad i=1,2,...\tag{18}$$

Покладемо $U_{01,ij}(\tau)=0$, тоді для матриць $\Omega_{01}^{(i)}(\tau)$ отримаємо такий вираз:

$$\Omega_{01}^{(i)}(\tau)=A_{01,ij}(\tau)\ \text{або}\ \Omega_{01}^{(i)}(\tau)=\left\{A_{01,ij}(\tau);\,A_{01,22}(\tau);\,A_{01,33}(\tau);\,...\right\}$$

Нехай $i\neq j$. Тоді систему рівнянь (17) можна записати так:

$$U_{01,ij}\Omega_{00}^{(j)}(\tau)-\Omega_{00}^{i}(\tau)U_{01,ij}(\tau)=A_{01,ij}(\tau)\tag{19}$$

Неоднорідна матрична система рівнянь (18) внаслідок різних власних значень матриць $\Omega_{00}^{(j)}(\tau)$ і $\Omega_{00}^{(j)}(\tau)$ має єдиний розв'язок. Значить розв'язавши рівняння (18) відносно невідомих матриць $U_{01,ij}(\tau)$, знайдемо невідому матрицю $U_{01}(\tau)$.

Побудовані матриці $\Omega_{01}(\tau)$ і $U_{01}(\tau)$ в силу їх побудови й умов 1 – 2 теореми 1 є аналітичними за змінною τ, причому нескінченна матриця $U_{01}(\tau)$ є обмеженим лінійним оператором у просторі m. Останнє твердження проілюстровано на прикладі, коли розмірність блоку рівна 3 $(n=3)$. У цьому випадку матрична система (19) буде еквівалентна трьом системам неоднорідних рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha U_{01,ij}^{k1}(\tau)-U_{01,ij}^{k+1,1}(\tau)=a_{01,ij}^{k1}(\tau);\\ \alpha U_{01,ij}^{k2}(\tau)+U_{01,ij}^{k1}(\tau)-U_{01,ij}^{k+1,2}(\tau)=a_{01,ij}^{k2}(\tau);\quad k=1,2\\ \alpha U_{01,ij}^{k3}(\tau)+U_{01,ij}^{k2}(\tau)-U_{01,ij}^{k+1,3}(\tau)=a_{01,ij}^{k3}(\tau).\end{cases}\tag{20}$$

$$\begin{cases}\alpha U_{01,ij}^{31}(\tau)=a_{01,ij}^{31}(\tau);\\ \alpha U_{01,ij}^{32}(\tau)+U_{01,ij}^{31}(\tau)=a_{01,ij}^{32}(\tau);\quad k=1,2\\ \alpha U_{01,ij}^{33}(\tau)+U_{01,ij}^{32}(\tau)=a_{01,ij}^{33}(\tau).\end{cases}\tag{21}$$

де $\alpha(\tau)=\lambda_0^{(j)}(\tau)-\lambda_0^{(i)}(\tau),\ i,j=1,2,...,$ починаючи з (21). При цьому, у зв'язку з громіздкими записами, запис аргументів і нижніх індексів будемо опускати. Тоді розв'язки приймають відповідно такий вигляд:

$$U^{31}=\frac{1}{\alpha}a^{31},$$

$$U^{32}=\frac{1}{\alpha}a^{32}-\frac{1}{\alpha^2}a^{31},$$

$$U^{33}=\frac{1}{\alpha}a^{33}-\frac{1}{\alpha^2}a^{32}+\frac{1}{\alpha^3}a^{31},$$

$$U^{21}=\frac{1}{\alpha}a^{21}-\frac{1}{\alpha^2}a^{31},$$
$$U^{22}=\frac{1}{\alpha}a^{22}-\frac{1}{\alpha^2}a^{21}+\frac{1}{\alpha^2}a^{32}+\frac{2}{\alpha^3}a^{31},$$
$$U^{23}=\frac{1}{\alpha}a^{23}-\frac{1}{\alpha^2}a^{22}+\frac{1}{\alpha^2}a^{21}+\frac{1}{\alpha^2}a^{33}-\frac{2}{\alpha^3}a^{32}+\frac{3}{\alpha^4}a^{31},$$
$$U^{11}=\frac{1}{\alpha}a^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a^{31},$$
$$U^{12}=\frac{1}{\alpha}a^{12}-\frac{1}{\alpha^2}a^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a^{22}-\frac{2}{\alpha^3}a^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a^{32}-\frac{3}{\alpha^4}a^{31},$$
$$U^{13}=\frac{1}{\alpha}a^{13}-\frac{1}{\alpha^2}a^{12}+\frac{1}{\alpha^3}a^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a^{23}-\frac{2}{\alpha^3}a^{22}+\frac{3}{\alpha^4}a^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a^{33}-\frac{3}{\alpha^4}a^{32}+\frac{6}{\alpha^5}a^{31},$$

Оцінимо матрицю $U_{01}(\tau)$. Для $j=3t,\ t=1,2,\dots$ маємо

$$U_{01,3t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left|U_{01,3ti}^{3k}\right|=\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right|\left|\alpha_{01,3t1}^{31}\right|+\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right|\cdot\left|a_{01,3t1}^{32}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|\left|a_{3t1}^{33}\right|+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right|\left|a_{01,2t2}^{21}\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|\left|a_{01,3t2}^{32}\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\left|a_{01,3t2}^{33}\right|+\ldots\le\delta\left(\left|a_{01,3t1}^{31}\right|+\left|a_{1,3t1}^{32}\right|+\left|a_{01,3t1}^{33}\right|+\left|a_{01,3t2}^{31}\right|+\left|a_{01,3t2}^{32}\right|+\ldots\right)\le\delta_1\gamma_0,$$

де $\alpha=\lambda_0^{(3)}(\tau)-\lambda_0^{(i)}(\tau),\ i=1,2,\ \delta_1=\max\left\{\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right|,\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|,\left|\frac{1}{a}\right|\right\}.$

Аналогічно для $j=rt,\ r=1,2,\ t=1,2,\dots$ отримаємо оцінки:

$$U_{01,2t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left|U_{01,2ti}^{2k}\right|=\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right|\left|\alpha_{01,2t1}^{21}\right|+\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right|\cdot\left|a_{01,2t+1}^{22}\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\left|a_{01,2t1}^{23}\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\right|\left|a_{01,2t1}^{31}\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\left|a_{01,2t1}^{23}\right|+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}\right|\left|a_{01,2t1}^{31}\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right|\left|a_{01,2t1}^{32}\right|+\left|\frac{1}{a^2}\right|\left|a_{01,2t1}^{33}\right|+\ldots\le 2\delta_2\gamma_0,$$

де $\delta_2=\max\left\{\delta_1;\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}\right|;\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right|;\left|\frac{1}{a^2}\right|\right\},$

$$U_{01,t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left|U_{01,ti}^{1k}\right|\le 3\delta_3\gamma_0;$$
$$\delta_3=\max\left\{\delta_2;\left|\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^4}+\frac{6}{a^5}\right|;\left|\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^4}\right|;\left|\frac{1}{a^3}\right|\right\}.$$

Також можна довести, що матриця $U_{01}(\tau)$ обмежена по стовпцях. Дійсно

$$\sup_i\left\{\left|U_{01,ij}^{31}\right|;\left|U_{01,ij}^{21}\right|;\left|U_{01,ij}^{11}\right|\right\}=$$
$$=\sup_i\left\{\left|\frac{1}{\alpha}\alpha_{01,ij}^{31}\right|;\left|\frac{1}{\alpha}a_{01,ij}^{21}+\frac{1}{\alpha^2}a_{01,ij}^{31}\right|;\left|\frac{1}{\alpha}a_{01,ij}^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a_{01,ij}^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a_{01,ij}^{31}\right|\right\}\le$$
$$\le\sup_i\left|\frac{1}{\alpha}\right|\left\{\left|a_{01,ij}^{31}\right|,\left|a_{01,ij}^{21}\right|;\left|a_{01,ij}^{11}\right|\right\}+\sup_i\frac{1}{\left|\alpha^2\right|}\left\{\left|a_{01,ij}^{31}\right|;\left|a_{01,ij}^{21}\right|\right\}+$$

$$+\sup_i\left|\frac{1}{\alpha^3}\right|\left\{\left|a_{01,ij}^{31}\right|\right\}\le\left(\left|\frac{1}{\alpha}\right|+\left|\frac{1}{\alpha^2}\right|+\left|\frac{1}{\alpha^3}\right|\right)\delta_j,\ \forall j=1,2,...$$

Нехай у рівняннях (17) індекс $s=2$:

$$U_{02}(\tau)\Omega_{00}(\tau)-\Omega_{00}(\tau)U_{02}(\tau)=-\Omega_{02}(\tau)-U_{01}(\tau)\Omega_{01}(\tau)+A_{01}(\tau)U_{01}(\tau)+A_{02}(\tau),$$

або, використовуючи блочний вигляд матриць $U_{02}(\tau)$ і $\Omega_{02}(\tau)$, останнє рівняння записуємо у вигляді:

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(i)}(\tau)-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau)=-\delta_{ij}\Omega_{02}^{(i)}(\tau)-U_{01,ij}(\tau)\Omega_{01}^{(j)}(\tau)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,kj}(\tau)+A_{02,ij}(\tau) \tag{22}$$

Нехай у рівняннях (22) $i=j$:

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(i)}(\tau)-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau)=-\Omega_{02}^{(i)}(\tau+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,kj}(\tau)+A_{02,ij}(\tau).$$

Покладемо $U_{02,ij}(\tau)\equiv 0$, тоді

$$\Omega_{02}^{(i)}(\tau)=A_{02,ij}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,ki}(\tau) \tag{23}$$

Отже, матриця $\Omega_{02}(\tau)$ визначена. Матриця $\Omega_{02}(\tau)$ є обмеженим лінійним оператором у просторі m одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей, оскільки, згідно з умовами 1 – 3 теореми 1, маємо

$$\left\|A_{02}(\tau)\right\|=\sup_i\left\{\left\|A_{02,ij}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}U_{01,ki}(\tau)\right\|\right\}\le\gamma_0+r_q\gamma_0=\left(1+r_q\right)\gamma_0,$$

де $r_q=\sup_i\max\left|U_{02,ki}(\tau)\right|$.

З рівнянь (22) випливає, що

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(i)}(\tau)-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau)=-U_{01,ij}(\tau)(\tau+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,kj}(\tau)+A_{02,ij}(\tau). \tag{24}$$

Це неоднорідна матрична система в евклідовому просторі.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,ki}(\tau)$ збіжний в силу умов 1 – 3 теореми 1 і обмеженості по стовпцях матриці $U_{01}(\tau)$ (за побудовою). Дійсно,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}U_{01,ki}(\tau)\right\|\le\gamma_q\sum\left\|A_{01,jk}(\tau)\right\|\le r_q\gamma_0.$$

Крім того, цей ряд в силу тих же умов є і нескінченне число разів диференційовним за змінною $\tau\in\left[0;L\right]$. Отже, аналогічно як для системи (17) – (18), можна знайти єдиний розв'язок $U_{02,ij}(\tau)$ системи (24) і визначити матрицю $U_{02}(\tau)$; причому матриці $U_{02}(\tau)$ і $\Omega_{02}(\tau)$ необмежено диференційовні за змінною τ і $U_{02}(\tau)$ є лінійним обмеженим оператором у просторі m.

Рівняння (17) при $s>2$ розв'язуємо аналогічно за тільки що описаною методикою. При цьому у лівій частині рівностей стоять вирази

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(j)}-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau),\ i,\ j=1,2,... \tag{25}$$

а у правій

$$-\delta_y \Omega_{02}^{(i)}(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} U_{0k,ij}(\tau)\Omega_{0s-k}^{(j)}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k,ij}(\tau)U_{0s-1,ij}(\tau),\ i, j = 1, 2, ... \qquad (26)$$

Матриці, що стоять у (26), визначаються на попередніх кроках, при цьому кожний раз встановлюється необмежена диференційовність їх елементів за змінною $\tau \in [0; L]$, а також в силу умов теореми показується рівномірна збіжність рядів вигляду

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k,ij}(\tau)U_{0l-1,ij}(\tau),\ i, j = 1, 2, ...$$

і виконання для матриць $U_{0s}(\tau)$ умов (9), а також обмеженості по стовпцях.

Тому система рівнянь (17) $s > 2$ завжди має єдиний розв'язок $U_{0s}(\tau)$, $\Omega_{0s}(\tau)$, який є необмежено диференційовним за змінною τ, матриці $U_{0s}(\tau)$ обмежені по стовпцях і задовольняють умову (7).

Описана тут схема побудови і розв'язку показує, як можна знайти елементи формальних розкладів (12) – (14), тобто матриці $U_r(\tau),\ \Omega_r(\tau),\ r = 0, 1, 2, ...$

На завершення сформулюємо теорему, яка вказує на асимптотичний характер формального розщеплення.

Теорема 2. *Нехай для системи диференціальних рівнянь виконуються умови теореми 1 і* $\mathrm{Re}\lambda_j(\tau) < r\ \ \forall r \in \pi_r$, *і нехай* $x_p(\tau, \varepsilon, \mu)$ – p *- наближений розв'язок, який отримуємо шляхом обривання рядів (10), (11) на* p *- му члені.*

Тоді існує стала C *, яка не залежить від* ε *і* μ *, що для всіх* $\tau \in \pi_\tau$, $\varepsilon \in \pi_\varepsilon$, $\mu \in \pi_\mu$ *виконується нерівність*

$$\left\| x(\tau, \varepsilon, \mu) - x_p(\tau, \varepsilon, \mu) \right\| \le \left(|\varepsilon|^p + |\mu|^p \right) \cdot C.$$

Висновки. Авторами статті визначено умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами вигляду (1) має розв'язок; побудовано формальний розв'язок такої системи у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел; встановлено асимптотичний характер побудованих розв'язків.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у вивченні розв'язків системи вигляду (1), коли головна матриця є нескінченною клітиною Жордана або інші випадки дискретного спектру.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Valeev K. G., Zhautikov O. A. Infinite systems of differential equations. Alma-Ata: Nauka, 1974. 413 p.
2. Жаутиков О. С Розв'язок крайової задачі для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*. 1960. Т. 12. С. 157–164.
3. Ковтонюк М. М. Асимптотична поведінка розв'язку однієї нескінченної системи лінійних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*, 1983, Т. 35. С. 630–636.
4. Ковтонюк М.М. Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика: колективна монографія / за заг. ред. М. М. Ковтонюк, С. М. Бака. Вінниця: ВНТУ, 2023. С. 54–79. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811

5. Ковтонюк Мар’яна, Соя Олена. Дослідження розв’язків зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*, Вип. 2 (1), с. 24–36. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02
6. Перестюк М. О, Капустян О. В., Фекета П. В, Касімова Н. В. Асимптотичні властивості розв’язків диференціальних рівнянь: навч.посіб. Київ: Київський університет, 2015. 125 с.
7. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. *Нелінійні коливання.* 2009. Т. 12, № 2. С. 208–234.
8. Шкіль М. І., Рашевський М. О. Асимптотичне інтегрування лінійних систем другого порядку з нестабільним спектром. Доповіді НАН України. 2002. № 3. С. 39–43.
9. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. Київ: Вища школа, 1971. 226 с.
10. Яковець В. П., Стрельніков М. А. Побудова асимптотичних розв’язків лінійних систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. *Український математичний журнал*. 2003. Т. 55. № 7. С. 961–976.

UDC 517.9:517.977.2

Asymptotic behavior of solutions of a countable system of linear differential equations with small parameters

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia

Abstract. A formal solution has been constructed for a countable system of first-order differential equations with two small parameters in the case where the principal matrix consists of Jordan blocks of equal dimension with distinct characteristic numbers. The asymptotic behavior of this solution has been investigated.

The aim of the article is to determine the conditions under which a countable system of first-order linear differential equations with two small parameters, in the case where the principal matrix consists of Jordan blocks of equal dimension and distinct characteristic numbers, admits a solution; to construct a formal solution; and to prove its asymptotic behavior.

Keywords: computable systems of differential equations, small parameter, formal solution, asymptotic behavior of the solution.

References

1. Valeev K. G., Zhautikov O. A. (1974). Infinite systems of differential equations. Nauka. Alma-Ata 1974. 413 p.
2. Zhautikov O. S. (1960). *Solution of the boundary value problem for an infinite system of ordinary differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **12**, 157–164.
3. Kovtoniuk M. M. (1983). *The asymptotic behavior of the solution of an infinite system of linear differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **35**, 630–636.
4. Kovtoniuk M. M. (2023). *Asymptotic solutions of a countable system of differential equations with two small parameters*, Problems of Mathematics and Computer Science in Pedagogical Institutions of Higher Education: Theory and Practice: A Collective Monograph, VNTU, Vinnytsia, 54–79. [in Ukrainian]. https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811
5. Kovtoniuk Mariana, Soia Olena. (2025). *Investigation of solutions of the countable system of second-order differential equations with small parameter of fractional rank*. Math. Inf. Phys. Sc. Ed. **2** (1), 24–36 [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02
6. Perestiuk M. O, Kapustian O. V., Feketa P. V, Kasimova N. V. (2015). Asymptotic Properties of Solutions to Differential Equations: A Textbook. Kyivskyi universytet. Kyiv. 125 p. [in Ukrainian]
7. Samoilenko A. M., Kliuchnyk I. H. (2009). *On the Asymptotic Integration of a Linear System of Differential Equations with a Small Parameter in Some of the Derivatives*. Neliniini kolyvannia. **12** (2), 208–234. [in Ukrainian]
8. Shkil M. I., Rashevskyi M. O. (2002). *Asymptotic integration of second-order linear systems with an unstable spectrum*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, **3**, 39–43. [in Ukrainian]
9. Shkil M. I. (1971). *Asymptotic Methods in Differential Equations*, Vyshcha shkola, Kyiv. [in Ukrainian]
10. Iakovets V. P., Strelnikov M. A. (2003). *Construction of Asymptotic Solutions to Linear Systems of Differential Equations with Two Small Parameters*, Ukrainian Mathematical Journal. **55** (7), 961–976.

Про авторів / About the authors

Мар'яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Sciences in Pedagogy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Sciences in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 24.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 12.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 216–224.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 216–224.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.5

Про зображення функцій у вагових просторах Гарді в крузі

Оксана Косолович[1], Марія Кучма[2], Володимир Дільний[3]

[1]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математики та економіки, м. Дрогобич, Україна
oksana.kosolovych@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0005-2070-5950

[2]Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
maria.i.kuchma@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0002-5563-3847

[3]Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8208-7960

Анотація. У даній статті розглядаються вагові простори Гарді в одиничному крузі. Розглянуто одноточкові та двоточкові експоненційні ваги. Отримано результати про зображення у цих просторах.

Ключові слова: простір Гарді, одиничний круг, аналітичні функції, одноточкова вага, експоненційна вага, нерівність Коші–Буняковського, аналог формули Коші.

1. Вступ

Простори Гарді займають важливе місце у комплексному та функціональному аналізі. Також теорія цих просторів активно використовується в економічних дослідженнях, квантовій механіці та інших галузях науки. Класичними областями, у яких вивчаються простори Гарді, є круг та півплощина. Природним узагальненням просторів Гарді є вагові простори. Степеневі ваги досліджувалися з початку другої половини 20-го століття. Переважно властивості цих просторів повторювали властивості класичних просторів. Б. В. Винницький та його учні досліджували [1, 6] вагові простори Гарді у півплощині з експоненційною вагою. Однак для застосувань, особливо в функціональному аналізі, зручніше працювати з просторами Гарді в крузі. Ми будемо розглядати випадок одиничного круга. Дослідження останніх років В. Росса, Дж Машрегі, А. Гарсії [2, 3, 5] та інших математиків відновили інтерес до властивостей просторів Гарді. Проте багато якісно нових результатів Б. В. Винницького та його

-

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-05

співробітників не мають аналогів для одиничного круга [4]. Цим питанням присвячено наше дослідження.

2. Постановка проблеми

Означення 1 [1, 3]. Нехай $H^p(\mathbb{D}), 1 \le p < +\infty$, простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ функцій f для яких:

$$\|f\|^p := \sup_{r\epsilon(0;1)} \left\{\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p d\varphi\right\} < +\infty.$$

Функції з цього простору мають майже скрізь на межі круга недотичні граничні значення і $f\epsilon\ L^p(\partial\mathbb{D})$. Простір $H^p(\mathbb{D})$ можна означити не тільки через інтегрування за концентричними колами, як в означенні 1, але і за іншими сім'ями кривих.

Для означення аналогу цього простору розглянемо частину дуги кола із центром в точці ib , $b\ \epsilon\ (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ та радіусом $\sqrt{1+b^2}$, складемо рівняння цього кола в прямокутних декартових координатах

$$x^2 + (y-b)^2 = 1 + b^2.$$

Записавши його у полярній системі координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

отримаємо рівняння

$$\rho_1 = \frac{2b \sin\varphi + \sqrt{4(b^2 \sin^2 \varphi + 1)}}{2} = b \sin\varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1},$$

$$\rho_2 = \frac{2b \sin\varphi - \sqrt{4(b^2 \sin^2 \varphi + 1)}}{2} = b \sin\varphi - \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}.$$

Останній розв'язок є стороннім, тому що є від'ємним.

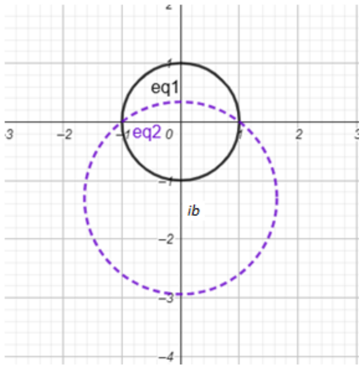
Отже, $\rho(\varphi) = b \sin\varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}$.

Означення 2 [4]. Нехай $\widehat{H}^p(\mathbb{D}, \alpha), 1 < p < +\infty, 0 \le \alpha < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$||f||:= \sup_{b<-1} \left\{\int_0^{\pi} \left|f\big(\rho(\varphi)e^{i\varphi}\big)\right|^p \left|d\big(\rho(\varphi)e^{i\varphi}\big)\right|, \rho(\varphi) = b \sin\varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}\ \right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \sup_{b>1} \left\{\int_{-\pi}^{0} \left|f\big(\rho(\varphi)e^{i\varphi}\big)\right|^p \left|d\big(\rho(\varphi)e^{i\varphi}\big)\right|, \rho(\varphi) = b \sin\varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

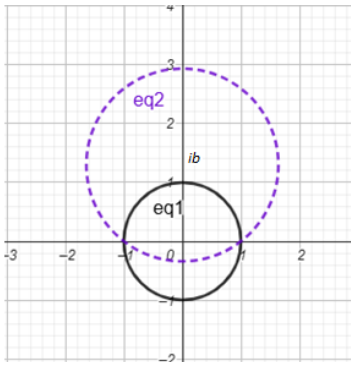
Як випливає з результатів А. М. Седлецького та [1], означення 1 і 2 є еквівалентними.

Надалі для спрощення записів ми будемо використовувати позначення ρ замість $\rho(\varphi)$, якщо це не викликатиме непорозумінь.



Якщо $b < -1$

Рис.1



Якщо $b > 1$

Рис.2

Розглянемо ваговий простір Гарді для одноточкової ваги, що визначається інтегруванням по дугам кіл.

Означення 3. Нехай $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha), 1 < p < +\infty, \sigma \geq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi,$ простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$||f||:= \sup_{b<-1} \left\{\int_0^\pi \left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p \left\{e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}}\right\} \left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|,\ \rho = b\sin\varphi + \sqrt{b^2\sin^2\varphi+1}\ \right\}^{\frac{1}{p}} + +\sup_{b>1}\left\{\int_{-\pi}^0 \left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p \left\{e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}}\right\} \left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|, \rho = b\sin\varphi + \sqrt{b^2\sin^2\varphi+1}\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Розглянемо також ваговий простір Гарді з двоточковою вагою в точках $e^{i\alpha_1}$ та $e^{i\alpha_2}$.

Означення 4. Нехай $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1,\alpha_2), 1 < p < +\infty, \sigma \geq 0,$ простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$||f||:= \sup_{b<-1} \left\{\int_0^\pi \left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p \left\{e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\right\} \left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|, \rho = b\sin\varphi +$$

$$+\sqrt{b^2\sin^2\varphi+1}\ \Bigg\}^{\frac{1}{p}} + \sup_{b>1}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p\left\{e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\right\}\left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|,\ \rho=\right.$$

$$\left. b\sin\varphi+ +\sqrt{b^2\sin^2\varphi+1}\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Означення 5. Позначимо через $L^\infty(0;+\infty)$ множину всіх вимірних функцій, для яких

$$essup\{|f(x)|: x\ \in (0;+\infty)\} < +\infty.$$

Означення 6. Нехай $\widehat{H}^\infty_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1,\alpha_2)$, $\sigma\ge 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, що

$$essup\left\{\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}: \rho e^{i\varphi}\in\mathbb{D}\right\} < +\infty.$$

Розглянемо також простір з двоточковою незрівноваженою вагою.

Означення 7 [5]. Нехай $\widehat{H}^p_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbb{D},\alpha_1,\alpha_2), 1<p<+\infty, \sigma\ge 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ функцій, що $||f||:=$

$$\sup_{b<-1}\left\{\int_0^\pi\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p\left\{e^{-p\left(\frac{2\rho\sigma_1|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho\sigma_2|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\right\}\left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|, \rho=b\sin\varphi+\right.$$

$$+\sqrt{b^2\sin^2\varphi+1}\ \Bigg\}^{\frac{1}{p}} \quad +\sup_{b>1}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p\left\{e^{-p\left(\frac{2\rho\sigma_1|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho\sigma_2|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\right\}\left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|,\ \rho=\right.$$

$$\left.=\sin\varphi+\sqrt{b^2\sin^2\varphi+1}\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Всі вище наведені простори мають майже скрізь на межі недотичні граничні значення.

3. Основні результати

В цьому розділі дослідимо структуру вагових просторів Гарді.

Лема 1. Якщо $f_1\in\ \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1)$ та $f_2\in\ \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_2)$, де $p\ge 1,\sigma>0$, то

$$f=f_1+f_2\in\ \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1,\alpha_2).$$

Доведення. За умовою леми нам дано, що $f_1\in\ \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1)$,

$f_2\in\ \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_2), f(z)=f_1(z)+f_2(z)=f_1\left(\rho e^{i\varphi}\right)+f_2\left(\rho e^{i\varphi}\right)$.

Розглянемо інтеграл по деякому спрямлюваному контуру γ, що лежить в $\mathbb{D}$

$$\int_\gamma\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right| = \int_\gamma\left|f_1\left(\rho e^{i\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+f_2\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right| \qquad (1)$$

Тоді отримаємо

$$\left(\int_\gamma \left|f_1(\rho e^{i\varphi})+f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p\cdot e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\int_\gamma \left|f_1(\rho e^{i\varphi})e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+f_2(\rho e^{i\varphi})e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\right|^p\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Використаємо нерівність Мінковського у вигляді

$$\left(\int_L|f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_L|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_L|g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

Тоді

$$\left(\int_\gamma\left|f_1(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int_\gamma\left|f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зауважимо, що виконується нерівність

$$e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_j)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_j)+\rho^2}}\leq 1\,,$$

для всіх $\rho>0, r\in[0;2\pi]$, для кожного $j\in\{1,2\}$, бо

$$-p\sigma\frac{2\rho\left|\sin(\varphi-\alpha_j)\right|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_j)+\rho^2}<0.$$

Отже,

$$\left(\int_\gamma\left|f_1(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\int_\gamma\left|f_1(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3)$$

Аналогічно для $f_2(\rho e^{i\varphi})$ отримаємо

$$\left(\int_\gamma\left|f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\int_\gamma\left|f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4)$$

Отже, враховуючи нерівності (3) і (4) маємо

$$\left(\int_\gamma \left|f_1\left(\rho e^{i\varphi}\right)+f_2\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}+\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)}\left|d\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\int_\gamma \left|f_1(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_\gamma \left|f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

За означенням простору $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1)$ маємо

$$\left(\int_\gamma \left|f_1(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Аналогічно

$$\left(\int_\gamma \left|f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

З цих нерівностей отримаємо

$$\left(\int_\gamma \left|f_1\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int_\gamma \left|f_2(\rho e^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}}\left|d(\rho e^{i\varphi})\right|\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Тому $f \in \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D},\alpha_1,\alpha_2)$.

Лему доведено.

Подібними міркуваннями можна довести і наступні твердження.

Лема 3. Нехай $f_1 \in H^2_{\sigma_1}(\mathbb{D},\alpha_1), f_2 \in H^2_{\sigma_2}(\mathbb{D},\alpha_1)$, тоді $f_1 \cdot f_2 \in H^1_{\sigma_1+\sigma_2}(\mathbb{D},\alpha_1)$.

Лема 4. Нехай $f_1 \in H^2_{\sigma_1}(\mathbb{D},\alpha_1), f_2 \in H^2_{\sigma_2}(\mathbb{D},\alpha_2), \alpha_1 \neq \alpha_2$ тоді

$$f_1 \cdot f_2 \in H^1_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbb{D},\alpha_1,\alpha_2).$$

Питання про оборотність цих теорем є складним, як показують дослідження вагових просторів Гарді у півплощині. Шляхом до просування в цьому напрямі є наступна теорема.

Теорема(аналог формули Коші). Якщо $f \in H^p_\sigma(\mathbb{D}_+;0)$ то справедливе зображення

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} e^{2i\sigma\frac{e^{i\theta}-z}{\left(1-e^{i\theta}\right)(1-z)}}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} e^{-2i\sigma\frac{e^{i\theta}-z}{\left(1-e^{i\theta}\right)(1-z)}}d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 f(u)\frac{\sin\frac{2\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}{u-z}du, \text{ для } z \in \mathbb{D}\backslash(-1;1),$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}e^{2i\sigma\frac{e^{i\theta}-z}{(1-e^{i\theta})(1-z)}}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}e^{-2i\sigma\frac{e^{i\theta}-z}{(1-e^{i\theta})(1-z)}}d\theta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(u)\frac{2\sigma}{(1-u)(1-z)}du, \text{ для } z\in(-1;1).$$

Доведення. Якщо $f\in H^p_\sigma(\mathbb{D}_+;0)$. Тоді $f(z)e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}}\in H^p(\mathbb{D}_+)$. Застосуємо до цієї функції інтегральну формулу Коші: $f(z)\cdot e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_+}\frac{f(w)}{w-z}\cdot e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}}dw.$

Поділивши обидві частини на $e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}}$, отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_+}\frac{f(w)}{w-z}\cdot e^{i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w}-\frac{z+1}{1-z}\right)}dw=\begin{cases}f(z), z\in\mathbb{D}_+\\ 0, z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}_+\end{cases} \tag{11}$$

Розглянемо $f(z)e^{\frac{-i\sigma(w+1)}{1-w}}\in H^p(\mathbb{D}_-)$. Застосуємо до цієї функції інтегральну формулу Коші

$$f(z)\cdot e^{\frac{-i\sigma(z+1)}{1-z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_-}\frac{f(w)}{w-z}\cdot e^{\frac{-i\sigma(w+1)}{1-w}}dw.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $e^{\frac{-i\sigma(z+1)}{1-z}}$, отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_-}\frac{f(w)}{w-z}\cdot e^{-i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w}-\frac{z+1}{1-z}\right)}dw=\begin{cases}f(z), z\in\mathbb{D}_-\\ 0, z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}_-\end{cases} \tag{12}$$

Додамо формули (11) і (12) отримаємо:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_+}\frac{f(w)}{w-z}\cdot e^{i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w}-\frac{z+1}{1-z}\right)}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_-}\frac{f(w)}{w-z}\cdot e^{-i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w}-\frac{z+1}{1-z}\right)}dw, z\in\mathbb{D}_+\cup\mathbb{D}_-\,.$$

Якщо w належить одиничному колу комплексної площини, позначимо $w=e^{i\theta}$, якщо w – дійсне число, то $w=u$.

Введемо такі позначення

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\cdot e^{i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}}-\frac{z+1}{1-z}\right)}de^{i\theta} \tag{13}$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\cdot e^{-i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}}-\frac{z+1}{1-z}\right)}de^{i\theta} \tag{14}$$

Підставивши (13) і (14) в (12), отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\cdot e^{i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}}-\frac{z+1}{1-z}\right)}de^{i\theta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(u)}{u-z}\cdot e^{i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}\right)}du+$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\cdot e^{-i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}}-\frac{z+1}{1-z}\right)}de^{i\theta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{-1}\frac{f(u)}{u-z}\cdot e^{-i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}\right)}du == I_1+I_2+$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(u)}{u-z}\cdot e^{i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}\right)}du-\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(u)}{u-z}\cdot e^{-i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}\right)}du=I_1+I_2+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(u)}{u-z}\left(e^{i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}\right)}-e^{-i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}\right)}\right)du=I_1+I_2+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}f(u)\frac{e^{\frac{2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}-e^{\frac{-2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}}{u-z}du - \text{голоморфна в } \mathbb{D}.$$

Спростивши вираз в показнику експоненти, отримаємо

$$\frac{u+1}{1-u}-\frac{z+1}{1-z}=\frac{2(u-z)}{(1-u)(1-z)}.$$

Отже, теорему доведено.

Висновок. Ми ввели низку вагових просторів Гарді в одиничному крузі, описали співвідношення між ними. Отримали зображення функцій із одного вагового простору Гарді у вигляді аналогу інтегральної теореми Коші, яка може бути основою для наступних досліджень цих просторів та їх застосувань.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не має конфліктів інтересів у даній роботі. Автори заявляють, що дослідження виконано з дотриманням правил етики журнальних досліджень.

Список використаних джерел

1. Дільний В. М. Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування: дис. … д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.01 – математичний аналіз / Дільний В. М.; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. Львів, 2015. 322 с.
2. Mashreghi J., Verreault W. Nonlinear Expansions in Reproducing Kernel Hilbert Spaces. 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/s43670-023-00069-3
3. Garcia S. R., Mashreghi J., Ross W. T. *Finite Blaschke Products and Their Connections.* Cham: Springer, 2018. 328 p. DOI**:** https://doi.org/10.1007/978-3-319-78247-8
4. Дільний В. М. Про циклічність функцій в одному ваговому просторі Гарді в крузі. *Буковинський математичний журнал.* 2014. Т. 2, № 2–3. С. 86–89.
5. Nikolski N. K. *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz.* Vol. 1–2. Providence, RI: AMS, 2002. DOI: https://doi.org/10.1090/surv/093
6. Vynnytskyi B. V. On Zeros of Functions Analytic in a Half Plane and Completeness of Systems of Exponents. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1994. Vol. 46. P. 514–532. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01058515

UDC 517.5

On the representation of functions in weighted Hardy spaces in the disk

Oksana Kosolovych, Mariia Kuchma, Volodymyr Dilnyi

Annotation. This article examines weighted Hardy spaces in the unit disk. Single-point and two-point exponential weights are considered. Results concerning representations in these spaces are obtained.

Keywords: Hardy space, unit disk, analytic functions, single-point and two-point weight, Cauchy–Bunyakovsky inequality, analogue of the Cauchy formula.

References

1. Dilnyi, V. M. (2015). *Asymptotic and Approximation Properties of Functions of Exponential Type and Their Applications* (Doctoral dissertation, Ivan Franko National University of Lviv), Lviv, Ukraine. [in Ukrainian]
2. Mashreghi, J., Verreault, W. (2023). *Nonlinear Expansions in Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. https://doi.org/10.1007/s43670-023-00069-3
3. Garcia, S. R., Mashreghi, J., Ross, W. T. (2018). *Finite Blaschke Products and Their Connections*, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78247-8
4. Dilnyi, V. M. (2014). *On the cyclicity of functions in a certain weighted Hardy space in the disk*, Bukovinian Mathematical Journal, **2** (2–3), 86–89. [in Ukrainian]
5. Nikolski, N. K. (2002). *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz* (Vols. 1–2), AMS, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/surv/093
6. Vynnytskyi, B. V. (1994). *On zeros of functions analytic in a half-plane and completeness of systems of exponents*, Ukrainian Mathematical Journal, **46**, 514–532. https://doi.org/10.1007/BF01058515

Про авторів / About the authors

Оксана Косолович, магістрантка, кафедра математики та економіки, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Oksana Kosolovych, Master's Student, Department of Mathematics and Economics, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24 Ivan Franko Street, Drohobych 82100, Ukraine;

Марія Кучма, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Степана Бандери, 12, м. Львів,79000,Україна;

Mariia Kuchma, Candidate of Science in Physics and Mathematics**,** Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine;

Володимир Дільний, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра вищої математики, Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, вул. Степана Бандери, 12, 79000, Україна;

Volodymyr Dilnyi, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 29.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

Mathematical modeling and computational methods

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 225–232.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 225–232.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.6:517.518

Інтерполяційні кубічні многочлени на сітках золотого перерізу для оптимізації і розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної

Василь Абрамчук[1], Олена Соя[2], Любов Тютюн[3], Ігор Абрамчук[4]

[1] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
abramchuk.doc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1053-6373

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
tiutiun.la@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-9466-8746

[4] Вінницький національний технічний університет,
кафедра вищої математики, м. Вінниця, Україна
abramchuk@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7291-5566

Анотація. Інтерполяційні кубічні многочлени на сітках золотого перерізу мають унікальні властивості, які покладені в основу алгоритму наближеного розв'язування нелінійних рівнянь і пошуку екстремальних точок неперервних функцій однієї змінної. Оскільки відрізки стискуються на кожному кроці в $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ раз, а сітки золотого перерізу на кожному кроці потребують обчислення лише однієї нової точки, то це означає високу швидкість реалізації алгоритму.

Екстремальні точки кубічного многочлена та його нулі обчислюються за аналітичними формулами, що дозволяє швидко знаходити наближені розв'язки як задачі пошуку екстремальних точок, так і розв'язки нелінійних рівнянь для неперервних функцій заданих на скінченних відрізках. Коефіцієнти кубічного многочлена є лінійними формами параметра золотого перерізу, тому похибки обчислення коефіцієнтів мінімальні.

Оскільки під час звуження проміжку точність наближення неперервної функції кубічним многочленом зростає, то розв'язання задачі пошуку екстремальних точок і розв'язання нелінійних рівнянь за допомогою кубічного многочлена не вимагає звуження проміжку до довжини $c\varepsilon_{маш}$, що дозволяє будувати ромбастні алгоритми для неперервних функцій складної природи (c – константа, $\varepsilon_{маш}$ – машинне епсилон).

e–ISSN 3041–1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-06

Ключові слова: інтерполяційний кубічний многочлен, сітки золотого поділу відрізка, оптимізація функцій, розв'язування нелінійних рівнянь, прискорення збіжності.

1. Вступ

Існує багато алгоритмів оптимізації функцій (пошуку точок мінімуму або максимуму і розв'язування нелінійних рівнянь), але всі вони засновані на одному і тому самому принципі [1]. На місце розв'язання нелінійних задач будується послідовність розв'язків більш простих задач за умови, що ця послідовність буде збігатись до розв'язків поставлених задач. Більш простими задачами будуть задачі (моделі) отримані за допомогою апроксимації (або інтерполяції) нелінійних функцій, як правило, лінійними або квадратичними функціями. Методи будуть відрізнятися якістю вибраних базисних функцій, швидкістю збіжності до розв'язків поставлених задач, надійністю наближення і тими обмеженнями, які накладаються на нелінійну функцію [1].

Розглянемо задачу мінімізації унімодальної функції на проміжку $[0;1]$ методом золотого поділу. Важливість цього методу полягає у тому, що при звуженні проміжку обчислюється лише одна нова точка поділу. Якщо випадково ця точка є точкою мінімуму, але метод золотого поділу буде продовжувати звужувати проміжки – одностороння збіжність, не існує критерію у золотому поділі виділення таких точок. Отже необхідно, крім процесу звуження проміжку, мати спосіб оновлення наближених розв'язків.

2. Постановка проблеми

Розробити спільний метод оптимізації функцій і розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної, у якому інтерполяційна функція на вкладених проміжках буде визначати наближені розв'язки поставлених задач.

Це можливо за умови, що норма похибки наближення неперервної функції інтерполяційними многочленами не зростатиме на вкладених проміжках.

3. Основні результати

1. Інтерполяція неперервних функцій на проміжку $[0;1]$ *кубічним многочленом.* Інтерполяцію виконуватимемо на симетричній сітці, що підвищує точність наближення. За сітку виберемо сітку золотого поділу із вузлами $\{0,\, r^2,\, r,\, 1\}$, відповідні значення функції позначатимемо $\{y_0,\, y_1,\, y_2,\, y_3\}$. Кубічний многочлен запишемо у формі [2]:

$$T_3(x) = c_0 + c_1\left(x-\frac{1}{2}\right) + c_2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + c_1\left(x-\frac{1}{2}\right)^3. \tag{1}$$

Коефіцієнти визначаються із системи [2]:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{8}c_3,\\ y_1 &= c_0 - \sigma c_1 + \sigma^2 c_2 - \sigma^3 c_3,\\ y_2 &= c_0 + \sigma c_1 + \sigma^2 c_2 - \sigma^3 c_3,\\ y_3 &= c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{8}c_3, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{y_0+y_3}{2} &= c_0 + \frac{1}{4}c_2,\\ \frac{y_1+y_2}{2} &= c_0 + \sigma^2 c_2,\\ y_3 - y_0 &= c_1 + \frac{1}{4}c_3,\\ y_2 - y_1 &= 2\sigma c_1 + 2\sigma^3 c_3, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\sigma = \frac{1}{2} - r^2 = r - \frac{1}{2}$.

Лема. 1. *Система (2) має єдиний розв'язок для довільних значень неперервних функцій у вузлах інтерполяції.*

2. Якщо $y_3 = y_0$, $y_2 = y_1$, *то порядок інтерполяційного многочлена* $T_3(x)$ *понизиться до* $T_2(x) = c_0 + c_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3. Якщо значення функції $y = f(x)$*, що інтерполюється, у вузлах сітки є нульовими, то інтерполяційний многочлен стане константою* $T_3(x) = 0$*, незалежно від того, які значення функція* $y = f(x)$ *набуває між вузлами інтерполяції.*

Доведення. 1. Система лінійних рівнянь (2) розпадається на дві незалежні підсистеми з матрицями

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & \sigma^2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2\sigma & 2\sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Визначники цих матриць відмінні від нуля, оскільки $\det A_1 = \sigma^2 - \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = r^2 - r = r(r-1) \neq 0$, $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. Якщо $y_3 = y_0 \neq 0$, $y_2 = y_1 \neq 0$, то $c_1 = c_3 = 0$, $c_0 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, тому існує многочлен $T_2(x) = c_0 + c_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3. Якщо $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, отже $T_3(x) = 0$.

Лему доведено.

Теорема. *Коефіцієнти інтерполяційного многочлена* $T_3(x)$ *є лінійними формами параметра золотого перерізу* $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Доведення. Визначимо коефіцієнти многочлена $T_3(x)$, розв'язавши систему (2) [1]:

$$c_2 = \left(\frac{y_3 + y_0}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2}\right)\frac{1}{\frac{1}{4} - \sigma^2} = \left(\frac{y_3 + y_0}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2}\right)(2r + 3),$$

$$c_0 = \frac{y_3 + y_0}{2} - \frac{1}{4}c_2 = (y_3 + y_0)\frac{1 - 2r}{8} + (y_2 + y_1)\frac{2r + 3}{8},$$

$$c_3 = \left(2\sigma(y_3 - y_0) - (y_2 - y_1)\right)\frac{1}{2\sigma\left(\frac{1}{4} - \sigma^2\right)} = (y_3 - y_0)(2r + 3) - (y_2 - y_1)(8r + 13),$$

$$c_1 = y_3 - y_0 - \frac{1}{4}c_3 = (y_3 - y_0)\frac{1 - 2r}{4} + (y_2 - y_1)\frac{8r + 13}{4}.$$

Отримані формули є наслідком перетворень виразів $\frac{1}{4} - \sigma^2 = \frac{1}{4} - \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 2r - 1$, $\sigma\left(\frac{1}{4} - \sigma^2\right) = \left(r - \frac{1}{2}\right)(2r - 1) = \frac{5}{2} - 4r$. Врахувавши, що $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, дістанемо значення обернених величин [3].

Таким чином, коефіцієнти многочлена $T_3(x)$ є лінійними формами параметра золотого перерізу r, тому містять лише похибку, що є наслідком обчислень значень функції у вузлах сітки.

Теорему доведено.

Якщо інтерполяція виконується на проміжку $[a;\, b]$, то шляхом відображення можна перейти від $[0;1]$ до $[a;b]$ і отримати сітку золотого поділу відрізка $[a;b]$: $\{0,\, r^2,\, r,\, 1\} \to [a,\, a+r^2(b-a),\, a+r(b-a),\, b]$.

2.1. Алгоритм оптимізації (пошуку точок мінімуму або максимуму) не лінійної функції на відрізку $[a;\, b]$ *(для однозначності, мінімізація нелінійної функції).*

Нехай необхідно визначити точку найменшого значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;\, b]$ і нехай така точка єдина на $[a;\, b]$. Якщо функція унімодальна, тобто не існує на $[a;\, b]$ інших локальних мінімумів, то виконати звуження проміжку на кожному кроці алгоритму за правилом золотого поділу. Якщо функція довільна неперервна, то правило звуження проміжку необхідно розробити з використанням інтерполяційного кубічного многочлена. Кубічний многочлен або набуває мінімального значення у внутрішній точці x відрізка, тоді x є коренем рівняння $T_3^{/}(x)=0$, або x є кінцевою точкою вкладеного відрізка. Якщо кінцева точка x є точкою мінімуму функції $y=f(x)$, то вона буде також кінцевою на наступному кроці звуження відрізка. Односторонній процес стиснення послідовності вкладених відрізків означатиме, що точка x є точкою глобального мінімуму (теорема Больцано). Необхідною умовою односторонньої збіжності є поява кореня рівняння $T_3^{/}(x)=0$ в околі таких точок.

Приклад 1. *Знайти найменше значення функції* $y=\left|-x^2e^x+1\right|$ *на відрізку* $[-2;\, 1]$.

За формулами (1), (2) побудуємо інтерполяційний кубічний многочлен на сітці золотого поділу відрізка $[-2;1]$. Знайдемо корені квадратного рівняння $T_3^{/}(x)=c_1+2c_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3c_3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$. Корінь квадратного рівняння $x=-0{,}122801642$ з'явився в околі точки $a=-2$. Відрізок $[-2;\, 1]$ звузимо до відрізка $[-2;\, -2+3r]$ і на ньому виконаємо кубічну інтерполяцію у вузлах золотого поділу. Повторна мінімізація вказує, що точка $\tilde{x}=-2$ є точкою найменшого значення функції на відрізку $[-2;\, 1]$.

2.2. Алгоритм наближеного розв'язання нелінійних рівнянь $f(x)=0$ *однієї змінної.*

Нехай на заданому відрізку $[a;\, b]$ рівняння має єдиний дійсний корінь. Можна задачу розв'язування нелінійного рівняння звести до задачі мінімізації функції $y=|f(x)|$ або повторити процедуру 2.1 і на місце пошуку мінімуму інтерполяційного кубічного многочлена визначити корені рівняння $T_3(x)=0$ за формулами Кардано. Якщо нелінійна функція $y=f(x)$ на кінцях проміжку $[a;\, b]$ набуває значення різних знаків, то це дає додаткову умову для визначення напрямку звуження проміжку – застосування золотого поділу проміжку. Якщо неперервна функція на кінцях проміжку $[a;\, b]$ набуває значення різних знаків, то вона на одному з проміжків золотого поділу $[a;\, a+r^2(b-a)]$, $[a+r^2(b-a);\, a+r(b-a)]$, $[a+r(b-a);\, b]$ обов'язково змінить знак. Це дає правило заключення дійсного кореня рівняння $f(x)=0$ у послідовність вкладених проміжків з можливістю застосувати інтерполяційний кубічний многочлен для наближеного визначення кореня рівняння $f(x)=0$.

3. Прискорення швидкості збіжності до розв'язку задачі оптимізації функції або до розв'язку нелінійного рівняння на основі степеневих послідовностей параметра золотого перерізу $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Для ілюстрації алгоритму розглянемо задачу розв'язування нелінійного рівняння за виконання двох умов: 1) функція $y = f(x)$ на заданому проміжку $[a; b]$ неперервна і на кінцях набуває різних знаків; 2) на заданому проміжку $[a; b]$ рівняння має єдиний дійсний корінь. Алгоритм послідовно стискує проміжок $[a; b]$ з коефіцієнтом $1 - r^n$.

Алгоритм розв'язування нелінійного рівняння $f(x) = 0$.

1. Обчислити $f(a)$, $f(b)$. Покласти $n = 2$.

2. Аналіз вибору коефіцієнта стиснення $1 - r^n$ (показники n).

3. Звуження проміжку.

3.1. Якщо $|f(a)| < |f(b)|$, то обчислити $u = b - r^n(b-a)$, $f(u)$.

а) Якщо $f(u) \cdot f(b) > 0$, то присвоїти $b := u$, $f(b) := f(u)$;

б). У протилежному випадку: $a := u$, $f(a) := f(u)$.

Перейти на п. 2.

3.2. Якщо $|f(b)| < |f(a)|$, то обчислити $u = a + r^n(b-a)$, $f(u)$.

а) Якщо $f(u) \cdot f(a) > 0$, то присвоїти $a := u$, $f(a) := f(u)$;

б). У протилежному випадку: $b := u$, $f(b) := f(u)$.

Перейти на п. 2.

Обчислення виконувати стисненням проміжку до довжини $|b - a| < \varepsilon$.

Коментарі до алгоритму. У п. 3.1.а, 3.2.а реалізується успішна стратегія звуження проміжку шляхом відрізання від проміжку $[a; b]$ частини довжиною $r^n(b-a)$ із того кінця, де абсолютне значення функції найбільше. У разі менш успішної стратегії, яка залежить від обох величин r^n, $b - a$, звужується відрізок з кінця, де абсолютне значення функції менше. Це призводить до сповільнення збіжності (швидкості стиснення проміжку). Необхідно підвищити показник n (збільшити коефіцієнт стиснення $1 - r^n$). Таблиця 1 ілюструє ефективність звуження проміжку $[a; b]$ і спадання абсолютного значення функції на кінцях проміжку. За 14 кроків проміжок $[1; 2]$ довжиною $d = 1$, звузився до відрізка довжиною 0,000000735, тобто звузився у 1360544 разів.

Умова, що функція на кінцях проміжку $[a; b]$ набуває значення різних знаків, дає змогу аналізувати швидкість збіжності алгоритму, отже коректувати коефіцієнт стиснення проміжку $[a; b]$, зміною показника степеня r^n. Пояснимо, чому вираз $1 - r^n$ є коефіцієнтом стиснення (звуження) проміжку. Нехай заданий проміжок $[a; b]$ стискується вибором точки $\tilde{a} := a + r^n(b-a)$. Тоді новий проміжок буде мати довжину $b - \tilde{a} = b - a - r^n(b-a) = (b-a)(1-r^n)$.

Нехай функція $y = f(x)$ є довільною неперервною функцією на проміжку $[a; b]$. Припустимо, що існує на $[a; b]$ єдиний дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$. Задачу розв'язання рівняння $f(x) = 0$ можна звести до задачі мінімізації функції з найменшим значенням $|f(c)| = 0$. Оскільки внутрішня точка c, що задовольняє умову $|f(c)| = 0$, єдина, то це дозволяє будувати алгоритм стиснення проміжку $[a; b]$ із використанням степеневої послідовності r^n золотого перерізу.

Послідовно будемо звужувати відрізок $[a; b]$, відсікаючи від кінців відрізки точками $u = a + r^n(b-a)$ або $u = b - r^n(b-a)$ з найбільшим значенням $|f(x)|$. Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ мала ряд екстремальних точок і для деяких з них виконувалась умова $\min|f(x)| = \varepsilon$ – мала величина, то це призводить до ускладнення алгоритму мінімізації функції $y=|f(x)|$. У цьому випадку необхідно функцію $y=f(x)$ замінити на функцію $y=Cf(x)$, де $C>1$, що розтягує графік функції $y=|f(x)|$, залишаючи незмінним корінь рівняння $f(x)=0$.

На кожному кроці алгоритму обчислюється лише значення функції; степені параметра золотого перерізу є лінійними формами параметра r.

Приклад 2. *Обчислити дійсний корінь рівняння* $\ln x+3x^2-4=0$ *на проміжку* $[1;\,2]$.

Функція $y(x)=\ln x+3x^2-4$ на проміжку $[1;\,2]$ неперервна і на кінцях набуває значення різних знаків $y(1)<0$, $y(2)>0$. Побудуємо сітку золотого перерізу $\{1;\,1+r^2,\,1+r,\,2\}$. Обчислимо значення у вузлах сітки $y_0=y(1)=-1$, $y_1=y(2)=2,052993028$. Корінь рівняння належить $[x_0;\,x_1]$. Немає необхідності обчислювати $y(x_2)$, $y(x_3)$.

Розділимо $[x_0;\,x_1]$ точками золотого перерізу. Обчислимо $x_1^{(1)}=1+r^2(x_1-x_0)=1{,}145898034$, $f\left(x_1^{(1)}\right)=0,075435551$. Корінь належить $[1;\,x_1^{(1)}]$ і знаходиться в околі точки $x_1^{(1)}$. Розділимо відрізок $[1;\,x_1^{(1)}]$ точками золотого поділу. Обчислимо вузол $x_2^{(2)}=1+r\left(x_1^{(1)}-1\right)=1{,}090169944$, $f\left(x_2^{(2)}\right)=-0,348254885$. Корінь належить проміжку $[x_2^{(2)};\,x_1^{(1)}]$. Далі процедура золотого поділу очевидна. Процес збіжності не вимагає застосування інтерполяційного кубічного многочлена. За наближене значення кореня можна вибрати середину відрізка $[x_2^{(2)};\,x_1^{(1)}]$, $c=1{,}118033989$, $f(c)=-0,38842822$.

Таблиця 1. Розв'язування рівняння $\ln x+3x^2-4=0$, $x\in[1;\,2]$ *на основі звуження проміжку за степенями параметра золотого перерізу* $r=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

K	r^n	a	$f(a)$	b	$f(b)$
		1	–1	2	8,693147181
1	r^2	1	–1	1,381966011	2,052997307
2	r^2	1	–1	1,145898034	0,075435551
3	r^2	1,090169944	–0,348254883	1,145898034	0,075435551
4	r^2	1,124611798	–0,088307003	1,145898034	0,075435551
5	r^2	1,132742417	–0,02604224	1,145898034	0,075435551
6	r	1,132742417	–0,02604224	1,137767416	0,012612013
7	r	1,135848037	–0,002168169	1,137767416	0,012612013
8	r	1,135848037	–0,002168169	1,136581175	0,003475088
9	r	1,136128871	–0,000012966	1,136581175	0,003475088
10	r	1,136128871	–0,000012966	1,136301636	0,001323033
11	r	1,136128871	–0,000012966	1,136194861	0,000501124
12	$1-r^4$	1,136128871	–0,000012966	1,136137839	0,000062217
13	$1-r^5$	1,13612968	–0,000000582	1,136137839	0,000062217
14	$1-r^5$	1,13612968	–0,000000581	1,136130415	0,000005075

Висновки. Для збіжності послідовності наближень до розв'язку задачі мінімізації неперервної функції $y=f(x)$ або розв'язування нелінійного рівняння однієї змінної запропоновані:

1. Комбінований метод інтерполяції неперервної функції кубічним многочленом, на сітках золотого поділу вкладених проміжків з ітераціями:

а) виконати наближення до розв'язку задач розв'язками для кубічних функцій $y=T_3(x)$, а саме: 1) коренями рівняння $T_3^{/}(x)=0$ замінити наближення до оптимізаційних точок функції $y = f(x)$; 2) коренями рівняння $T_3(x) = 0$ замінити наближення до коренів рівняння $f(x) = 0$;

б) збіжність до розв'язку поставлених задач є наслідком наближення неперервної функції інтерполюючими кубічними многочленами за умови, що вкладені відрізки стискаються і забезпеченням, щоб розв'язки обох задач належали послідовності вкладених відрізків;

в) на місце побудови послідовності наближень до розв'язків задач, що вимагає жорстких обмежень на класи функцій, пропонується будувати послідовність вкладених відрізків за правилами золотого перерізу, на яких здійснюється інтерполяція кубічними многочленами неперервних функцій.

2. Прискорення збіжності шляхом стиснення проміжку на основі степенів коефіцієнта золотого перерізу.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1989. 495 p.
2. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В., Петрук Д. О., Пугач О. С., Руда О. Г., Шмулян Я. В. Базисні системи в задачах математичного моделювання. *Фізико-математична освіта: науковий журнал*. 2016. Вип. **3** (9). С. 17–21.
3. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В., Бабюк Д. О. Оптимізаційні методи на основі золотого перерізу. *Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки (ПКТ-2016): праці V-ї Міжнародної науково-практичної конференції* (Чернівці, Україна, 21–24 травня 2016 р.). Чернівці, 2016. С. 28–30.

UDC 519.6:517.518

Interpolation cubic polynomials on golden section grids for optimization and solving nonlinear equations of a single variable

Vasyl Abramchuk, Olena Soia, Liubov Tiutiun, Ihor Abramchuk

Abstract. Interpolation cubic polynomials constructed on golden section grids possess unique properties that form the basis of an algorithm for the approximate solution of nonlinear equations and the search for extremal points of continuous single-variable functions. Since the interval is reduced by the golden ratio at each iteration, and the golden section grid requires the computation of only one new point per step, the algorithm demonstrates a high rate of implementation.

The extrema and zeros of the cubic polynomial are determined analytically, which enables rapid approximation of both the extremum search problem and the solution of nonlinear equations for continuous functions defined on finite intervals. The coefficients of the cubic polynomial are linear functions of the golden ratio parameter, resulting in minimal computational error.

As the interval narrows, the accuracy of the cubic polynomial's approximation to a continuous function increases; therefore, solving the problems of extremum search and nonlinear equation solving with the use of cubic interpolation does not require reducing the interval length $c_{\varepsilon_{mach}}$ to machine precision. This allows the construction of rhombastic algorithms for continuous functions of complex nature (where c is a constant and ε_{mach} is the machine epsilon).

Keywords: interpolation cubic polynomial, golden section grid, function optimization, solving nonlinear equations, convergence acceleration.

References

1. Kahaner, D., Moler, C., Nash, S. (1989). *Numerical Methods and Software*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
2. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V., Petruk, D. O., Puhach, O. S., Ruda, O. H., Shmulian, Ya. V. (2016). *Basic systems in problems of mathematical modeling,* Fizyko-Matematychna osvita: scientific gournal, **3** (9), 17–21. [in Ukrainian]
3. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V., Babyuk, D. O. (2016). *Optimization methods based on the golden section*, In problems of informatics and computer technology (PIKT-2016): Proceedings of the 5th international scientific and practical conference (May 21–24, Chernivtsi, Ukraine), 28–30. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Василь Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Vasyl Abramchuk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Любов Тютюн, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Liubov Tiutiun, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Ігор Абрамчук, старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21000, Україна;

Ihor Abramchuk, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske highway Str., Vinnytsia 21000, Ukraine.

Отримано / Received 01.11.2025

Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025

Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 233–241.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 233–241.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 523.482

Особливості фізичних характеристик атмосфери Плутона за результатами спостережень і модельних оцінок

Анатолій Відьмаченко[1], Олександр Мозговий[2]

[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України, кафедра фізики; Головна астрономічна обсерваторія НАН України, відділ фізики субзоряних і планетних систем, м. Київ, Україна
avidmachenko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0523-5234

[2] Національний транспортний університет, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, м. Київ, Україна
mavimfto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0797-8779

*Анотація***.** Згідно до модельних оцінок температура біля поверхні Плутона змінюється від 33 К до майже 60 К через витягнутість його орбіти. За таких умов замерзає азот, окис вуглецю, вода й метан. Основною складовою на поверхні карликової планети є азотний лід. Біля точки перигелію внаслідок нагрівання він із твердого стану переходить до газоподібного, збільшуючи атмосферний тиск. Проте атмосфера Плутона є дуже розрідженою і складається із азоту з домішками метану й чадного газу. Під дією сонячного ультрафіолетового випромінювання з цих сполук утворюються складніші сполуки: етан, ацетилен, етилен тощо. При переході до афелію ці сполуки випадають на поверхню Плутона. Апаратурою космічного зонда «New Horizons» в атмосфері Плутона було виявлено шаруватий серпанок блакитного кольору, який охоплював всю карликову планету до висоти близько 300 км. Цей серпанок над північними полярними областями виявився був майже у 3 рази щільнішим, ніж над поверхнею в екваторіальній області. Найімовірніше, він може бути утвореним із частинок, які синтезувалися із атмосферних газів під дією жорсткого сонячного випромінювання.
Ключові слова: Плутон, атмосфера, атмосферні складові, серпанок, моделювання.

1. Вступ

Модельні оцінки показують, що температура біля поверхні Плутона на відстанях від Сонця, які змінюються від 29.66 а. о. у перигелії до 48.87 а. о. в афелії, може змінюватися від 33 К до майже 60 К. За таких умов замерзає не лише вода, але й інші рідини та гази, які знайдені на поверхні цієї карликової планети [15, 22]. Наприклад, там

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-07

знайдено азот, окис вуглецю [7] і метан. Усі ці сполуки починають замерзати при значно нижчих температурах, ніж вода. Температурні умови на поверхні Плутона значно змінюються через витягнутість його орбіти [27]. У найближчій до Сонця точці це приводить до нагріву поверхні цієї карликової планети настільки, що деякі із її складових можуть змінювати свій фазовий стан.

2. Постановка проблеми

Згідно багатьох спостережних даних, основною складовою поверхні Плутона являється азотний лід [21]. Завдяки фізико хімічним властивостям, внаслідок нагрівання поверхневого шару поблизу точки перигелію азот із твердого стану має можливість переходити в газоподібний. У результаті сублімації азотного льоду його кількість навколо Плутона зростає, і це викликає збільшення тиску у переважно азотній атмосфері.

Через фізико-хімічні властивості даного хімічного елементу, на певних рівнях висоти в атмосфері Плутона зможуть утворюватись ще й шари аерозольних [10, 12] хмар. Але моделювання показує, що через невелику силу тяжіння у цієї карликової планети, її не достатньо для тривалого утримування цієї газово-аерозольної оболонки. Тому через деякий час новоутворені молекули втікають з атмосфери в оточуючий космічний простір. А в моменти часу, коли Плутон знаходиться від Сонця на великих відстанях, то атмосфера може настільки остигати, щоб її складові вимерзали, і практично повністю знову осідали на поверхню. Атмосферу навколо Плутона вдалося виявити після тривалих пошуків, тільки у 1985 році [25, 26] при спостереженнях покриття його диском зорі. Якщо б у цього об'єкта газова атмосфера була відсутньою, то потік світла від зорі зникав би досить різко. Проте при спостереженнях Плутона, зникнення світла відбувалося поступово (рис. 1). Остаточно підтвердити існування навколо цього небесного тіла атмосфери вдалося у 1988 році при спостереженнях покриття зорі кількома групами спостерігачів [27].

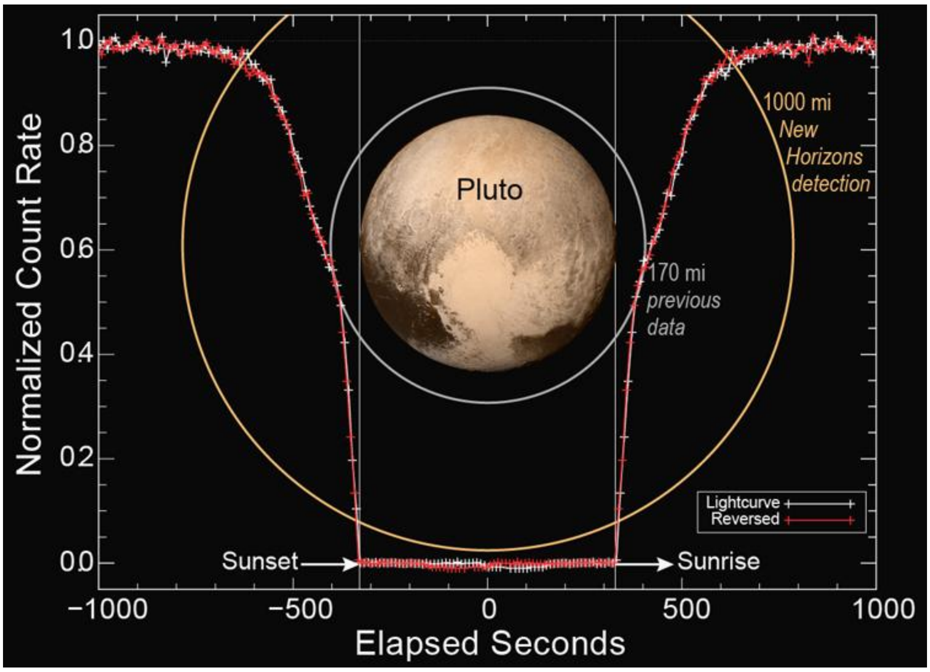


Рис. 1. Криві поглинання ультрафіолету від Сонця в атмосфері Плутона, які були виміряні у момент польоту космічного апарата «New Horizons» через тінь Плутона

(https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/PIA19716_Alice_Solar_Occultation_%28cropped%29.jpg).

Мета статті: описати особливості фізичних характеристик атмосфери Плутона на основі результатів різних досліджень та модельних оцінок карликової планети.

3. Основні результати

Характеристики атмосфери навколо Плутона було досліджено спектральними методами. Аналіз отриманих результатів спостережень показав, що атмосфера навколо Плутону виявилася досить розрідженою. Вона складається з газів, які випарувалися з льодів на поверхні карликової планети. Вдалося виявити, що основним компонентом поверхневого шару є азот; також знайшли у невеликій кількості домішки метану (0.25÷0.40%) й чадного газу (≈0.05÷0.10%). Під дією жорстких складових випромінювання Сонця із даних сполук могли утворюватись ще й ряд інших складніших сполук. Зокрема, до них відносять етан, ацетилен й етилен. Через деякий час при змінах фізичних умов біля поверхні Плутона, вищеназвані сполуки випадають своєрідним снігом на його поверхню.

Імовірно, що такі ж частинки мають утворювати ще й газово-аерозольні шари туману, які спостерігались на висотах дещо більших за 200 км над поверхнею. Незважаючи на те, що атмосфера Плутона являється досить розрідженою, та серпанковий туман був достатньо помітним. А завдяки розсіяному туманом сонячному світлу, змогли навіть отримати декілька зображень окремих деталей поверхні, розташованих на нічному боці Плутона.

Атмосферний тиск біля поверхні Плутона виявився дуже малим. Проте його значення помітно змінювалось із часом. Причому ці зміни часто відбувалися ще й досить неочікувано. Через витягнутість орбіти, в афелії Плутон отримує від Сонця майже у три рази менше тепла, ніж у перигелії. Моделювання показує, що такі зміни в освітленні мають приводити до значних змін в його атмосфері. Адже прогнози передбачають, що в афелії більша частина атмосфери Плутона у результаті охолодження має вимерзати і випадати снігом на поверхню. При цьому, атмосферний тиск мав би зменшитися в багато разів.

Але спостереження покриттів Плутоном зірок, які виконані з 1988 по 2015 роки показали, що атмосферний тиск поступово збільшився майже утричі. І це відбулося не дивлячись на те, що після 1989 року Плутон почав віддалятись від Сонця. Можливим поясненням таких змін в атмосфері може бути той факт, що починаючи від 1987 року північна навколополярна область Плутона вперше за 124 роки розпочала свій вихід з тіні на освітлення прямими сонячними променями; нагрівання поверхневих шарів карликової планети, викликане цим ефектом, могло сприяти сублімації азоту з навколополярної області.

У 2015 році вимірювання апаратурою космічного зонда «New Horizons» показали (рис. 2), що тиск в атмосфері біля поверхні становив близько 1 Па. Це значення практично узгоджувалось із результатами спостережень покриттів зір протягом декількох попередніх років. Крім того, атмосфера Плутона вирізнялася ще й помітними й не до кінця зрозумілими сезонними змінами [16, 17, 23, 24], які появляються внаслідок особливостей орбітального та осьового обертання цієї карликової планети.

Отримані апаратурою космічного зонда спостережні дані щодо покриттів зірок диском Плутона дозволили виміряти зміни температура в його атмосфері з часом при сході і заході Сонця. Найбільшими зміни були у моменти, коли Сонце тільки що виходило із-за Плутонового диска. Саме в цей час молекулярний азот у верхній частині атмосфери Плутона починав поглинати сонячні промені; а в моменти, коли космічний зонд наближався до тіні від диска планети, світловий потік від Сонця суттєво зменшувався. У моменти, коли ефекти від явища затемнення збільшувалися, сонячне світло також починало поглинатися атмосферним метаном та вуглеводнями, що викликало подальше зменшення світлового потоку. Найменшим він ставав тоді, коли космічний апарат повністю заходив в тінь від плутонового диска. У такі моменти швидкість підрахунку фотонів знижувалася практично до нуля.

Рис. 2. Зображення Плутона з нічного боку показує шари атмосфери, підсвічені променями Сонця (https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Pluto#/media/File: Blue_hazes_over_backlit_Pluto.jpg).

А в моменти, коли космічний апарат виходив із тіні Плутона, відбувався зворотний процес. Аналіз отриманих даних дозволив відмітити, що будова атмосфери на протилежних частинах диска Плутона є практично ідентичною.

Отримані спостережною апаратурою космічного апарата «New Horizons» результати також дозволили виявити в атмосфері Плутона блакитний серпанок із аерозолів (рис. 3), який охоплював всю карликову планету [18, 19]. На отриманих численних зображеннях висота серпанку досягала висот вище від 200 км. А зображення, що отримані в ультрафіолетовій частині спектра, дозволили зареєструвати серпанок навіть на висотах близько 300 км [1]. Зображення із найкращою якістю дозволяють вказувати на присутність близько 20 окремих шарів. Всі ці шари простягаються в горизонтальному напрямку на відстані більше від 1000 км. А розташування одного й того ж окремого шару серпанку у різних місцях над поверхнею Плутона дещо відрізнялося по висоті [6].

Також вдалося виявити, що над поверхнею у північній полярній області серпанок був у три рази щільнішим, ніж над екваторіальними областями [1]. Товща окремих шарів серпанку по висоті відрізнялась у межах від 1 до понад 10 км [1]. І відстані по вертикалі між окремими шарами також, зазвичай, не перевищували 10 км [6]. Значення оцінок оптичної товщини серпанку мали величини від 0.004 [2] до 0.013 [4]. Подібні значення викликають зменшення інтенсивності променів світла по вертикалі близько до 1 %. Так звана, характерна шкала висот (тобто висота, на котрій значення її щільності зменшується в $\approx e$ разів) в атмосфері Плутона становить 45÷55 км [2, 4]. Такі величини практично співпадають із шкалою висот для зміни тиску на середніх рівнях висоти планетної атмосфери [5]. На висотах від 100 км до 200 км значення шкали висоти зменшувалося до близько 30 км [4].

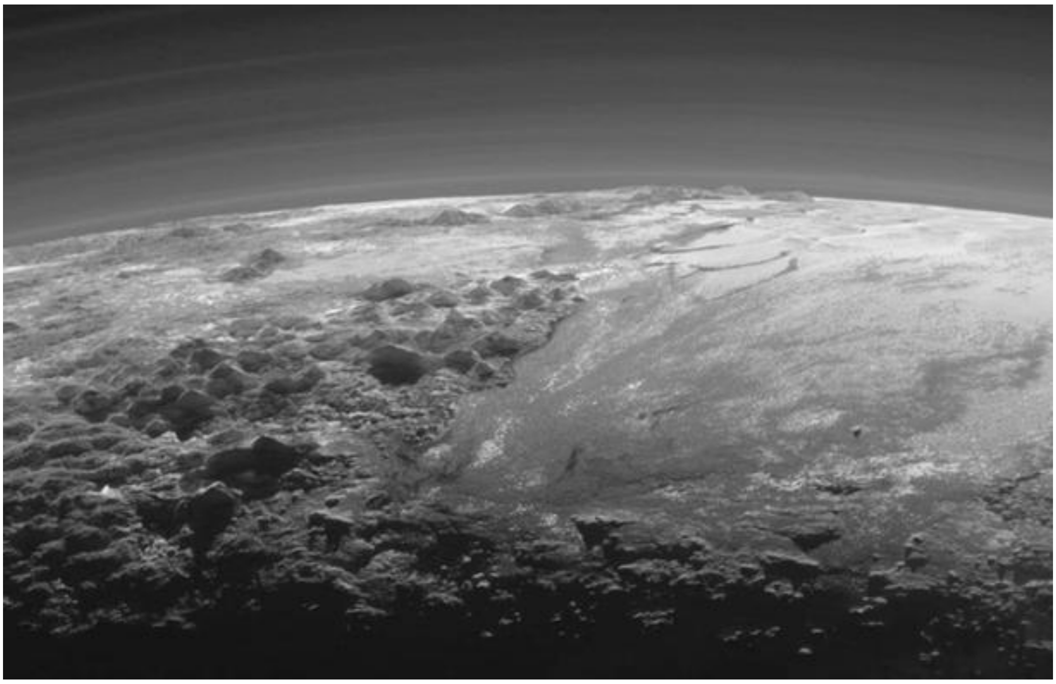


Рис. 3. Видимість окремих шарів серпанку над рівниною Sputnik Planitia та над навколишніми горами. Зображення отримане через 15 хвилин після максимального зближення космічного апарата з Плутоном (https://kor.ill.in.ua/m/610x0/1684717.png).

Розмір частинок у такому серпанкові поки що залишається мало дослідженим. Наприклад, її блакитний відтінок вказує на радіус таких часток близько 10 нм. Проте розрахунки фазової залежності яскравості атмосфери на різних фазових кутах вказують на значення радіуса цих же часток понад сотню нанометрів. Одним із можливих пояснень такої поведінки у зміні яскравості серпанку, є об'єднання часток невеликого розміру (у десятки нанометрів) у конгломерати з більшими розмірами: до сотень нанометрів [6, 11]. Вважають, що за фізичних умов, характерних для атмосфери Плутона, такий серпанок, найімовірніше, міг би бути утвореним з часток деяких нелетких сполук, які змогли синтезуватись із знайдених там атмосферних газів під впливом жорсткого сонячного випромінювання. Ці частинки з часом могли повільно випадати на поверхню планети [14]. Час їхнього осідання має становити від декількох земних діб до кількох тижнів [1].

Вважають, що розшаровування серпанку в атмосфері можна пов'язати з гравітаційними хвилями. На наявність таких хвиль вказують ряд результатів, отриманих при спостереженнях покриттів зірок диском Плутона [14]. Самі ж гравітаційні хвилі можуть виникати при атмосферних переміщеннях під дією вітрів, які дмуть над нерівностями рельєфу [6, 20]. Найбільш імовірно, що саме серпанок може спричиняти злами на спостережуваних кривих падіння інтенсивності випромінювання від Сонця при його проходженні крізь атмосферу, які були отримані з допомогою апаратури космічного зонда «New Horizons» у момент його проходження через тінь Плутона (рис. 1). Там видно, що нижче від рівня висоти приблизно в 150 км атмосфера починає ослаблювати сонячне світло суттєво сильніше, ніж це спостерігалося дещо вище від даного рівня [14]. Подібний «злам» спостерігали і в 1988 році при спостереженнях покриттів зорі Плутоном.

Таку поведінку поглинання можна було інтерпретувати ослабленням світлового потоку серпанком [4], або ж швидким зростанням температури з висотою у нижніх шарах атмосфери Плутона [1]. Останнє пояснення було підтверджено даними, отриманими з допомогою апаратури на космічному зонді «New Horizons». Коли ж атмосфера Плутона стала більш ніж у два рази щільнішою, то при послідуючих спостереженнях покриттів зірок, подібного злому у змінах поглинання світла від зорі – практично вже не спостерігали [13].

Ще одну ознаку присутності серпанків в атмосфері карликової планети спостерігали при покритті зір у 2002 році. У момент, коли Плутон повністю покрив зорю, деяка доля світлового потоку від зорі все ще доходила до спостерігачів на Землі завдяки ефектам заломлення в атмосфері Плутона. Тоді також вдалося виявити, що інтенсивність цього світла зростає при збільшенні його довжини хвилі [3]. Таку особливість, зазвичай, інтерпретують як надійну [8, 9] ознаку розсіювання світла частинками аерозолів. Але вже при наступних спостереженнях покриттів зір Плутоном (наприклад, при спостереженнях 29.06.2015 [8]) такої поведінки у змінах світлового потоку вже не було зареєстровано [9].

Висновки. Отримані характеристики атмосфери навколо Плутона спектральними методами і за допомогою апаратури космічних зондів та спостереженнями у моменти покриття планетою зір ьних оцінок дозволяють припустити наявність розрідженої атмосфери карликової планети. Виявлений серпанок має шарувату структуру і різну щільність у полярних і екваторіальних областях. Пояснено можливу природу зміни фізичних характеристик карликової планети в залежності від інтенсивності випромінювання Сонця.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Cheng A.F., Summers M.E., Gladstone G.R., et al. Haze in Pluto's atmosphere. *Icarus.* 2017. Vol. 290. P. 112–133. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.02.024
2. Dlugach J.M., Morozhenko A.V., Vid'Machenko A.P., Yanovitskij E.G. Investigations of the optical properties of Saturn's atmosphere carried out at the main astronomical observatory of the Ukrainian Academy of Sciences. *Icarus*. 1983. Vol. 54. P. 319–336. DOI: https://doi.org/10.1016/0019-1035(83)90201-4
3. Elliot J.L., Ates A., Babcock B.A., et al. The recent expansion of Pluto's atmosphere. *Nature.* 2003. Vol. 424 (6945). P. 165–168. DOI: 10.1038/nature01762
4. Elliot J.L., Dunham E.W., Bosh A.S., et al. Pluto's atmosphere. *Icarus.* 1989. Vol. 77. P. 148-170. DOI: https://doi.org/10.1016/0019-1035(89)90014-6
5. Elliot J.L., Person M.J., Gulbis A.A.S., et al. Changes in Pluto's Atmosphere: 1988-2006. *The Astronomical Journal*. 2007. Vol. 134 (1). P. 1–13. DOI: http://dx.doi.org/10.1086/517998
6. Gladstone G.R., Stern S.A., Ennico K., et al. The atmosphere of Pluto as observed by New Horizons. *Science.* 2016. Vol. 351(6279). DOI: http://dx.doi.org/10.1126/science.aad8866

7. Gurwell M., Lellouch E., Butler B., et al. Detection of Atmospheric CO on Pluto with ALMA. *American Astronomical Society.* 2015. DPS meeting №47, id.105.06.
8. Hartig K., Barry T., Carriazo C.Y., et al. Constraints on Pluto's Hazes from 2-Color Occultation Lightcurves. *American Astronomical Society.* 2015. DPS meeting №47, id.210.14.
9. Lellouch E., de Bergh C., Sicardy B., et al. Exploring the spatial, temporal, and vertical distribution of methane in Pluto's atmosphere. *Icarus.* 2015. Vol. 246. P. 268–278. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.03.027
10. Morozhenko A.V., Ovsak A.S., Vid'machenko A.P., Teifel V.G., Lysenko P.G. Imaginary part of the refractive index of aerosol in latitudinal belts of Jupiter's disc. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2016. Vol. 32. P. 30-37. DOI: https://doi.org/10.3103/S0884591316010062
11. Morozhenko A.V., Vid'machenko A.P. Polarimetry and Physics of Solar System Bodies. *Photopolarimetry in Remote Sensing: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute.* Yalta, Ukraine. 20 September - 4 October 2003. - 503, 2004. P. 369-384. DOI: https://doi.org/10.1007/1-4020-2368-5
12. Morozhenko A.V., Vidmachenko A.P., Nevodovskiy P.V., et al. On the Efficiency of Polarization Measurements while Studying Aerosols in the Terrestrial Atmosphere. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2014. Vol. 30 (1). P. 11-21.
13. Sicardy B., Widemann T., Lellouch E., et al. Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations. *Nature*. 2003. Vol. 424 (6945). P. 168–170. DOI: http://dx.doi.org/10.1038/nature01766
14. Stern S.A., Bagenal F., Ennico K., et al. The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons. *Science*. 2015. Vol. 350 (6258). id.aad1815. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aad1815
15. Vid'machenko A.P. Temporal changes in methane absorption in Jupiter's atmosphere. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 1997. Vol. 13 (6). P. 21–25.
16. Vidmachenko A.P. Manifestations of seasonal variations in the atmosphere of Saturn. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 1987. Vol. 3 (6). P. 9–12.
17. Vidmachenko A.P. Seasonal variations in the optical characteristics of Saturn's atmosphere. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 1999. Vol. 15 (5). P. 320–331.
18. Vidmachenko A.P. Sedna: the history of the discovery and its features. *Astronomical almanac.* 2005. Vol. 52. P. 201–212.
19. Vidmachenko A.P. *Dwarf planets (to the 10th anniversary of the introduction of the new class of planets)*. Astronomical almanac, 62, 2015. P. 228-249.
20. Vidmachenko A.P. Features of surface topography and the geological activity of Pluto. *18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists* (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May, 26-27, 2016). P. 12–14.
21. Vidmachenko A.P. The floating ices on the surface of Pluto. *18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists* (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May 26-27 2016). P. 10–12.
22. Vidmachenko A.P. Pluto (to the 90th anniversary of the discovery of the planet). *Astronomical almanac*. 2019. Vol. 66. P. 217–229.
23. Vidmachenko A.P. Features of seasonal changes on Pluto. *Proceedings of the 8th International scientific and practical conference. Science, innovations and education: problems and prospects* (Tokyo, Japan, March 9-11, 2022). Chapter 17. Tokyo: CPN Publishing Group, 2022. P. 108–116.
24. Vidmachenko A.P. About discovering and getting of all new information about the now dwarf planet Pluto. *Proceedings of the XIII International Scientific and Prhctical Conference «Modern science: fundamental and applied aspects»* (Beijing, China, December 30–31, 2024). P. 20–26.
25. Vidmachenko A.P. The history of the discovery and study of Pluto's atmosphere. *Proceedings of the XV International Scientific and Practical Conference «Innovative scientific research»* (Toronto, Canada, January 02-03, 2025). P. 4–8. DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.14610032
26. Vidmachenko A.P. Updating data on the physical characteristics of the dwarf planet Pluto thanks to research from the "New Horizons" spacecraft. *Proceedings of the 6th International scientific and practical conference "Current trends in scientific research development"* (Boston, USA, 16-18 January 2025). Chapter 52. Boston: BoScience Publisher, 2025. P. 323–332.
27. Vidmachenko A.P., Morozhenko O.V. The study of the satellites surfaces and the rings of the giant planets. *Main Astronomical Observatory NAS of Ukraine*. Kyiv: Ltd. Dia Press, 2012. 255 p.

UDC 523.482

Features of the physical characteristics of Pluto's atmosphere based on observations and model estimates

Anatoliy Vidmachenko, Oleksandr Mozghovyi

Abstract. According to model estimates, the temperature near Pluto's surface varies from 33 K to almost 60 K due to the elongated shape of its orbit. Under such conditions, nitrogen, carbon monoxide, water, and methane freeze. The main component on the surface of the dwarf planet is nitrogen ice. Near the perihelion point, due to heating, it changes from a solid state to a gaseous state, increasing atmospheric pressure. However, Pluto's atmosphere is very thin and consists of nitrogen with admixtures of methane and carbon monoxide. Under the influence of solar ultraviolet radiation, more complex compounds are formed from these compounds: ethane, acetylene, ethylene, etc. When moving to aphelion, these compounds fall to the surface of Pluto. The New Horizons space probe equipment detected a layered blue haze in Pluto's atmosphere, which covered the entire dwarf planet to a height of about 300 km. This haze over the northern polar regions was found to be almost 3 times denser than over the surface in the equatorial region. Most likely, it can be formed from particles that were synthesized from atmospheric gases under the influence of hard solar radiation.

Keywords: Pluto, atmosphere, atmospheric components, haze, modeling.

References

1. Cheng, A.F., Summers, M.E., Gladstone, G.R., et al. (2017). *Haze in Pluto's atmosphere,* Icarus, **290**, 112–133. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.02.024
2. Dlugach, J.M., Morozhenko, A.V., Vid'Machenko, A.P., Yanovitskij, E.G. (1983). *Investigations of the optical properties of Saturn's atmosphere carried out at the main astronomical observatory of the Ukrainian Academy of Sciences,* Icarus, **54** (May, 1983), 319-336. https://doi.org/10.1016/0019-1035(83)90201-4
3. Elliot, J.L., Ates A., Babcock, B.A., et al. (2003). *The recent expansion of Pluto's atmosphere,* Nature, **424** (6945), 165–168. https://doi.org/10.1038/nature01762
4. Elliot, J.L., Dunham, E.W., Bosh, A.S., et al. (1989). *Pluto's atmosphere,* Icarus, **77**, 148–170. https://doi.org/10.1016/0019-1035(89)90014-6
5. Elliot, J.L., Person, M.J., Gulbis, A.A.S., et al. (2007). *Changes in Pluto's Atmosphere: 1988-2006,* The Astronomical Journal, **134** (1), 1–13. http://dx.doi.org/10.1086/517998
6. Gladstone, G.R., Stern, S.A., Ennico, K., et al., (2016). *The atmosphere of Pluto as observed by New Horizons,* Science, **351** (6279). http://dx.doi.org/10.1126/science.aad8866
7. Gurwell, M., Lellouch, E., Butler, B., et al. (2015). *Detection of Atmospheric CO on Pluto with ALMA*, American Astronomical Society, DPS meeting №**47**, id. 105.06.
8. Hartig, K., Barry, T., Carriazo, C.Y., et al. (2015). *Constraints on Pluto's Hazes from 2-Color Occultation Lightcurves*, American Astronomical Society, DPS meeting №47, id. 210.14.
9. Lellouch, E., de Bergh, C., Sicardy, B., et al. (2015). *Exploring the spatial, temporal, and vertical distribution of methane in Pluto's atmosphere,* Icarus, **246**, 268–278. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.03.027
10. Morozhenko, A.V., Ovsak, A.S., Vid'machenko, A.P., Teifel, V.G., Lysenko, P.G. (2016). *Imaginary part of the refractive index of aerosol in latitudinal belts of Jupiter's disc*, Kinematics and Physics of Celestial Bodies. **32,** 30–37. https://doi.org/10.3103/S0884591316010062
11. Morozhenko, A.V., Vid'machenko, A.P. (2004). *Polarimetry and Physics of Solar System Bodies Photopolarimetry in Remote Sensing*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (Yalta, Ukraine, 20 September-4 October 2003), 369–384. https://doi.org/10.1007/1-4020-2368-5
12. Morozhenko, A.V., Vidmachenko, A.P., Nevodovskiy, P.V., et al. (2014). *On the Efficiency of Polarization Measurements while Studying Aerosols in the Terrestrial Atmosphere,* Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **30** (1), 11–21.
13. Sicardy, B., Widemann, T., Lellouch, E., et al. (2003). *Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations,* Nature, **424** (6945), 168–170. http://dx.doi.org/10.1038/nature01766
14. Stern, S.A., Bagenal, F., Ennico, K., et al. (2015). *The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons,* Science, **350** (6258), id.aad1815. https://doi.org/10.1126/science.aad1815
15. Vid'Machenko, A.P. (1997). *Temporal changes in methane absorption in Jupiter's atmosphere,* Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **13** (6), 21–25.
16. Vidmachenko, A.P. (1987). *Manifestations of seasonal variations in the atmosphere of Saturn,* Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **3** (6), 9–12.
17. Vidmachenko, A.P. (1999). *Seasonal variations in the optical characteristics of Saturn's atmosphere,* Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **15** (5), 320–331.
18. Vidmachenko, A.P. (2005). *Sedna: the history of the discovery and its features*. Astronomical almanac, **52**, 201–212.

19. Vidmachenko, A.P. (2015). *Dwarf planets (to the 10th anniversary of the introduction of the new class of planets),* Astronomical almanac, **62**, 228-249.
20. Vidmachenko, A.P. (2016). *Features of surface topography and the geological activity of Pluto*, 18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May, 26-27, 2016), 12–14.
21. Vidmachenko, A.P. (2016). *The floating ices on the surface of Pluto,* 18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May 26–27, 2016), 10-12.
22. Vidmachenko, A.P. (2019). *Pluto (to the 90th anniversary of the discovery of the planet),* Astronomical almanac, **66**, 217–229.
23. Vidmachenko, A.P. (2022). *Features of seasonal changes on Pluto,* Proceedings of the 8th International scientific and practical conference, Science, innovations and education: problems and prospects (Tokyo, Japan, March 9-11, 2022), Chapter 17, CPN Publishing Group, Tokyo, 108–116.
24. Vidmachenko, A.P. (2024). *About discovering and getting of all new information about the now dwarf planet Pluto*, Proceedings of the XIII International Scientific and Prhctical Conference «Modern science: fundamental and applied aspects» (Beijing, China, December 30–31, 2024), 20–26.
25. Vidmachenko, A.P. (2025). *The history of the discovery and study of Pluto's atmosphere,* Proceedings of the XV International Scientific and Practical Conference «Innovative scientific research» (Toronto, Canada, January 02–03, 2025), **32**, 4–8. http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.14610032
26. Vidmachenko, A.P. (2025). *Updating data on the physical characteristics of the dwarf planet Pluto thanks to research from the "New Horizons" spacecraft,* Proceedings of the 6th International scientific and practical conference "Current trends in scientific research development" (Boston, USA, 16-18 January, 2025), Chapter 52, BoScience Publisher, Boston, 323–332.
27. Vidmachenko, A.P., Morozhenko, O.V. (2012). *The study of the satellites surfaces and the rings of the giant planets,* Main Astronomical Observatory NAS of Ukraine, Ltd. Dia Press, Kyiv.

Про авторів / About the authors

Анатолій Відьмаченко, доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України, професор кафедри фізики Національного університету біоресурсів і природокористування України, головний науковий співробітник відділу фізики субзоряних і планетних систем Головної астрономічної обсерваторії НАН України; вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна;

Anatoliy Vidmachenko, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine, Professor of the Department of Physics of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Chief Researcher of the Department of Physics of Substellar and Planetary Systems of the Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, 15 Heroiv Oborony Str., Kyiv 03041, Ukraine;

Олександр Мозговий, кандидат технічних наук, доцент, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, Національний транспортний університет, вул. М. Омеляновича-Павленка,1, м. Київ, 01010, Україна;

Oleksandr Mozghovyi, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, National Transport University, 1 Mykhaila Omelianovycha – Pavlenka Str., Kyiv 01010, Ukraine.

Отримано / Received 09.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 04.11.2025

Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 242–252.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 242–252.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 538.9+539.3

Вплив магнітного поля на енергетичний спектр квазічастинок у біонанокомплексі квантова точка A^2B^6 – протеїн

Олеся Даньків[1], Владислав Кугівчак[2], Олександр Війчук[3], Олег Кузик[4]

[1]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна
dankivolesya@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2154-8396

[2]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна
vladyslav.kuhivchak@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0008-9338-7377

[3]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна
oleksandr.viychuk@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0006-8775-0489

[4]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна
olehkuzyk@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-8474-444X

Анотація. Побудовано математичну модель сферичної квантової точки A^2B^6 з домішкою, яка перебуває у магнітному полі та взаємодіє з адсорбованими молекулами протеїнів. У межах розробленої моделі досліджено вплив однорідного магнітного поля на енергетичний спектр електрона, дірки та екситона у біонанокомплексі напівпровідникова квантова точка CdTe – сироватковий альбумін людини. Запропонована модель враховує поляризаційні ефекти, спричинені дипольним потенціалом білкової оболонки, а також спінове розщеплення у магнітному полі. Встановлено закономірності зміни енергії квазічастинок від радіуса квантової точки (нелегованої та з донорною або акцепторною домішкою), концентрації альбуміну та величини індукції магнітного поля. Встановлено, що зі зменшенням радіуса квантової точки вплив білкової оболонки стає більш суттєвим. Вплив альбуміну та спінове розщеплення у магнітному полі посилюються за наявності електрично активних домішок. Отримані закономірності свідчать про можливість керування оптичними та електричними властивостями біонанокомплексів за допомогою зовнішнього магнітного поля. Запропоновані результати мають важливе значення для розробки магніточутливих біосенсорів та систем адресної доставки ліків. Біогібридні структури квантова точка – протеїн можуть бути використані як флуоресцентні зонди для візуалізації при дії магнітного поля.

Ключові слова: біонанокомплекс, квантова точка, протеїн, магнітне поле, енергетичний спектр.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-08

1. Вступ

У сучасній нанонауці та біофізиці дедалі більшої уваги набувають дослідження біонанокомплексів, що поєднують неорганічні наноструктури з біомолекулами [1]. Однією з найбільш перспективних таких систем є комплекси квантових точок (КТ) з протеїнами, зокрема із сироватковим альбуміном людини (HSA) [2]. Завдяки здатності до селективної взаємодії, біосумісності та унікальним оптоелектронним властивостям, такі гібридні структури відкривають нові можливості для біосенсорики, цільової доставки ліків та оптичної діагностики [3]. Однак, глибоке розуміння квантово-механічних властивостей цих комплексів, зокрема їхньої енергетичної структури, потребує врахування впливу зовнішніх полів, які можуть суттєво змінювати поведінку квазічастинок (електронів і дірок), локалізованих у КТ.

Магнітне поле є важливим зовнішнім фактором, здатним змінювати енергетичний спектр системи через квантування орбітального руху носіїв заряду, збурення спінових станів, а також через модифікацію просторової локалізації хвильових функцій. Для наноструктур, зокрема КТ у гетерогенному середовищі, магнітне поле здатне індукувати розщеплення енергетичних рівнів та зміну густини станів, що безпосередньо впливає на оптичні переходи та інші експериментально вимірювані характеристики. За наявності білкової оболонки, яка змінює діелектричне оточення та створює додатковий потенціал взаємодії (наприклад, внаслідок дипольного або кулонівського характеру), поведінка квазічастинок у КТ значно ускладнюється.

Особливої уваги потребує дослідження того, як магнітне поле впливає на енергетичний спектр електронів і дірок у системі "КТ – протеїн", з урахуванням домішкових рівнів, анізотропії потенціалу зв'язування та просторової обмеженості [4, 5]. Теоретичне моделювання таких ефектів дозволяє краще зрозуміти фізичну природу взаємодії у таких біогібридних системах та сприяти створенню нових функціональних наноматеріалів з керованими властивостями [6].

У цій роботі розглянуто вплив однорідного магнітного поля на енергетичний спектр квазічастинок (електрона, дірки та екситона) у біонанокомплексі на основі напівпровідникової квантової точки, модифікованої білком. Метою роботи було проаналізувати зміну енергетичних рівнів квазічастинок різних радіусів за різної індукції магнітного поля з урахуванням ефектів квантового обмеження, за наявності донорної (акцепторної) домішки з урахуванням поляризації КТ під впливом електричного поля дипольної молекули HSA. Отримані результати будуть важливими для подальшого дизайну магніточутливих біосенсорів і досліджень керованої біоселективності на нанорівні.

2. Постановка проблеми

Розглянемо біонанокомплекс сферична напівпровідникова КТ з донорною (акцепторною) домішкою – HSA, який розташований в однорідному магнітному полі з індукцією **B**. Гамільтоніан такої системи із врахуванням поляризаційних ефектів КТ, спричинених дипольною молекулою HSA, можна представити у вигляді [7, 8]:

$$\hat{H}^{(e,h)} = \frac{1}{2\mu^{(e,h)}}(\boldsymbol{p} \mp e\boldsymbol{A})^2 + V_{pol}(\boldsymbol{r}) \mp \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_{QD}\varepsilon_0 r} + V(r), \tag{1}$$

$$V_{pol}(r,\vartheta) = -\frac{p^2 R_0^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3cos^2\vartheta+1}{(\boldsymbol{r}+l)^6}\left(\frac{\varepsilon_{QD}-\varepsilon_{HSA}}{\varepsilon_{QD}+2\varepsilon_{HSA}}\right), \tag{2}$$

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < R_0, \\ \infty, & r \geq R_0, \end{cases} \tag{3}$$

де p – дипольний момент молекули альбуміну (дипольний момент молекули сироваткового альбуміну крові людини становить близько 500 D (1 D = $3.33\cdot10^{-30}$ Кл·м)

[9]); ϑ – полярний кут у сферичній системі координат; $\mu^{(e,h)}$ – ефективна маса електрона (дірки); l – відстань від поверхні КТ до центру диполя HSA; R_0 – радіус КТ; ε_{QD}, ε_{HSA} – діелектричні проникності КТ та розчину альбуміну, відповідно. Діелектричну проникність розчину HSA, залежно від концентрації адсорбованих молекул HSA на поверхні КТ (ступеня заповнення поверхні КТ альбуміном θ), представимо лінійною функцією:

$$\varepsilon_{HSA} = (1 - \varepsilon_{H_2O})\theta + \varepsilon_{H_2O}, \tag{4}$$

де ε_{H_2O} – діелектрична проникність розчинника; $0 \le \theta \le 1$.

Використаємо симетричне представлення векторного потенціалу $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}]/2$ та представимо хвильову функцію у вигляді $\Psi(r, \vartheta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta, \phi)$. Тоді рівняння Шредінгера для радіальної функції набуде вигляду:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu^{(e,h)}}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \mp \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_{QD}\varepsilon_0 r} + \frac{1}{8}\mu^{(e,h)}\omega_c^{(e,h)2}r^2 + sg^{(e,h)}\mu_B B + \right.$$
$$\left. + \frac{\hbar\omega_c^{(e,h)}m}{2} - \frac{p^2R_0^3}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r+l)^6}\left(\frac{\varepsilon_{QD}-\varepsilon_{HSA}}{\varepsilon_{QD}+2\varepsilon_{HSA}}\right)\right]R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r), \tag{5}$$

де $\omega_c^{(e,h)} = \frac{eB}{\mu^{(e,h)}}$; μ_B – магнетон Бора; $g^{(e,h)}$ – спіновий g-фактор; $s = \pm 1/2$. Тут враховано, що середнє значення є меншим від $\cos^2\vartheta$ та більшим або рівним 1/3.

Для визначення енергетичного спектра частинки (електрона або дірки) у потенціальному полі, що описується рівнянням (5), скористаємось методом розкладання повного гамільтоніана за базисом власних функцій моделі, в якій враховано лише магнітне поле та нескінченну потенціальну яму.

Спершу розглянемо систему без кулонівської взаємодії та без поляризаційного потенціалу:

$$\widehat{H^0} = \frac{1}{2\mu^{(e,h)}}(p \mp eA)^2 + V(r). \tag{6}$$

За відсутності кулонівського потенціалу та поляризації розв’язок має вигляд:

$$E_{n,l,m}^{(0)} = \frac{\hbar^2\alpha_{nl}^2}{2\mu^{(e,h)}R_0^2} + \hbar\omega_c^{(e,h)}\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) + sg^{(e,h)}\mu_B B + \frac{\hbar\omega_c^{(e,h)}m}{2}, \tag{7}$$

де α_{nl} – нулі сферичної функції Бесселя $j_l(\alpha_{nl})$.

Для обчислення поправки до енергії, спричиненої кулонівським та поляризаційним потенціалом, обмежимося першим наближенням у межах теорії збурень:

$$\Delta E_{n,l,m} = \left\langle \psi_{n,l,m}^{(0)} \middle| V_C(r) + V_{pol}(r) \middle| \psi_{n,l,m}^{(0)} \right\rangle, \tag{8}$$

де $\psi^{(0)}_{nlm} = R^{(0)}_{nl}(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ – власні функції незбуреної задачі.

Внаслідок сферичної симетрії та усереднення по ϑ, інтегрувати можна лише по r:

$$\Delta E_{n,l} = \int_0^{R_0}\left[V_C(r) + V_{pol}(r)\right]\cdot\left|R_{nl}^{(0)}(r)\right|^2 r^2 dr. \tag{9}$$

Тоді повна енергія квазічастинки у сферичній ямі з магнітним полем:

$$E_{n,l,m} = E_{n,l,m}^{(0)} + \Delta E_{n,l}. \tag{10}$$

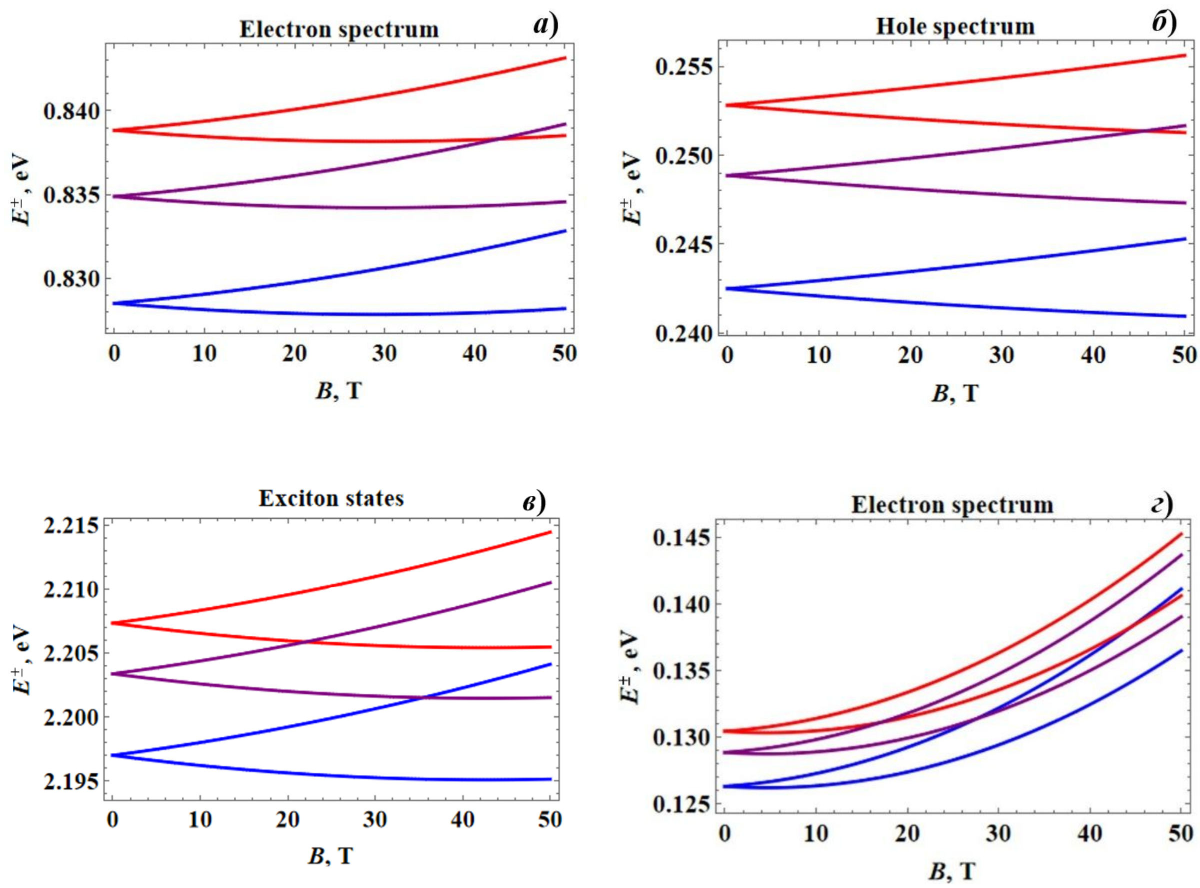
3. Результати розрахунків та їх обговорення

На рис. 1 наведено результати розрахунків енергії електрона й дірки в основному стані, а також енергії екситона у КТ CdTe з адсорбованими молекулами альбуміну, залежно від індукції магнітного поля з урахуванням спінового розщеплення. Параметри (ефективні маси носіїв заряду, діелектрична проникність, спіновий g-фактор, ширина забороненої зони) матеріалу CdTe взяті з роботи [10]. Дослідження проведені за різних радіусів КТ та різних концентрацій HSA (за різного ступеня заповнення поверхні КТ альбуміном).

З рисунків видно, що зі зростанням індукції магнітного поля енергетичні рівні як електрона, так і дірки загалом зростають, що пов'язано з додатковою локалізацією носіїв заряду в магнітному полі. Цей ріст є нелінійним через взаємодію кількох факторів, зокрема, впливу спінового розщеплення, кулонівської взаємодії в екситоні, наявності поляризаційного потенціалу на межі КТ – HSA.

Для різних радіусів КТ спостерігається чітка тенденція до пониження енергетичних рівнів при збільшенні радіуса. Із збільшенням ступеня заповнення поверхні КТ молекулами альбуміну (тобто концентрації HSA у колоїдному розчині) спостерігається незначне зростання енергії квазічастинок (не більше 10 меВ). Зі зростанням радіуса КТ цей ефект взагалі практично зникає (рис. 1з). У цьому випадку наявність альбуміну призводить до енергетичного зсуву, не більшого, ніж 1-2 меВ.

Зі збільшенням радіуса КТ величина енергетичного розщеплення у магнітному полі зменшується, що пов'язано зі зменшенням локалізації носіїв заряду. Величина енергетичного розщеплення у магнітному полі практично не залежить від концентрації альбуміну, що свідчить про незначний вплив поверхневого шару HSA на спінові ефекти та магнітну чутливість енергетичних рівнів.



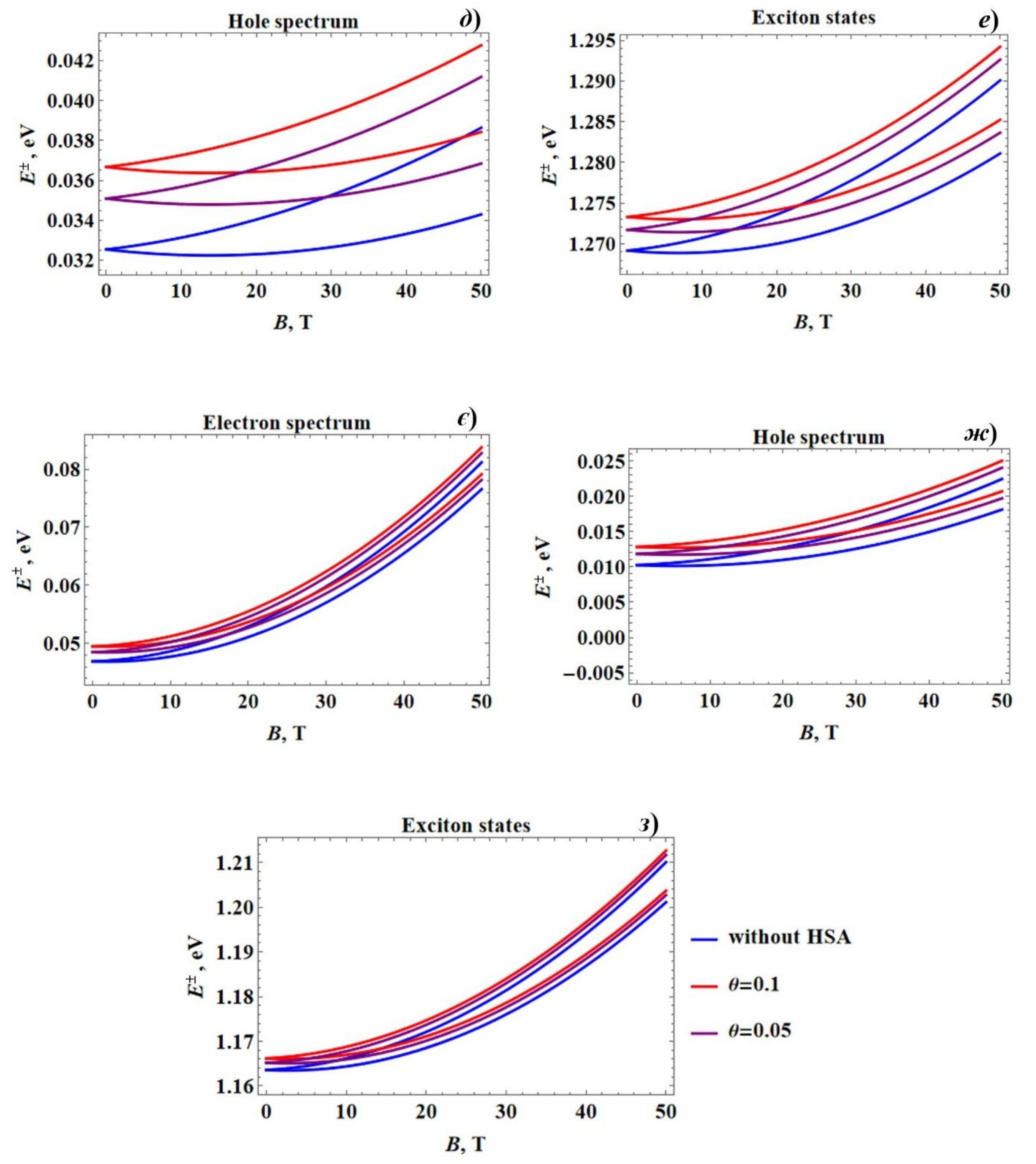


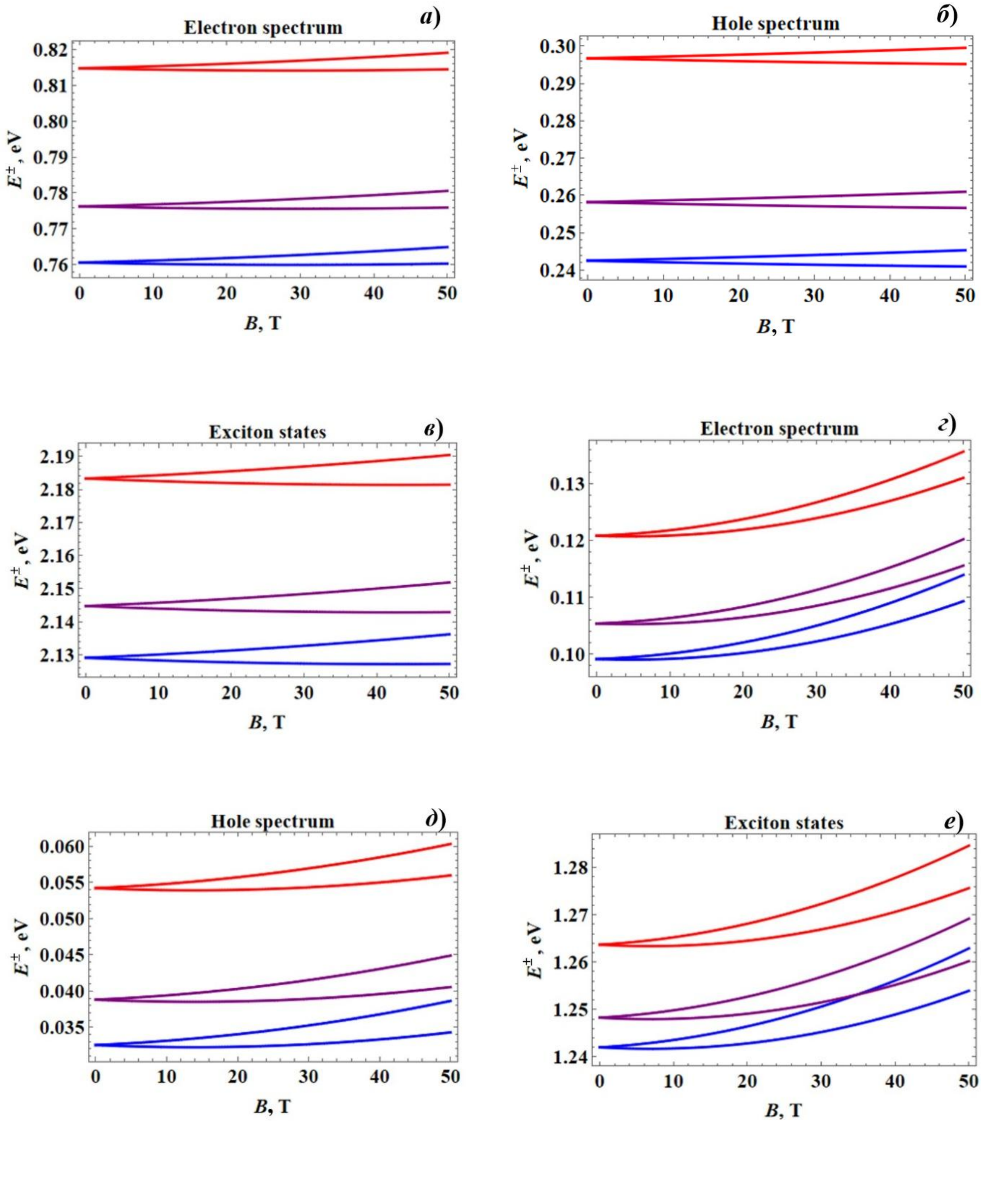
Рис. 1. Залежність енергії електрона (а, г, є), дірки (б, д, ж) та екситона (в, е, з) від індукції магнітного поля у біонанокомплексі КТ CdTe – HSA за різних значень ступеня заповнення поверхні КТ альбуміном та різних радіусів КТ:
R_0 = 2 нм (а, б, в); R_0 = 5 нм (г, д, е); R_0 = 8 нм (є, ж, з)

На рис. 2 приведено результати аналогічних розрахунків енергії електрона й дірки в основному стані, а також енергії екситона у біонанокомплексі HSA – КТ CdTe, яка містить донорну домішку, залежно від індукції магнітного поля з урахуванням спінового розщеплення. Дослідження проведені за різних радіусів КТ та різних концентрацій HSA (різний ступінь заповнення поверхні КТ альбуміном).

В цілому, закономірності є дуже подібними до описаних вище для КТ без домішки. Основними відмінностями є зміна енергії квазічастинок і зростання ролі альбуміну. У цьому випадку, для малих КТ ($R_0 = 2$ нм), енергетичний зсув внаслідок наявності HSA може складати більше 50 меВ (рис. 2в). Домішка створює локальне електростатичне поле, яке у комбінації з біомолекулою HSA посилює поляризаційний потенціал, що призводить до більшого енергетичного зсуву. Також за наявності донорної домішки підсилюється ефект спінового розщеплення енергетичних рівнів.

На рис. 3 приведено результати аналогічних розрахунків енергії електрона й дірки в основному стані, а також енергії екситона у біонанокомплексі HSA – КТ CdTe, яка містить акцепторну домішку. Як бачимо, енергія екситона не змінюється, як це було у випадку наявності донорної домішки. Однак, зменшується енергія електрона та збільшується енергія дірки в основному стані.

В обидвох випадках розглядалася немагнітна домішка.



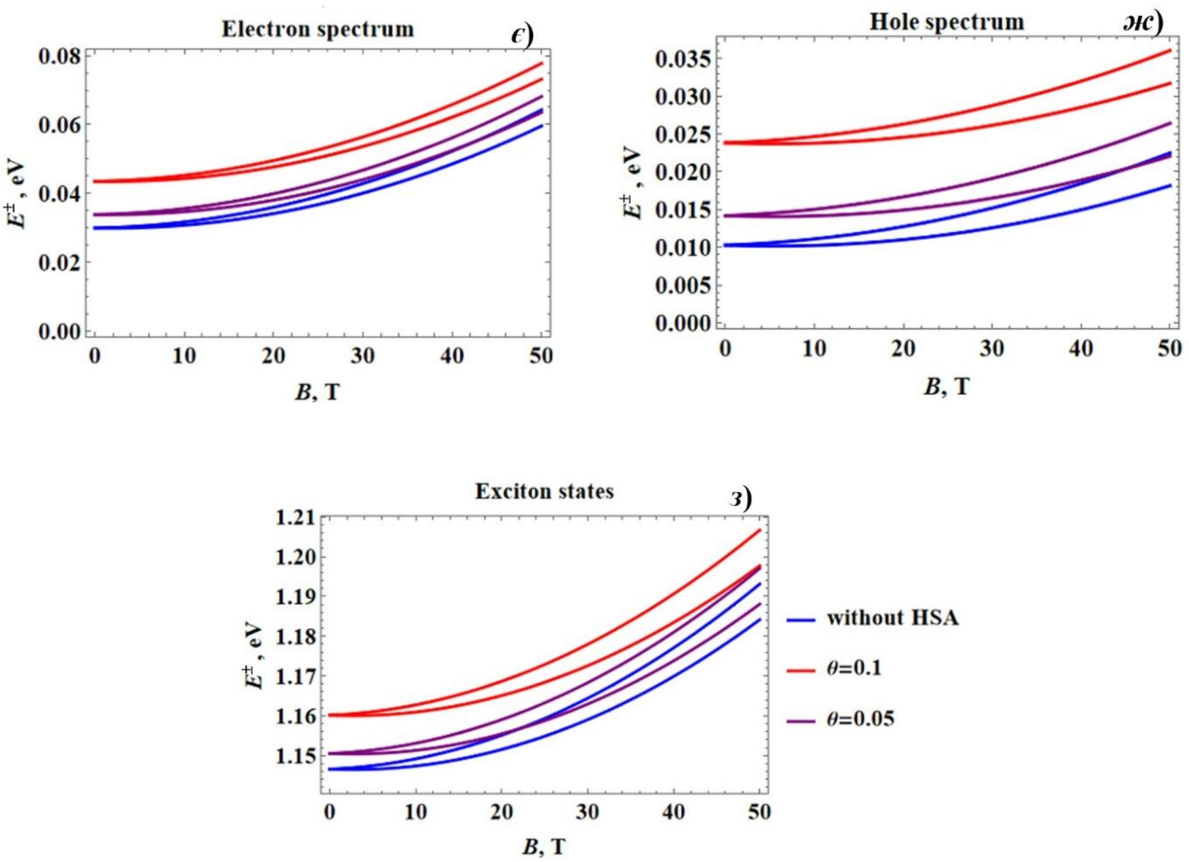
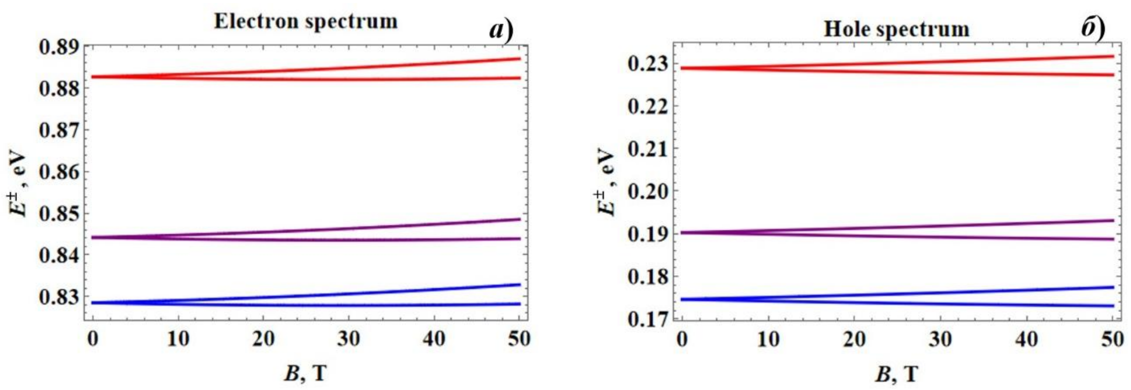


Рис. 2. Залежність енергії електрона (а, г, є), дірки (б, д, ж) та екситона (в, е, з) від індукції магнітного поля у біонанокомплексі КТ CdTe (з донорною домішкою) – HSA за різних значень ступеня заповнення поверхні КТ альбуміном та різних радіусів КТ: R_0 = 2 нм (а, б, в); R_0 = 5 нм (г, д, е); R_0 = 8 нм (є, ж, з)



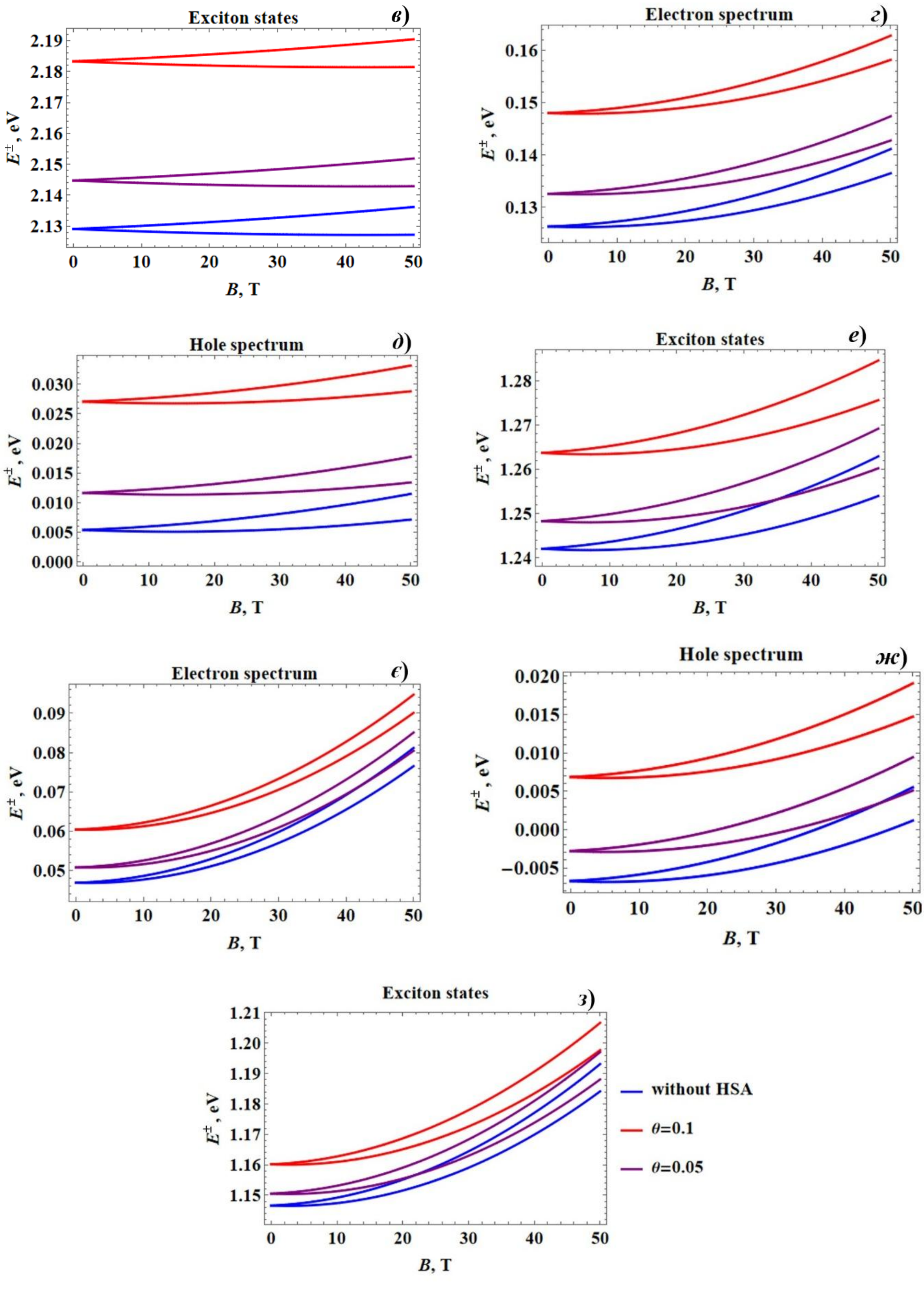


Рис. 3. Залежність енергії електрона (а, г, є), дірки (б, д, ж) та екситона (в, е, з)
від індукції магнітного поля у біонанокомплексі
КТ CdTe (з акцепторною домішкою) – HSA за різних значень
ступеня заповнення поверхні КТ альбуміном та різних радіусів КТ:
R_0 = 2 нм (а, б, в); R_0 = 5 нм (г, д, е); R_0 = 8 нм (є, ж, з)

Отримані результати є важливими для розвитку біомедичних технологій, зокрема магніточутливої діагностики та контролю доставки лікарських препаратів. Виявлена залежність положення енергетичних рівнів електрона, дірки та екситона у квантових точках CdTe від індукції магнітного поля, а також вплив біомолекул альбуміну та домішок на ці рівні, відкриває можливість створення керованих магнітним полем наносистем. Зокрема, такі біонанокомплекси можуть бути використані як магніточутливі флуоресцентні зонди для візуалізації тканин або клітин в умовах дії зовнішнього магнітного поля. Крім того, чутливість енергетичного спектра до магнітного поля дозволяє розробляти так звані “розумні” наноматеріали, які змінюють свої властивості у магнітному полі, що може бути корисним для контрольованого вивільнення ліків у цільових зонах організму [11]. Таким чином, дослідження сприяють створенню нових функціональних наноструктур для медичних застосувань, де поєднуються селективність біомолекул і зовнішнє магнітне керування.

Основні результати та висновки

1. Побудовано математичну модель сферичної квантової точки A^2B^6 з домішкою, яка взаємодіє з адсорбованими молекулами протеїнів, зокрема, альбуміну HSA, та розташована в однорідному магнітному полі.
2. У межах розробленої моделі досліджено енергетичний спектр електрона, дірки та екситона за різних значень радіуса КТ, ступеня покриття її поверхні HSA залежно від індукції зовнішнього магнітного поля з урахуванням спінового розщеплення Показано, що магнітне поле призводить до зростання енергії квазічастинок, що зумовлено підсиленням локалізації носіїв заряду.
3. Показано, що зі збільшенням радіуса КТ енергетичні рівні знижуються, а ефект впливу поверхневого шару HSA на енергетичний спектр стає менш вираженим.
4. Встановлено, що спінове розщеплення у магнітному полі підсилюється за наявності донорної чи акцепторної домішки, що пояснюється додатковою локалізацією електронів у самоузгодженому електричному полі, створеному домішкою та дипольною біомолекулою.
5. Отримані результати можна використати для створення новітніх наноматеріалів та біосенсорів, для медичної візуалізації та систем адресної доставки ліків, чутливих до магнітного поля. Це відкриває можливості керування їхніми властивостями за допомогою зовнішнього магнітного поля, що є важливим для точної діагностики та терапії.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Díaz-González M., De la Escosura-Muñiz A., Fernandez-Argüelles M.T. et al. Quantum dot bioconjugates for diagnostic applications. *Topic in Current Chemistry*. 2020. Vol. 378. P. 35. DOI: https://doi.org/10.1007/s41061-020-0296-6
2. Ehzari H., Safari M., Samimi M., Shamsipur M., Gholivand M.B. A highly sensitive electrochemical biosensor for chlorpyrifos pesticide detection using the adsorbent nanomatrix contain the human serum albumin and the Pd:CdTe quantum dots. *Microchemical Journal*. 2022. Vol. 179. P. 107424. DOI: https://doi.org/10.1016/j.microc.2022.107424

3. Kunachowicz D., Ściskalska M., Jakubek M., Kizek R., Kepinska M. Structural changes in selected human proteins induced by exposure to quantum dots, their biological relevance and possible biomedical applications. *NanoImpact*. 2022. V. 26. P. 100405. DOI: https://doi.org/10.1016/j.impact.2022.100405
4. Mkrtchyan M. A., Sarkisyan H.A. Influence of external magnetic field on intraband transitions in lens-shaped quantum dot. *Journal of Instrumentation*. 2024. Vol. 19, № C05014. P. C05014. DOI: https://doi.org/10.1088/1748-0221/19/05/C05014
5. Zeng Z., Garoufalis C.S., Baskoutas S. Combination effects of tilted electric and magnetic fields on donor binding energy in a GaAs/AlGaAs cylindrical quantum dot. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2012. Vol. 45, No 23. P. 235102. DOI: https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/23/235102
6. Pareek A., Kumar D., Pareek A., Gupta M.M. Advancing cancer therapy with quantum dots and other nanostructures: A review of drug delivery innovations, applications, and challenges. *Cancers*. 2025. Vol. 17, No 5. P. 878. DOI: https://doi.org/10.3390/cancers17050878
7. Shaer A., Elsaid M., Elhasan M. The magnetic properties of a quantum dot in a magnetic field. *Turkish Journal of Physics*. 2016. Vol. 40, No. 3. P. 209–218. DOI: https://doi.org/10.3906/fiz-1510-4
8. Raju G.G. Dielectrics in Electric Fields. New York – Basel: Marcel Dekker, Inc., 2003. 728 p.
9. Scheider W., Dintzis H.M., Oncley J.L. Changes in the electric dipole vector of human serum albumin due to complexing with fatty acids. *Biophysical Journal*. 1976. Vol. 16. P. 417–431. DOI: https://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495(76)85698-6
10. Корбутяк Д.В., Мельничук С.В., Корбут Є.В., Борисик М.М. Телурид кадмію: домішково-дефектні стани та детекторні властивості. Київ: Іван Федоров, 2000. 224 с.
11. Abdellatif A.A.H., Younis M.A., Alsharidah M., Al Rugaie O., Tawfeek H.M. Biomedical applications of quantum dots: overview, challenges, and clinical potential. *International Journal of Nanomedicine*. 2022. Vol. 17. P. 1951–1970. DOI: https://doi.org/10.2147/IJN.S357980

UDC 538.9+539.3

The influence of a magnetic field on the energy spectrum of quasiparticles in the A^2B^6 quantum dot–protein bionanocomplex

Olesya Dan'kiv, Vladyslav Kuhivchak, Oleksandr Viychuk, Oleh Kuzyk

Abstract. A mathematical model of the spherical A^2B^6 quantum dot with an impurity, which is in a magnetic field and interacts with adsorbed protein molecules, and is located in a uniform magnetic field, was constructed. Within the framework of the developed model, the influence of a uniform magnetic field on the energy spectrum of an electron, hole, and exciton in the semiconductor CdTe quantum dot–human serum albumin bionanocomplex has been investigated. The proposed model takes into account the polarization effects caused by the dipole potential of the protein shell, as well as spin splitting in a magnetic field. The regularities of change in the energy of quasiparticles on the radius of the quantum dot (undoped and with a donor or acceptor impurity), the concentration of albumin, and the magnitude of the magnetic field induction were established. It was established that with a decrease in the radius of the quantum dot, the influence of the protein shell becomes more significant. The influence of albumin and spin splitting in a magnetic field are enhanced in the presence of electrically active impurities. The obtained regularities indicate the possibility of controlling the optical and electrical properties of bionanocomplexes using an external magnetic field. The proposed results are important for the development of magnetosensitive biosensors and targeted drug delivery systems. Biohybrid structures quantum dot–protein can be used as fluorescent probes for visualization under the action of a magnetic field.

Keywords: bionanocomplex, quantum dot, protein, magnetic field, energy spectrum.

References

1. Díaz-González, M., De la Escosura-Muñiz, A., Fernandez-Argüelles, M. T., et al. (2020). *Quantum dot bioconjugates for diagnostic applications*, Topics in Current Chemistry, **378**, 35. https://doi.org/10.1007/s41061-020-0296-6
2. Ehzari, H., Safari, M., Samimi, M., Shamsipur, M., & Gholivand, M. B. (2022). *A highly sensitive electrochemical biosensor for chlorpyrifos pesticide detection using the adsorbent nanomatrix contain the human serum albumin and the Pd:CdTe quantum dots,* Microchemical Journal, **179**, 107424. https://doi.org/10.1016/j.microc.2022.107424

3. Kunachowicz, D., Ściskalska, M., Jakubek, M., Kizek, R., & Kepinska, M. (2022). *Structural changes in selected human proteins induced by exposure to quantum dots, their biological relevance and possible biomedical applications*, NanoImpact, **26**, 100405. https://doi.org/10.1016/j.impact.2022.100405
4. Mkrtchyan, M. A., & Sarkisyan, H. A. (2024). *Influence of external magnetic field on intraband transitions in lens-shaped quantum dot*, Journal of Instrumentation, **19** (C05014), C05014. https://doi.org/10.1088/1748-0221/19/05/C05014
5. Zeng, Z., Garoufalis, C. S., & Baskoutas, S. (2012). *Combination effects of tilted electric and magnetic fields on donor binding energy in a GaAs/AlGaAs cylindrical quantum dot*, Journal of Physics D: Applied Physics, **45** (23), 235102. https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/23/235102
6. Pareek, A., Kumar, D., Pareek, A., & Gupta, M. M. (2025). *Advancing cancer therapy with quantum dots and other nanostructures: A review of drug delivery innovations, applications, and challenges*, Cancers, **17** (5), 878. https://doi.org/10.3390/cancers17050878
7. Shaer, A., Elsaid, M., & Elhasan, M. (2016). *The magnetic properties of a quantum dot in a magnetic field*, Turkish Journal of Physics, **40** (3), 209–218. https://doi.org/10.3906/fiz-1510-4
8. Raju, G. G. *Dielectrics in Electric Fields*. Marcel Dekker, New York – Basel, 2003.
9. Scheider, W., Dintzis, H. M., & Oncley, J. L. (1976). *Changes in the electric dipole vector of human serum albumin due to complexing with fatty acids*, Biophysical Journal, **16**, 417–431. https://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495(76)85698-6
10. Korbutyak, D. V., Mel'nychuk, S. W., Korbut, E. V., & Borysyk, M. M. (2000). *Cadmium Telluride: Impurity-Defect States and Detector Properties*. Ivan Fedorov, Kyiv. [in Ukrainian]
11. Abdellatif, A. A. H., Younis, M. A., Alsharidah, M., Al Rugaie, O., & Tawfeek, H. M. (2022). *Biomedical applications of quantum dots: overview, challenges, and clinical potential*, International Journal of Nanomedicine, **17**, 1951–1970. https://doi.org/10.2147/IJN.S357980

Про авторів / About the authors

Олеся Даньків, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Olesya Dan'kiv, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine;

Владислав Кугівчак, аспірант, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Vladyslav Kuhivchak, Postgraduate, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine;

Олександр Війчук, аспірант, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Oleksandr Viychuk, Postgraduate, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine;

Олег Кузик, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Oleh Kuzyk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine.

Отримано / Received 09.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 04.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 253–261.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 253–261.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

UDC 517.946

Mathematical analysis of multi layers optic fiber models

Yuliya Kudrych[1], Kateryna Buryachenko[2]

[1]Vasyl' Stus Donetsk National University,
Research Department, Vinnytsia, Ukraine
ju.kudrych@donnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1079-2852

[2]Vasyl' Stus Donetsk National University,
Department of Applied Mathematics and Cybersecurity, Vinnytsia, Ukraine
k.buriachenko@donnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3363-2229

Abstract. This work is devoted to the development of qualitative methods for the study of nonlinear heterogeneous structures, models of which are elliptic equations, which describe complex nonlinear processes in heterogeneous media. They may also include the structures, consisting of several parts (phases or layers): multiphase solid and liquid materials; optic fiber and optic cable layers, anisotropic medium, etc. Relevance of the chosen direction is due to the fact that many processes in heterogeneous environments under conditions of high temperatures, heavy loads and significant deformations are described using nonlinear differential equations with discontinuous (singular) data (coefficients, right-hand side, boundary and initial conditions, etc.). At the same time, the concept of weak solutions that meet the modern needs of mathematical physics arose. Nonlinear differential equations have a complex structure, which actually makes them impossible to study by finding solutions in an explicit form. Therefore, the development of qualitative methods for their investigations becomes an extremely important tool. This paper considers mathematical models of multilayer optic fiber and cable, which consist of 3 and 5 different materials respectively with different properties. Using potential theory, the behavior of a weak solution of this equation at a fixed point is estimated and analyzed by the value of the nonlinear Wolff potential from the right hand side. We study pointwise properties that play a key role in the further study: expansion of positivity Harnack's inequalities, regularities and others. The paper discusses also the application of the obtained theoretical results for the problem of modeling and analyzing of optic fiber and optic cable modern technologies.

Keywords: multiphase (double phase) equations, optic fiber models, $(p(x), q(x))-$ Laplace, Wolff potential, weak solution, pointwise estimates.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-09

1. Introduction

We focus here on the development of qualitative methods of nonlinear analysis for the study of double-phase elliptic equations with variable exponents and their applications in modern optic technologies. The active development of the problem under consideration is evidenced by numerous high citing publications during the past 2-3 years in leading journals: V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, C. Scheven [2], V. Bögelein, M.Strunk [4], C. De Filippis, G. Mingione [5] and others. The double-phase elliptic equations of the divergence form were studied in first in the papers [9, 10] as models of strictly anisotropic materials and for the description of Lavrent'ev phenomenon. Hölder continuity and Harnack's inequality for bounded solutions to the homogeneous equation were obtained in [1], [6] under the same conditions, which we have herein .

These works were fundamental for further studies of the existence and regularity of solutions of various types of problems for such equations. The novelty of the results of this paper is the development of new functional methods of nonlinear analysis for the study of new actual problems, the mathematical models of which are double-phase elliptic equations with variable exponents. We introduce here the new potential estimates for the weak nonnegative solutions via nonlinear Wolff potential of the right hand side $f \in L^1$ of the equation and discuss their applications in the modeling of optic fiber devices.

The considering class of double-phase equations serves as mathematical model of media including structures which consist of several parts (phases or layers): multiphase solid and liquid materials; porous, anisotropic media; optic fiber layers, optic cable layers, light diodes, semiconductors devices, etc. The relevance of the chosen direction is due to the fact that many processes in heterogeneous environments under conditions of high temperature, heavy loads and significant deformations are described by using similar equations and with discontinuous (singular) data (coefficients, right-hand side, boundary and initial conditions, etc.). In our case this is a right hand side $f \in L^1$. At the same time, the concept of weak solutions is widely used, which meets the modern needs of mathematical physics. Nonlinear differential equations have a complex structure, which actually makes it impossible to study them by finding solutions in an explicit form. Therefore, the development of qualitative methods of analysis becomes an extremely important tool. In the present manuscript we obtain new pointwise estimates for the weak nonnegative solution via nonlinear Wolff potential from the right hand side of elliptic equations with non-standard growth conditions, $(p, q)-$ double-phase equations, with variable exponents: $p(x), q(x)$. Obtained in the manuscript new pointwise properties for the weak solutions via nonlinear Wolff potential from the right-hand side $f \in L^1$ will explore fundamental qualitative properties that play a key role in further studying the behavior of solutions: boundedness, expansion of positivity, Hölder continuity, and Harnack's inequalities.

The main results of the current paper are expansions of the works [4] and [8] for the case of double-phase elliptic equations with variable exponents $p(x)$, $q(x)$.

We consider also mathematical models of multilayer optic fiber and multilayer optic cable, which consist of 3 and 5 different materials with different properties and discuss the application of the obtained theoretical results for the problem of modeling and analyzing of optic fiber and optic cable modern technologies.

2. Statement of the problem

In a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ we consider a double-phase elliptic equation with variable exponents:

$$-\mathrm{div}\left[(|\nabla u|^{p(x)-2} + a(x)|\nabla u|^{q(x)-2})\nabla u\right] = f(x) \geq 0, \tag{1}$$

$$-\mathrm{div} A(x,\, \nabla u) = f(x) \geq 0, \tag{2}$$

where $f(x) \in L^1(\Omega)$. We assume that the function $A(x,\, \xi) = |\xi|^{p(x)-1} + a(x)|\xi|^{q(x)-1} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfies the conditions

1) $A(x,\, \xi)$ satisfies the Carathéodory condition,
2) $A(x,\xi)\xi \geq \mu_1(|\xi|^{p(x)} + a(x)|\xi|^{q(x)})$,
3) $|A(x,\xi)| \leq \mu_2(|\xi|^{p(x)-1} + a(x)|\xi|^{q(x)-1})$,

with some constants $\mu_1,\, \mu_2 > 0$.

We also assume that

$$0 \leq a(x) \in C^{0,\,\alpha}(\Omega), \quad \alpha \in (0,\, 1].$$

Let $\mathcal{M}$ be a set of all measurable functions, $p(x), q(x) : \Omega \to (1, \infty)$. For $p(x), q(x) \in \mathcal{M}$, we set:

$$p_- := \mathrm{essinf}_{x\in\Omega} p(x),\; q_- = \mathrm{essinf}_{x\in\Omega} q(x), p_+ := \mathrm{esssup}_{x\in\Omega} p(x),\; q_+ = \mathrm{esssup}_{x\in\Omega} q(x).$$

We assume the following for the powers of nonlinearity:

$$1 < p_- \leq p_+ \leq q_- \leq q_+ \leq \min\left(p_- + \alpha,\, \frac{n(p_- - 1)}{n - p_-}\right), \quad q_+ < n. \tag{3}$$

Let us introduce the necessary definitions.

Definition 1. Let $G(x,t) = t(t^{p(x)-1} + a(x)t^{q(x)-1})$. Then $W^{1,G}(\Omega)$ denotes the class of functions u that are weakly differentiable in Ω and satisfy the condition

$$\int\limits_\Omega G(a(x),\, |\nabla u|)\, dx < \infty.$$

Definition 2. We say that u is a weak solution to Eq. (2), if $u \in W^{1,G}(\Omega)$ and it satisfies the integral identity

$$\int\limits_\Omega A(x,\, \nabla u)\nabla\varphi\, dx = \int\limits_\Omega f\, \varphi\, dx, \tag{4}$$

for all $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{1,G}(\Omega)$.

In the case of Eq.(1) condition (4) takes the form:

$$\int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-1} + a(x)|\nabla u|^{q(x)-1}\right) \nabla\varphi\, dx = \int\limits_\Omega f\, \varphi\, dx. \tag{5}$$

We will prove the pointwise estimates for a nonnegative weak solution to the double-phase equation (1) in terms of the nonlinear Wolff potentials:

$$W^f_{1,p(x)}(x_0,\,R)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\rho_j^{p(x)-n}\int\limits_{B_{\rho_j}(x_0)} f\,dx\right)^{\frac{1}{p(x)-1}},\ \rho_j=\frac{R}{2^j},\ j=0,\,1,\,...$$

$$W^f_{1,q(x)}(x_0,\,R)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\rho_j^{q(x)-n}\int\limits_{B_{\rho_j}(x_0)} f\,dx\right)^{\frac{1}{q(x)-1}},\ \rho_j=\frac{R}{2^j},\ j=0,\,1,\,...,$$

under assumption that the series in the above formulae are convergent, i.e. the Wolff potentials are finite.

Let us note that double-phase elliptic equations of the divergence form were studied in first in the papers [9, 10] as models of strictly anisotropic materials and for the description of Lavrent'ev phenomenon. Hölder continuity and Harnack inequality for bounded solutions to the homogeneous equation (1) (with function $f\equiv 0$) were obtained in [1], [6] under conditions (3).

3. Main result

The main result of the present work is the following theorem.

Theorem 3. *Let $u\in W^{1,G}(\Omega)\cap L^{\infty}$ be a nonnegative weak solution to Eq. (1). Let conditions (3) be satisfied and let $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}:=\sup\limits_{x,y\in\Omega,\,x\neq y}\frac{|a(x)-a(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$. Assume also that the point $x_0\in\Omega$ is such that $B_{4\rho}(x_0)\subset\Omega$. Then there exist constants $c_1,\,c_2>0$ depending only on p_-, q_+, n, $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ and $||u||^{q_+-p_-}_{L^{\infty}(\Omega)}$ such that, under condition $a(x_0)=0$ the following estimate holds:*

$$c_1W^f_{1,p_-}(x_0,\rho)\le u(x_0)\le c_2\inf_{B_\rho(x_0)}u+c_2W^f_{1,p_-}(x_0,2\rho). \tag{6}$$

If $a(x_0)>0$ and $\rho_0^{\alpha}=\frac{a(x_0)}{4[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}}\ge\rho^{\alpha}$, then there exist constants $c_3,\,c_4>0$ depending on p_-, q_+, n, $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$, $||u||^{q_+-p_-}_{L^{\infty}(\Omega)}$ and $a(x_0)$ such that the following estimate

$$c_3W^f_{1,q_+}(x_0,\rho)\le\rho+u(x_0)\le 3\rho+c_4\inf_{B_\rho(x_0)}u+c_4W^f_{1,q_+}(x_0,2\rho) \tag{7}$$

holds.

Under conditions $a(x_0)>0$ and $\rho_0<\rho$ will be true the estimate

$$\begin{aligned}c_3W^f_{1,q_+}(x_0,\rho)+c_3(W^f_{1,p_-}(x_0,\rho)-W^f_{1,p_-}(x_0,\rho_0))\le\rho+u(x_0)\le\\ \le 3\rho+c_4\inf_{B_\rho(x_0)}u+c_4W^f_{1,q_+}(x_0,2\rho)+c_4(W^f_{1,p_-}(x_0,2\rho)-W^f_{1,p_-}(x_0,2\rho_0)).\end{aligned} \tag{8}$$

Proof. The result of this theorem will follow from the analogue result, proved in [4] for the double-phase equation with constant powers of nonlinearity p,q :

$$-\mathrm{div}\left[(|\nabla u|^{p-2}+a(x)|\nabla u|^{q-2})\nabla u\right]=f(x)\ge 0, \tag{9}$$

with

$$1 < p \le q \le \min\left(p+\alpha,\ \frac{n(p-1)}{n-p}\right), \quad q < n. \tag{10}$$

Taking into account our conditions (3), we have the statement of our theorem as a consequence of the analogous result for Eq.(9), see [4].

Remark 4. In the case $a(x_0) = 0$ inequality (6) yields the known result of Kilpeläinen and Malý [7], where there were obtained the pointwise estimates of solutions to a quasilinear elliptic equation with the p-Laplace and measure μ on the right-hand side with the help of the nonlinear Wolff potential $W^{\mu}_{\beta,p_-}(x_0, R)$:

$$W^{\mu}_{\beta,p_-}(x_0, R) := \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\mu(B_{\rho_j}(x_0))}{\rho_j^{n-\beta p_-}}\right)^{\frac{1}{p_- -1}}, \ \rho_j = \frac{R}{2^j},\ j = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{11}$$

4. Applications to the multi layers optic fiber models.

Consider the multilayer optic fiber model, described by the exponents:

$$p(x) = \begin{cases} p_1 & x\in\Omega_1, \\ p_2 & x\in\Omega_2, \\ p_3 & x\in\Omega_3, \\ \cdots & \\ p_n & x\in\Omega_n; \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} q_1 & x\in\Omega_1, \\ q_2 & x\in\Omega_2, \\ q_3 & x\in\Omega_3, \\ \cdots & \\ q_n & x\in\Omega_n, \end{cases} \tag{12}$$

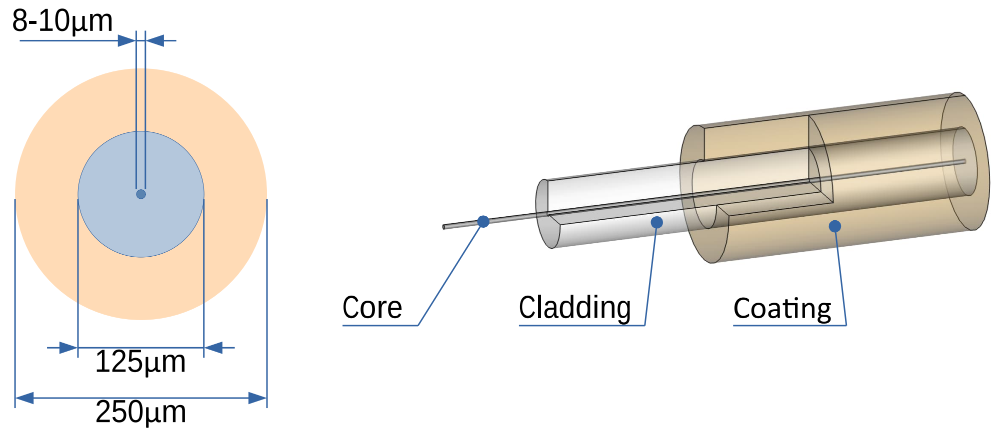
with the constant p_i, q_i, $i = 1, ..., n$, depending on the number of layers in the optic fiber. In this case of discrete-valued $p(x)$ and $q(x)$, we stand

$$p_- = \min_{i=1,..,n} p_i,\ \ q_- = \min_{i=1,..,n} q_i,\ \ p_+ = \max_{i=1,..,n} p_i,\ \ q_+ = \max_{i=1,...,n} q_i.$$

As usual, optic cable is a carefully designed multilayer designed to protect sensitive optic fiber and ensure its optimal performance under various environmental conditions and mechanical loads. The main components working in interaction include:

- **Core**: Ω_1, The innermost part of the cable, serving as a way to transmit light. It is usually made of high-purity glass or, less commonly for single-mode fibers, of plastics;
- **Cladding**: Ω_2, The optical layer immediately surrounding the core. Its material composition is chosen to have a lower refractive index than the core, which is a critical property that contributes to the complete internal reflection and retention of light in the core;
- **Buffer layer**: Ω_3, A protective coating applied directly over the shell. This layer provides substantial physical protection to the fiber, protecting it from minor abrasive damage, impact and exposure to environmental elements;
- **Power elements**: Ω_4, These components are strategically integrated into the cable structure to provide tensile strength and mechanical reinforcement, protecting the optic fiber from stretching, bending, and crushing;
- **Coating**: Ω_5, The outer protective layer of the cable. This layer provides comprehensive protection against moisture, ultraviolet radiation, chemicals and mechanical damage, and often serves to identify the cable.

For example, in the case of a optic fiber it is a carefully designed by three multilayer designed to protect sensitive optic fiber and ensure its optimal performance under various environmental conditions. The main components working in interaction include only two parts (core and cladding). Please, see the following single-mode optic fiber:



Taking into account that optic fiber consists of different kinds of materials, it is natural, that the value of powers of nonlinearity, $p(x), q(x)$ take a different values (12) on each of layers $\Omega_i,\ i = 1, ..., 5$.

Thus, the core usually consists of ultrapure quartz (SiO2). To achieve the required higher refractive index relative to the shell, quartz is precisely doped with elements such as germanium dioxide (GeO2) [11]. The ultra-purity of quartz glass is paramount to minimize light absorption and scattering, thereby ensuring high transmission efficiency. The cladding layer is usually made of pure quartz or fluorine-doped quartz, which effectively reduces its refractive index compared to the germanium-doped core [11]. Acrylate polymers or polyimides are used for buffer. These materials are chosen because of their adhesion to glass and protective properties. Aramid threads (e.g. Kevlar, Twaron) are wide use materials for power elements.The cable outer sheath is the most visible protective layer of the optical cable. Its main role is to protect the internal components from environmental factors, mechanical damage and fire dangers. The choice of sheath material is very application-dependent, balancing performance, cost and safety requirements, for instance: polyvinyl chloride, polyethylene, polyurethane and others [12].

For (12) the result of Theorem 3 can be applied. So, we can estimate the pointwise value of the solution $u(x_0)$ via nonlinear Wolff potential of the right-hand side $f \in L^1(\Omega)$, depending on the point $x_0 \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$.

Conclusions. The paper discusses a mathematical model of multilayer optic fiber and optic cable, which consists of 3 and 5 different materials respectively with different properties. Using potential theory, the behavior of a weak solution of this equation at a fixed point from the value of the nonlinear Wolff potential from the right side is analyzed. This result complements the work of one of the author [4] in the case of variable powers $p(x), q(x)$ of nonlinearity. Additionally, the paper discusses the application of the obtained results for the problem of modeling and analyzing of optic fiber modern technologies.

Conflict of interest and ethics. The authors declare no conflict of interests. The authors also declare full adherence to all journal research ethics policies, namely involving the participation of human subjects anonymity and consent to publish.

Acknowledgements. The first author, Yuliya Kudrych, is supported within the framework of the program 2025.06 "Science for Strengthening the Defense Capability and National Security of Ukraine"of the National Research Foundation of Ukraine (NRFU), project no. 2025.06/0090, state registration no. 0125U003181).

The authors also thank to their colleagues-physicists Mykola Pasichnyy and Vasyl Komarov for the fruitful discussions and clarifications in area of optic fiber modern technologies.

References

1. Baroni, P., Colombo, M., Mingione, G. (2015). *Harnack inequalities for double phase functionals,* Nonlin. Anal.: Theory, Meth. Appl., **121**, 206–222. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.11.001
2. Bögelein, V., Duzaar, D., Marcellini, P., Scheven, C. (2022). *Boundary regularity for elliptic systems with p,q-growth,* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **159**, 250–293. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2021.12.004
3. Bögelein,V., Strunk, M. (2024). *A comparison principle for doubly nonlinear parabolic partial differential equations,* Annali di Matematica Pura ed Applicata, **203** (2), 779—804. https://doi.org/10.1007/s10231-023-01381-4
4. Buryachenko, K., Skrypnik, I. (2017). *Pointwise estimates of solutions to the double phase elliptic equations,* Journal of Math.Sciences, **222**, 772–786. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3331-6
5. De Filippis, C., Mingione, G. (2023). *Regularity for Double Phase Problems at Nearly Linear Growth,* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **247** (5). https://doi.org/10.1007/s00205-023-01907-3
6. Esposito, L., Mingione, G. (2004). *Sharp regularity for functionals with (p; q)-growth,* J. Diff. Eq., **204** (1), 5–55. https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.11.007
7. Kilpeläinen, T., Maly, J. (1994). *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations,* Acta Math., **172** (1), 137–161. https://doi.org/10.1007/BF02392793
8. Kudrych, Yu., Savchenko, M. (2021). *Removable isolated singularities for anisotropic evolution p-Laplacian equation,* Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine, **35** (2), 137-151. https://doi.org/10.37069/1683-4720-2021-35-10
9. Zhikov, V. (1995). *On Lavrentiev's phenomenon,* J. Math. Phys., **3**, 264–269. https://doi.org/10.1007/BF02576198
10. Zhikov, V. (1986). *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory,* Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat., **50**, 675–710. https://doi.org/10.1070/IM1987v029n01ABEH000958
11. Fiber Optic Basics - Newport. https://www.newport.com/t/fiber-optic-basics
12. A Comparison of Different Cable Jacket Materials and Their Properties. https://remee.com/a-comparison-of-different-cable-jacket-materials-and-their-properties/

UDC 517.946

Математичний аналіз багатошарових оптоволоконних моделей

Юлія Кудрич, Катерина Буряченко

Анотація. Робота присвячена розробці якісних методів дослідження нелінійних гетерогенних структур, моделями яких є еліптичні рівняння, що описують складні нелінійні процеси в неоднорідних (гетерогенних) середовищах. Ці структури складаються з декількох частин (фаз або прошарків): багатофазних твердих і рідких матеріалів; оптичних волокон і оптичних кабелів, анізотропних середовищ, тощо. Актуальність обраного напрямку обумовлена тим, що багато процесів в неоднорідних середовищах в умовах високих температур, великих навантажень і значних деформацій описуються за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з розривними (сингулярними) даними (коефіцієнти, права сторона, граничні та початкові умови тощо). При цьому виникає концепція слабких розв'язків, які відповідають сучасним потребам математичної фізики. Нелінійні диференціальні рівняння мають складну структуру, що фактично робить неможливим їх вивчення та аналіз шляхом пошуку розв'язку у явному вигляді. Тому, розробка саме якісних методів дослідження стає надзвичайно важливим інструментом для їх подальшого вивчення. В роботі розглянуто математичні моделі багатошарового оптичного волокна та оптичного кабелю, які складаються з 3 та 5 різних матеріалів відповідно з різними властивостями. Використовуючи теорію нелінійних потенціалів, оцінюється та аналізується поведінка слабкого розв'язку цього рівняння в фіксованій точці через значення нелінійного потенціалу Вольфа від правої частини рівняння. Вивчаються поточкові властивості, які відіграють ключову роль у подальшому дослідженні та вивченні таких властивойстей розв'язків, як, наприклад, розширення за позитивністю, нерівність Гарнака, та ін. В статті розглянуто також застосування отриманих теоретичних результатів для вирішення проблеми моделювання та аналізу сучасних оптоволоконних технологій.

Ключові слова: багатофазні рівняння, оптоволоконні моделі, (p(x), q(x)) рівняння Лапласа, потенціал Вольфа, слабкий розв'язок, поточкові оцінки.

Список використаних джерел

1. Baroni P., Colombo M., Mingione G. Harnack inequalities for double phase functionals. *Nonlin. Anal.: Theory, Meth. Appl.* 2015. Vol. 121, P. 206–222. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2014.11.001
2. Bögelein V., Duzaar D., Marcellini P., Scheven C. Boundary regularity for elliptic systems with p,q-growth. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* 2022. Vol. 159, P. 250–293. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpur.2021.12.004
3. Bögelein V., Strunk M. A comparison principle for doubly nonlinear parabolic partial differential equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 2024. Vol. 203, № 2. P. 779—804. DOI: https://doi.org/10.1007/s10231-023-01381-4
4. Buryachenko K., Skrypnik I. Pointwise estimates of solutions to the double phase elliptic equations. *Journal of Math.Sciences.* 2017. Vol. 222, P. 772–786. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-017-3331-6
5. De Filippis C., Mingione G. Regularity for Double Phase Problems at Nearly Linear Growth. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 2023. Vol 247, № 5. DOI: https://doi.org/10.1007/s00205-023-01907-3
6. Esposito L., Mingione G. Sharp regularity for functionals with (p; q)-growth. *J. Diff. Eq.* (2004). Vol. 204, № 1. P. 5–55. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.11.007
7. Kilpeläinen T., Maly J. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math.* 1994. Vol 172, № 1. P. 137–161. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392793
8. Kudrych Yu. Savchenko M. Removable isolated singularities for anisotropic evolution p-Laplacian equation. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine.* 2021. Vol 35, № 2. P. 137-151. DOI: https://doi.org/10.37069/1683-4720-2021-35-10
9. Zhikov V. On Lavrentiev's phenomenon. *J. Math. Phys.* 1995. Vol 3, P. 264–269. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02576198
10. Zhikov V. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat.* 1986. Vol. 50, P. 675–710. DOI: https://doi.org/10.1070/IM1987v029n01ABEH000958
11. Fiber Optic Basics - Newport. https://www.newport.com/t/fiber-optic-basics

12. A Comparison of Different Cable Jacket Materials and Their Properties. https://remee.com/a-comparison-of-different-cable-jacket-materials-and-their-properties/

Про авторів / About the authors

Юлія Кудрич, молодший науковий співробітник науково-дослідної частини Донецького національного університету імені Василя Стуса, вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна;

Yulia Kudrych, Junior researcher, Research Department, Vasyl' Stus Donetsk National University, 21 600-richchia Str., Vinnytsia 21021, Ukraine;

Катерина Буряченко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра прикладної математики та кібербезпеки, Донецький національний університет імені Василя Стуса, вул. 600 річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна;

Kateryna Buryachenko, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Cybersecurity, Vasyl' Stus Donetsk National University, 21 600-richchia Str., Vinnytsia 21021, Ukraine.

Отримано / Received 31.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

МОДЕЛЮВАННЯ ОСВІТНІХ ПРОЦЕСІВ

Modeling of educational processes

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 262–271.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 262–271.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 004.4:378.147

Модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики

Сергій Бак[1], Галина Ковтонюк[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
sergiy.bak@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1508-2144

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukgm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3352-0358

Анотація. У статті представлено модель формування практичних умінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики. Модель побудовано на основі компетентнісного та діяльнісного підходів і реалізовано в межах освітньо-професійної програми «Комп'ютерна математика» Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Визначено структуру моделі, що включає мотиваційно-цільовий, змістово-процесуальний та рефлексивно-оцінювальний компоненти. Детально описано організацію навчальної комп'ютерної практики, у межах якої студенти опановують інтерфейс і базові команди LaTeX, набувають умінь форматування математичних текстів, формул, таблиць, графіки та створення презентацій. Навчальна комп'ютерна практика синхронізована з виконанням курсової роботи з функціонального аналізу, що забезпечує інтеграцію теоретичної та практичної підготовки. Результати впровадження моделі засвідчили підвищення рівня академічної культури здобувачів вищої освіти, їхню здатність оформлювати наукові документи відповідно до сучасних стандартів і готовність до використання LaTeX у подальшій освітній та дослідницькій діяльності.

Ключові слова: видавнича система LaTeX, навчальна комп'ютерна практика, майбутні бакалаври математики, модель формування практичних вмінь і навичок.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10

1. Вступ

У сучасній науковій комунікації чільне місце посідають цифрові інструменти для підготовки і верстки математичних текстів. Серед них особливе значення має система комп'ютерної верстки TeX([2]), розроблена Дональдом Кнутом у 1978 році з метою створення якісних технічних і наукових публікацій. Її надбудова — LaTeX([3]), розроблена Леслі Лампортом, стала найбільш популярним засобом оформлення математичних документів завдяки своїй гнучкості, точності й стандартизації форматів. LaTeX дозволяє відокремити зміст документа від його оформлення, надаючи користувачу змогу зосередитись на логічній структурі тексту, тоді як стиль і форматування забезпечуються шаблонами. Такий підхід сприяв широкому впровадженню LaTeX в академічному середовищі, особливо у математиці, фізиці, інформатиці та інженерії. На сьогодні LaTeX залишається незамінним інструментом для дослідників, які потребують точного відтворення математичних виразів, автоматичного створення посилань і покажчиків, а також професійного вигляду наукових документів.

Переваги використання системи LaTeX для оформлення наукових праць, зокрема її зручність, гнучкість і якість верстки математичних та технічних текстів, досліджено у статті [10].

У навчальному посібнику [6] представлено основи створення математичних документів у системі LaTeX, зокрема розглянуто засоби верстки формул, структуризації тексту та підготовки наукових праць.

У статті [1] запропоновано макроси на мові LaTeX, які спрощують і вдосконалюють оформлення посилань і виносок у математичних текстах. Авторка наводить приклади використання та готові рішення у вигляді пакета для підключення до документів.

В праці [7] проаналізовано можливості видавничої системи LaTeX для створення електронних підручників, окреслено її переваги у форматуванні навчального контенту та представлено практичні рекомендації щодо її використання у видавничій діяльності.

Знання LaTeX є необхідним для кожного, хто планує професійну діяльність у сфері математики. Воно забезпечує можливість грамотно і структуровано оформлювати курсові, дипломні та наукові роботи, подавати статті до фахових журналів і конференцій, а також формалізувати математичні ідеї у зрозумілому для академічної спільноти вигляді. Оскільки більшість міжнародних математичних журналів та конференцій приймають статті саме у форматі LaTeX, володіння цією системою відкриває студентам можливості для активної участі в науковому житті як в Україні, так і за її межами.

У статті [9] розглянуто особливості підготовки магістрів у галузях педагогічної освіти, природничих і фізико-математичних наук, зокрема звернено увагу на доцільність освоєння ними системи LaTeX з метою оформлення наукових і навчально-методичних праць. На нашу думку, освоєння LaTeX майбутніми математиками є доцільним навіть на рівні бакалавра, тобто вивчення LaTeX має бути невід'ємною частиною підготовки майбутніх бакалаврів математики.

2. Постановка проблеми

Зазначимо, що підготовка бакалаврів з математики у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського триває з 2016 року. За цей час відповідна освітньо-професійна програма зазнала низки змін і трансформацій. У підсумку остання версія програми за спеціальністю 111 Математика (E7 з 2025 року) отримала назву «Комп'ютерна математика» ([8]). Вважаючи доцільним набуття майбутніми бакалаврами за цією освітньою програмою практичних вмінь і навичок використання видавничої системи LaTeX, розробники програми включили до обов'язкових компонент навчальну комп'ютерну практику.

Мета статті: описати модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики.

3. Основні результати

Відповідно до сказаного вище автори статті розробили модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX (рис. 1). Перейдемо до її опису.

Рис. 1. Схема моделі формування практичних вмінь і навичок роботи з LaTeX

Загальна характеристика моделі. Модель формування практичних умінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики побудована на засадах компетентнісного та діяльнісного підходів і є складовою освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів математики.

Модель реалізується поетапно впродовж частково другого і третього років навчання (4 і 5 (6) семестри), та включає три основні компоненти: мотиваційно-цільовий, змістово-процесуальний та рефлексивно-оцінювальний.

1. Мотиваційно-цільовий компонент

Мета: сформувати усвідомлення важливості володіння LaTeX як інструменту професійної діяльності математика.

Зміст:

- коротке ознайомлення студентів із видавничою системою LaTeX у курсі інформатики та програмування (4-й семестр);

- демонстрація прикладів оформлення наукових статей, курсових, дипломних робіт у LaTeX;

- формування мотивації до використання системи при виконанні майбутніх навчальних і наукових завдань.

2. Змістово-процесуальний компонент

Мета: забезпечити поетапне формування практичних умінь роботи з LaTeX під час навчальної комп'ютерної практики.

Основні етапи:

Етап	**Зміст діяльності студента**	**Очікувані результати**
Ознайомчо-орієнтаційний	Інтерфейс оболонок (TeXmaker, WinEdt); основні команди та структура документа.	Розуміння структури документів LaTeX.
Репродуктивно-тренувальний	Набір, редагування, форматування текстів, створення заголовків, змісту, стилів.	Навички створення базових документів.
Продуктивно-творчий	Набір формул, робота з таблицями, графікою, створення публікацій, курсових і презентацій.	Здатність застосовувати LaTeX у навчальній і науковій діяльності.

Методи реалізації: практичні завдання, лабораторні роботи, індивідуальні консультації, мініпроєкти (оформлення власної статті чи курсової роботи у LaTeX).

3. Рефлексивно-оцінювальний компонент

Мета: визначити рівень сформованості практичних умінь і навичок роботи з LaTeX.

Критерії сформованості:

- **технічний** — володіння інтерфейсом і базовими командами;
- **технологічний** — уміння створювати та редагувати складні документи, таблиці, формули;
- **професійно-комунікативний** — здатність оформити курсову, дипломну чи статтю відповідно до академічних стандартів;
- **творчо-рефлексивний** — самостійне застосування LaTeX для власних наукових завдань.

Форми контролю: захист комп'ютерної практики, демонстрація власного оформленого документа, самооцінювання.

Результат: сформовані практичні вміння роботи з LATEX і готовність до їх використання у науковій та освітній діяльності.

Для реалізації цієї моделі було введено відповідні теми в курс інформатики та програмування (4-й семестр) та розроблено робочу програму навчальної комп'ютерної практики (5(6)-й семестр). Відповідно до освітньо-професійної програми «Комп'ютерна математика» ([8]), навчальна комп'ютерна практика є першою серед усіх видів практик. Зауважимо, що короткий аналіз практичної підготовки за цією освітньою програмою зроблено в статті [5]. Навчальну комп'ютерну практику здобувачі вищої освіти проходять у 5-му семестрі (до 2026 року) впродовж двох тижнів. З 2027 року практику перенесено на 6-й семестр.

Метою цієї практики є формування у майбутніх бакалаврів математики практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX для подальшого використання при підготовці наукових публікацій, курсових і дипломних робіт з математики. До завдань навчальної комп'ютерної практики належать ([4]):

- вивчення студентами інтерфейсу оболонок (Texmaker, WinEdt) видавничої системи LATEX;

- вивчення синтаксису основних команд програмного пакету LATEX;

- формування студентами навичок набору та редагування тексту в LATEX;

- набуття навичок форматування тексту і документів в LaTeX, використання різних стилів документів; набуття навичок створення заголовків і змісту в LATEX; верстка статті, курсової і дипломної робіт;

- набуття навичок набору математичних формул в LATEX;

- формування навичок роботи з таблицями і графікою в LATEX;

- набуття навичок створення презентацій в LATEX.

Розглянемо детальніше зміст навчальної комп'ютерної практики. На початку практики керівник проводить інструктаж з техніки безпеки та ознайомлює студентів-практикантів з програмою практики, видає завдання і критерії оцінювання, інформує про систему звітності з практики. Відповідно до цієї програми здобувачі вищої освіти мають вивчити інтерфейс оболонок видавничої системи LATEX, засвоїти синтаксис основних команд цього програмного пакета, а також набути навичок набору й редагування математичних текстів.

Здобувачі вищої освіти повинні підготувати індивідуальний проєкт, який включає такі складові:

1. Теоретична частина: призначення системи LATEX, особливості її синтаксису; інтерфейс оболонок LATEX; форматування тексту та документів; використання різних стилів документів; створення заголовків і змісту; особливості набору формул; створення таблиць; робота з графікою; створення презентацій засобами LATEX.

2. Практична частина: текст курсової роботи і презентації виступу на її захисті в середовищі LATEX.

Варто зазначити, що в тому ж семестрі навчальним планом передбачено виконання курсової роботи з функціонального аналізу. Тему та наукового керівника студенти обирають на початку семестру. Упродовж першої половини семестру вони опрацьовують літературні джерела та формують змістовну основу курсової роботи. Відповідно до навчального плану, навчальна комп'ютерна практика проводиться у другій половині семестру. До цього часу здобувачі вже мають підготовлений матеріал курсової роботи, який можна оформити за допомогою видавничої системи LaTeX під час проходження практики.

Під час практики керівник ознайомлює студентів з видавничою системою LaTeX, інтерфейсом її оболонок (Texmaker, WinEdt), допомагає студентам встановити відповідне програмне забезпечення, проводить консультації щодо основних можливостей форматування і редагування документів в цій системі, здійснює методичний супровід виконання індивідуальних проєктів. Студентам на початку практики також надається необхідна література з можливостей системи LaTeX, зразки файлів курсової роботи та презентації. До основного файлу «!!!Kursova.tex», який містить основні налаштування документу, оформлення титульної сторінки і змісту, підключаються файли анотації, вступу, розділів, загальних висновків і списку використаних джерел (рис. 2). Кожен із цих файлів

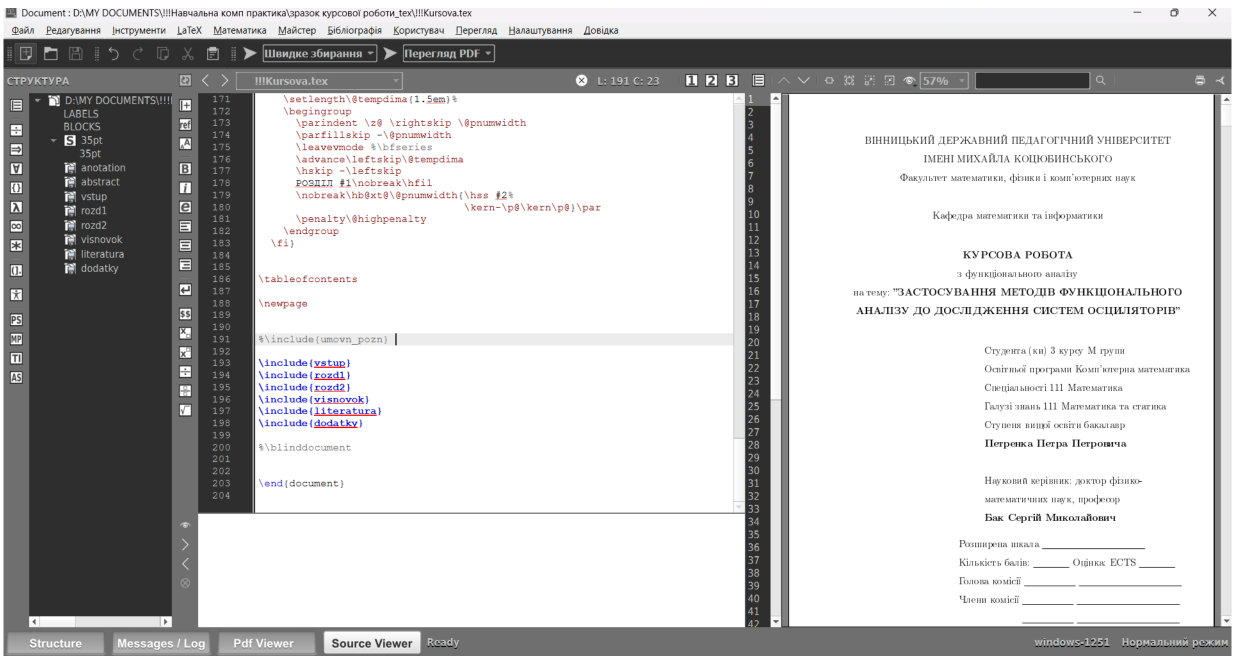


Рис. 2. Вікно оболонки Texmaker: основний файл курсової роботи

створюються і наповнюється окремо. Наприклад, на рис. 3 зображено файл «rod2.tex», який містить другий розділ курсової роботи. Така логічна структура полегшує роботу над великим документом.

Під час оформлення курсової роботи обов'язковим є використання стандартних оточень equation, figure, theorem, lemma, definition, corollary, proof тощо. Посилання на всі нумеровані об'єкти та літературні джерела мають здійснюватися за допомогою міток. Презентацію студенти створюють за допомогою класу документу «beamer» (рис. 4).

За результатами практики практикант повинен впродовж трьох днів після її завершення підготувати і захистити звіт. До звіту обов'язково додаються всі файли курсової роботи і презентації.

Схема звіту про проходження навчальної комп'ютерної практики така:

- Вступ – обґрунтування актуальності практики, опис індивідуального завдання на практику.

- Основна частина (звіт з навчально-дослідного проєкту відповідно до індивідуального завдання):

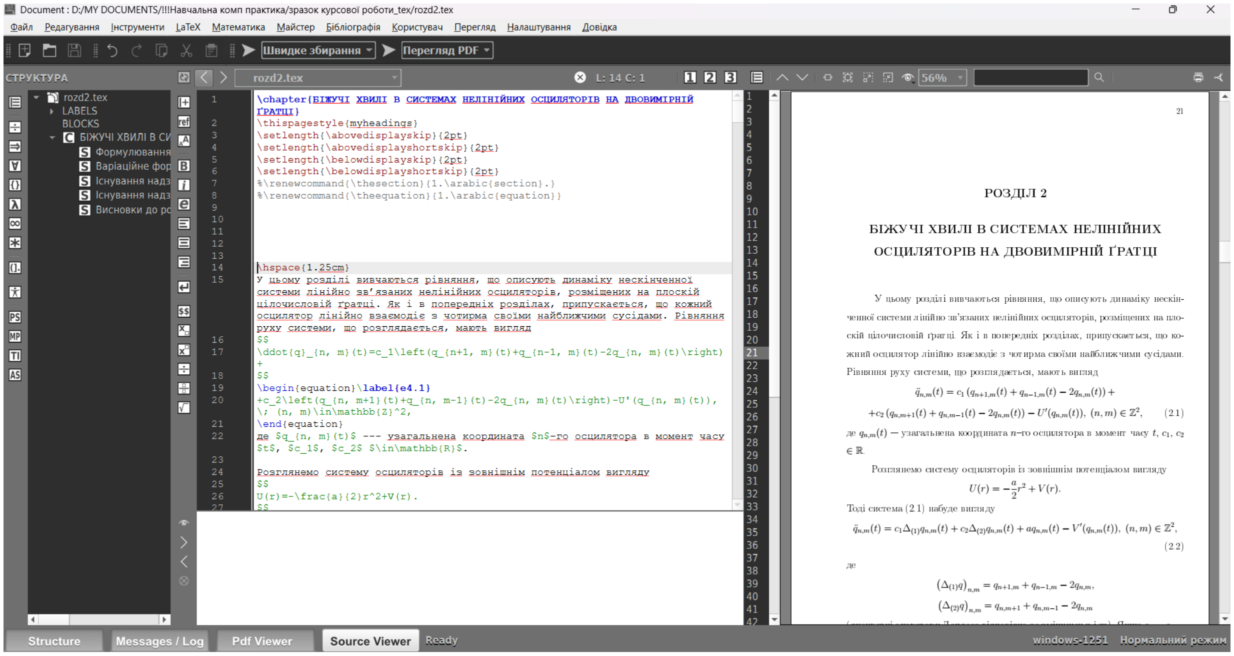


Рис. 3. Вікно оболонки Texmaker: файл розділу

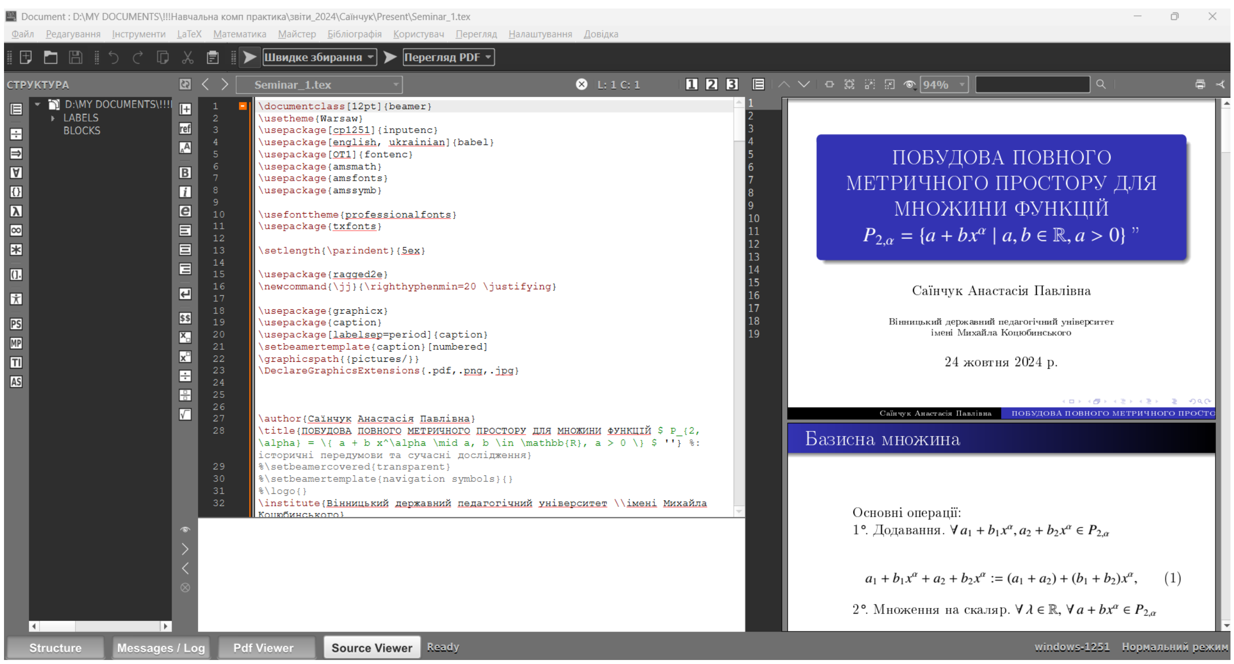


Рис. 4. Вікно оболонки Texmaker: файл презентації

1. Теоретична частина: призначення системи LaTeX, особливості синтаксису; інтерфейс оболонок LaTeX; форматування документів, форматування тексту і документів в LaTeX; використання різних стилів документів; створення заголовків і змісту в LaTeX; особливості набору формул, створення таблиць; робота з графікою; створення презентацій в LaTeX.

2. Практична частина: Основні фрагменти тексту курсової роботи з математики зі скріншотами з LaTeX; основні фрагменти прзентації до курсової роботи зі скріншотами з LaTeX.

- Загальні висновки.

- Список використаної літератури.

Зауважимо, що навчальна комп'ютерна практика для здобувачів вищої освіти за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерна математика» проводиться на базі факультету математики, фізики і комп'ютерних наук Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського з 2021 року. Результати практики щороку показували, що студенти-практиканти переважно мають гарні вміння самостійної роботи, достатню математичну та інформатичну підготовку, які дозволяли виконувати завдання практики і досягати її мети. Сформовані практичні вміння і навички ставали у нагоді не тільки під час виконання курсових і дипломних робіт, але й при оформленні наукових статей і тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Висновки. Отже, побудована модель спрямована на формування базових практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX, що не лише підвищує академічну грамотність і культуру оформлення математичних текстів, але й сприяє розвитку навичок логічного структурування, професійної самореалізації та інтеграції у міжнародну наукову спільноту.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Hubal H. M. Improvement of references and footnotes in mathematical and other texts by creating macros in the LaTeX programming language. *International Journal on Information Technologies and Security.* 2023. Vol. 15, № 3. P. 15–22. DOI: http://dx.doi.org/10.59035/FBCY3490
2. Knuth D. E. The TeXbook. New York: Addison–Wesley Publishing Company, 1984. 496 p.
3. Lamport L. LaTeX: A Document Preparation System. 2nd Edition. New York: Addison–Wesley Publishing Company, 1994. 288 p.
4. Бак С. М. Робоча програма навчальної комп'ютерної практики для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 111 Математика, додатковою предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика), освітньо-професійна програма «Комп'ютерна математика». Вінниця: ВДПУ, 2024. 5 с.
5. Бак С. М., Ковтонюк М. М., Ковтонюк Г. М. Практична підготовки майбутніх бакалаврів математики в педагогічному університеті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми:* збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ «Друк плюс», 2025. Вип. 75. С. 34–43. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2025-75-34-42
6. Гарасим Я. С., Романенко А. В., Хапко Р. С. LaTeX: створення математичних документів: навч. посібн. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. 140 с.
7. Грищенко Т. Б. Створення електронних підручників засобами видавничої системи LaTeX. *Поліграфічні, мультимедійні та web-технології:* колективна монографія / Т. Б. Грищенко, О. М. Нікітенко, Ж. В. Дейнеко. Харків: ТОВ «Друкарня Мадрид», 2021. С. 80–96.
8. Ковтонюк М. М. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерна математика» (СВО бакалавр, спеціальність E7 Математика) / М.М. Ковтонюк, С.М. Бак, Г.М. Ковтонюк, Л.А. Тютюн, Д.А. Семенець, А.В. Дідусенко, І.І. Кухта. Вінниця: ВДПУ, 2025. 22 с.

9. Лазурчак І. Особливості підготовки магістрів в галузях педагогічної освіти, природничих та фізико-математичних наук. *Молодь і ринок.* 2014. Вип. 116, № 9. С. 18–22.
10. Лисенко С. М., Крищук А. Ф., Дзюбак Ю. П. Дослідження переваг застосування LaTex при оформленні наукових праць. *Вісник Хмельницького національного університету.* 2012. № 5. С. 225–234.

UDC 004.4:378.147

Model for developing practical skills and abilities in working with LaTeX in future bachelors of mathematics

Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk

Abstract. The article presents a model for developing practical skills and abilities in working with the publishing system LaTeX among future bachelors of mathematics. The model is based on competency-based and activity-oriented approaches and is implemented within the educational and professional program “Computer Mathematics” at Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University. The structure of the model includes motivational-target, content-procedural, and reflective-evaluative components. The article describes in detail the organization of the educational computer internship, during which students master the interface and basic commands of LaTeX, acquire skills in formatting mathematical texts, formulas, tables, graphics, and creating presentations. The educational computer internship is synchronized with the coursework in Functional Analysis, ensuring the integration of theoretical and practical training. The results of the model implementation demonstrate an increased level of academic culture among students, their ability to prepare scientific documents in accordance with modern standards, and their readiness to use LaTeX in further educational and research activities.

Keywords: publishing system LaTeX, educational computer internship, future bachelors of mathematics, model for developing practical skills and abilities.

References

1. Hubal, H. M. (2023). *Improvement of references and footnotes in mathematical and other texts by creating macros in the LaTeX programming language,* International Journal on Information Technologies and Security, **15** (3), 15–22. http://dx.doi.org/10.59035/FBCY3490
2. Knuth, D. E. (1984). *The TeXbook,* Addison–Wesley Publishing Company, New York.
3. Lamport, L. (1994). *LaTeX: A Document Preparation System,* 2nd Edition, Addison–Wesley Publishing Company, New York.
4. Bak, S. M. (2024). *Working program of educational computer internship for higher education applicants majoring in 111 Mathematics with an additional subject specialization in 014.04 Secondary education (Mathematics), educational and professional program "Computer mathematics* VSPU, Vinnytsia. [in Ukrainian]
5. Bak, S. M., Kovtoniuk, M. M., Kovtoniuk, H. M. (2025). *Practical training of future bachelors of mathematics at the pedagogical university,* Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training: Methodology, Theory, Experience, Problems, **75**, 34–43. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2025-75-34-42
6. Harasym, Ya. S., Romanenko, A. V., Khapko, R. S. (2002). *LaTeX: creating mathematical documents: textbook,* Publishing center of Ivan Franko National University of Lviv, Lviv. [in Ukrainian]
7. Hryshchenko, T. B., Nikitenko, O. M., Deineko, Zh. V. (2021). *Creating electronic textbooks using the LaTeX publishing system,* in *Printing, multimedia and Web technologies: a collective monograph,* Madrid Printing House LLC, Kharkiv, 80–96.
8. Kovtoniuk, M. M., Bak, S. M., Kovtoniuk, H. M., Tiutiun, L. A., Semenets, D. A., Didusenko, A. V., Kukhta, I. I. (2025). *Educational and professional program ”Computer Mathematics” (bachelor’s degree, specialty E7 Mathematics)*, VSPU, Vinnytsia. [in Ukrainian]

9. Lazurchak, I. (2014). *Peculiarities of master's training in the fields of pedagogical education, natural and physical-mathematical sciences,* Youth and Market, **9** (116), 18–22. [in Ukrainian]
10. Lysenko, S. M., Kryshchuk, A. F., Dziubak, Yu. P. (2012). *Study of the advantages of using LaTeX in the preparation of scientific papers*, Herald of Khmelnytskyi National University, **5**, 225–234. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Сергій Бак, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Serhii Bak, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Галина Ковтонюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Halyna Kovtoniuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 01.08.2025
Прийнято до друку / Accepted 29.10.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 272–284.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 272–284.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147:004.9:37.013.42

Моделювання цифрової компетентності майбутніх інженерів: теоретико-методологічні засади та базові характеристики

Роман Гуревич[1], Максим Євтухівський[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра цифрових технологій і професійної освіти, м. Вінниця, Україна
r.gurevych2018@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1304-3870

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра цифрових технологій і професійної освіти, м. Вінниця, Україна
evtuhivskiy@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-0295-2546

Анотація. У статті розглянуто теоретико-методологічні засади формування цифрової компетентності (ЦК) майбутніх інженерів у контексті трансформації сучасної вищої технічної освіти. Проаналізовано еволюцію поняття «цифрова компетентність» від комп’ютерної грамотності до багатовимірної категорії, що інтегрує знання, вміння, навички, цінності та установки, необхідні для успішної професійної діяльності в умовах цифрової економіки. Визначено базові характеристики системи формування ЦК, серед яких: цілісність і системність, гнучкість та адаптивність, інноваційність, практико орієнтованість, відкритість та інтегрованість у міжнародний освітній простір. На основі міжнародних (DigComp, UNESCO, EntreComp) та національних нормативно-методичних документів обґрунтовано індикатори вимірювання рівня ЦК студентів технічних університетів.

Особливу увагу приділено досвіду закладів вищої освіти м. Вінниці, де реалізуються інноваційні освітні практики, зокрема дуальна освіта, використання VR / AR-технологій, впровадження проєктного підходу й інтеграція освітнього процесу з потребами регіонального ринку праці. Розроблено методичні рекомендації щодо забезпечення ефективності системи формування ЦК, спрямовані на поєднання академічної підготовки з практичною діяльністю студентів.

Наукова новизна роботи полягає в комплексному аналізі структурних компонентів та характеристик системи формування ЦК інженерів, що дозволяє поєднати освітні, наукові й виробничі складники. Практичне значення дослідження полягає у можливості застосування запропонованих положень у процесі модернізації освітніх програм технічних університетів.

Ключові слова: цифрова компетентність, майбутні інженери, технічний університет, індикатори, система, цифровізація освіти.

1. Вступ

Сучасна цифрова трансформація промисловості, виробництва та суспільних інститутів створює нові вимоги до професійної підготовки інженерів. Технологічні тренди – інтернет речей (IoT), великі дані (Big Data), штучний інтелект (AI), кібер-фізичні системи й автоматизація –

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-11

змінюють зміст професійних функцій: очікується не лише володіння традиційними інженерними знаннями, а й здатність розуміти, інтегрувати і впроваджувати цифрові рішення у виробничі процеси і технічні проєкти. В сучасній літературі це підкреслюється як необхідність цілеспрямованої «цифрової трансформації» інженерної освіти, що охоплює не тільки окремі цифрові інструменти, а й зміни в педагогічних підходах, організаційних процесах і стратегіях університету [41, с. 1–3].

Поряд із фаховими компетентностями інженер має формувати цифрову компетентність (ЦК) як інтегральну якість – тобто сукупність знань, умінь і ставлень, що забезпечують ефективне й безпечне використання цифрових технологій у професійній діяльності. Європейська рамка DigComp окреслює ЦК через п’ять основних сфер (інформаційна грамотність, комунікація і співпраця, створення цифрового контенту, безпека, розв’язання проблем) і деталізує вісім рівнів професійної майстерності, що дає змогу формалізувати очікувані результати навчання та розробляти інструменти оцінювання. Такий підхід є корисним орієнтиром для розробки навчальних програм для майбутніх інженерів [31, с. 9–12].

Університети виступають ключовою ланкою в системі підготовки інженерів нового типу: вони не лише передають фахові знання, а й створюють інституційні умови для набуття ЦК – через оновлення навчальних програм, зміни методів оцінювання, розвиток цифрової інфраструктури та налаштування співпраці з промисловими партнерами. Європейська політика з цифрової освіти і наявні дорожні карти підкреслюють роль закладів вищої освіти (ЗВО) як центру формування «цифрової готовності» суспільства й економіки (зокрема, у стратегічних пріоритетах і заходах DEAP 2021–2027). Це також передбачає підготовку викладачів, створення якісних цифрових освітніх ресурсів і механізмів сертифікації цифрових навичок [34, с. 6–11].

Формування ЦК майбутніх інженерів стало предметом дослідження як зарубіжних, так і українських учених. Серед зарубіжних науковців варто відзначити К. Бассета, Ж. Гере, М. Деузе, Дж. Поттера, Дж. Тітко й ін., які зосереджують увагу на розвитку цифрових умінь та їхньому впливі на професійну підготовку. Серед українських дослідників цієї проблематики значний внесок зробили В. Биков, О. Буров, Г. Генсерук, О. Глазунова, Р. Гуревич, Н. Дементієвська, Ю. Єчкало, В. Кобися, Л. Коношевський, О. Коношевський, С. Литвинова, О. Овчарук, Н. Опушко, О. Пінчук, О. Спірін, Л. Шевченко й ін.

2. Постановка проблеми

Важливо зауважити, що формування ЦК має бути інтегрованим у фахову підготовку – тобто цифрові навички повинні поєднуватися з профільними дисциплінами, а не розглядатися в ізоляції. Українські дослідження свідчать про нагальну потребу інтеграції фахових і цифрових компонентів у навчальні плани: в моделях цифрової компетентності для студентів ЗВО підкреслюється, що цифрова складова стає складовою професіоналізму незалежно від спеціальності [14, с. 348–350].

На регіональному прикладі вінницьких науковців також відзначається акцент на дидактичних і організаційних умовах формування ЦК: дослідники з Вінниці наголошують на необхідності практико-орієнтованих форм навчання, включення курсових і проєктних робіт із застосуванням ІТ-інструментів, а також на важливості підготовки викладачів і створення професійно орієнтованого цифрового освітнього середовища. Ці підходи синхронізуються з міжнародними рекомендаціями й дають практичні підказки для розбудови системи формування ЦК майбутніх інженерів [47; 51, с. 7–13].

Мета статті. На підставі аналізу міжнародних рамок, політик і вітчизняних досліджень мета цієї роботи полягає в окресленні базових характеристик системи формування ЦК майбутніх інженерів, що включає: (1) структурні компоненти компетентності; (2) освітньо-методичні та дидактичні умови інтеграції цифрових навичок у фахову підготовку; (3) інституційні механізми співпраці університету з промисловістю; (4) підходи до оцінювання та верифікації рівня ЦК. Така цілеспрямована система дозволить формувати інженера, здатного ефективно працювати в цифровому виробничому середовищі і забезпечувати технологічні інновації на рівні підприємства та сектору. В статті деталізована кожна з названих характеристик та практичні рекомендації з їх реалізації).

3. Основні результати

Еволюція поняття «цифрова компетентність». Сучасне розуміння ЦК сформувалося поступово, еволюціонуючи від вузького трактування «комп'ютерної грамотності» до комплексного поняття, що інтегрує знання, уміння, навички, ставлення та цінності [2, с. 47]. Дослідники наголошують, що ЦК є невід'ємною складовою ключових компетентностей XXI століття, визначених європейськими освітніми стандартами [15, с. 19].

О. І. Пометун розглядає ЦК як інтегративну якість, що поєднує технічну, інформаційну, комунікативну та соціокультурну складові [26, с. 52]. Зарубіжні автори, зокрема A. Ferrari, акцентують на необхідності критичного й креативного застосування цифрових технологій у професійній діяльності [36, с. 4]. Вінницькі дослідники, зокрема Т. М. Засєкіна, підкреслюють значення цифрової грамотності як бази для формування інноваційного мислення в студентів технічних і педагогічних університетів [15, с. 28].

Європейська комісія запропонувала рамку **DigComp**, що визначає цифрову компетентність за п'ятьма ключовими напрямами: інформаційна грамотність, комунікація, створення контенту, безпека та розв'язання проблем [36, с. 8]. За рекомендаціями **UNESCO**, цифрова грамотність повинна трактуватися як соціокультурний ресурс, а не лише технічна навичка [51, с. 11]. Важливим є й узгодження вимог із **Європейською рамкою кваліфікацій (EQF)**, що сприяє мобільності та порівнюваності кваліфікацій [35, с. 23].

Вінницькі науковці (В. Ковальчук, Л. Ляхоцька) акцентують на необхідності адаптації міжнародних стандартів до українських освітніх реалій, зокрема підготовки майбутніх інженерів та аграріїв [18, с. 39; 23, с. 63].

ЦК майбутніх інженерів відрізняється орієнтацією на точність, технологічність та інноваційність. Використання систем управління, моделювання, інженерного проєктування та аналізу даних вимагає від студентів здатності до швидкої адаптації в умовах постійних технологічних змін [18, с. 37; 42, с. 79].

В. Радзіховський підкреслює важливість розвитку цифрової культури студентів технічних університетів [27, с. 114]. Натомість О. Козяр (ВДПУ) зазначає, що для педагогічної підготовки інженерів важливим є баланс між технічною складовою та гуманітарними аспектами ЦК [19, с. 75].

Дослідження ґрунтується на сукупності підходів:

– **компетентнісний** – зорієнтований на кінцеві результати освіти, які відповідають вимогам сучасного ринку праці [15, с. 22].

– **системний** – розглядає ЦК як цілісне утворення з урахуванням міждисциплінарних зв'язків [26, с. 54].

– **діяльнісний** – спрямований на формування умінь практичного застосування цифрових технологій [18, с. 41].

– **аксіологічний** – орієнтує на формування ціннісного ставлення до безпечного й етичного використання цифрових інструментів [52, с. 15].

Вінницькі дослідники (І. Куліш, ВНАУ) підкреслюють, що аксіологічний аспект особливо важливий у підготовці аграрних інженерів, адже пов'язаний із екологічною безпекою та відповідальним використанням цифрових технологій у природокористуванні [21, с. 102].

Інформаційно-технологічна компетентність включає володіння програмним забезпеченням, базами даних, цифровими інструментами та сервісами. Вона формується шляхом інтеграції цифрових технологій у навчальний процес і професійну діяльність, зокрема через партнерство з виробничими підприємствами, роботизацію, Інтернет речей, цифрові двійники тощо [20, с. 96–98].

Комунікативна компетентність охоплює співпрацю в цифровому середовищі, онлайн-комунікації й роботу в команді. Ці аспекти відповідають основним складовим європейської рамки DigComp, де одним із компонентів є комунікація та співпраця [6].

Дослідницько-аналітична компетентність проявляється в аналізі даних і використанні цифрових інструментів для наукових і прикладних досліджень. Наприклад, згідно з моделлю О.Спіріна, науково-педагогічний працівник має застосовувати цифрові засоби на всіх етапах дослідження [28, с. 156–179].

Проєктно-конструкторська компетентність – здатність створювати цифрові моделі, симуляції й прототипи. У глобальному професійному контексті цей рівень знаний реалізується через digital engineering, що передбачає цифровізацію артефактів і симуляцію інженерних процесів на кожному етапі [38].

ЦК інтегрується з професійними, комунікативними, управлінськими компетенціями. Це підтверджується ідеєю, що вона є «множником ефективності» підготовки фахівця – зокрема в технологічно орієнтованих професіях [20, с. 96–98].

Також сучасні рамки, як-от DigCompEdu, демонструють взаємозв'язок цифрової компетентності з освітніми, комунікаційними й інноваційними здібностями [1].

Це особливо важливо в умовах Індустрії 4.0, де цифровізація, автоматизація та роботизація потребують синергії технічної, управлінської й комунікативної компетентностей [13].

ЦК – ключ до конкурентоздатності майбутнього інженера на глобальному ринку праці. Уміння працювати з цифровими технологіями визначає здатність адаптуватися до швидких змін і вимоги глобального трудового ринку [20, с. 96–98].

Вона також є фундаментом готовності до роботи в умовах Індустрії 4.0, а відтепер і Індустрії 5.0, де зростає роль симбіозу людини й цифрових технологій.

Хоча безпосередніх джерел з Вінниці щодо ЦК інженерів у відкритих джерелах менше, є дослідження Г. Генсерук – видатної науковиці у сфері ЦК – зокрема щодо міжнародних рамок і складників цієї компетентності [7].

Мета – формування здатності ефективно застосовувати цифрові технології у професійній діяльності. ЦК трактується як інтегративна здатність суб'єкта розуміти інформаційні потреби та використовувати цифрові ресурси професійно [11, с. 54].

Завдання – розвиток технічних, дослідницьких, комунікативних та етичних складових. Проєктно орієнтоване навчання сприяє формуванню навичок дослідницької діяльності та співпраці [37, с. 217]. Використання VR/AR-технологій підсилює комунікативні та креативні аспекти в інженерній освіті [49, с. 11; 39, с. 5].

Суб'єкти – студенти, викладачі, роботодавці, IT-спеціалісти, які формують освітній простір і забезпечують практичні завдання та зворотний зв'язок. Це відповідає інтегративному підходу «освіта – наука – технології».

Об'єкти – навчальні програми, цифрові середовища, лабораторії. Використання віртуальних лабораторій і симуляторів забезпечує практичну діяльність студентів у безпечному цифровому середовищі [54, с. 43].

Принципи – системність, інтегративність, інноваційність, практико-орієнтованість, що узгоджується з вимогами сучасного ринку праці [44, с. 9].

Змішане та дистанційне навчання забезпечують гнучкість освітнього процесу й дають можливість персоналізації завдяки використанню ШІ [48, с. 4].

Інтеграція цифрових курсів у традиційні програми створює умови для гібридних освітніх моделей.

Співпраця з роботодавцями та IT-компаніями сприяє практико-орієнтованому навчанню та підвищує конкурентоспроможність випускників [11, с. 59].

Електронні платформи (Moodle, Google Classroom, Microsoft Teams) забезпечують комунікацію та контроль навчання [11, с. 56].

Віртуальні лабораторії й симулятори дозволяють моделювати виробничі процеси й формувати інженерні компетентності..

VR / AR-технології підвищують результативність навчання, особливо в галузі просторового моделювання [49, с. 12; 47, с. 8].

Штучний інтелект персоналізує навчальний процес і сприяє розвитку критичного мислення [48, с. 6].

Проєктне та проблемно орієнтоване навчання активізує застосування знань на практиці й формує дослідницькі навички [37, с. 218].

Сутність цілісності полягає у взаємозв'язку компонентів освітнього процесу (стейкхолдерів, змісту, методів, технологій), формуючи цілісну систему. Системний підхід забезпечує не лише послідовність, а й узгодженість компонентів, що дозволяє досягти цілісного результату підготовки інженера.

У дослідженні щодо професійної підготовки електромеханіків відзначено, що компетентність формується у трьох групах – загальнонаукових, загальнопрофесійних і спеціальних професійних – які взаємодіють у моделювальному циклі освіти [42, с. 27].

Освітня система має бути здатною оперативно реагувати на технологічні зрушення та швидкі зміни. Концепції «Industry 4.0» та «Освіта 4.0» акцентують необхідність впровадження гнучких траєкторій навчання, здатних адаптуватися до цифрових інструментів і змінних умов [33, с. 41]. Українські дослідники також підкреслюють модернізацію через STEM-технології та штучний інтелект, спрямовану на інноваційну адаптацію освітнього середовища [17, с. 58].

Поєднання технічних і гуманітарних аспектів виховує всебічно мислячого інженера. Через концепцію «Філософської арфи» розглядається баланс загальноосвітньої компоненти з вузькоспеціалізованими знаннями, що слугує методологічною основою інтегративності [29, с. 16]. У сучасних дослідженнях також наголошується, що інтегральна компетентність передбачає здатність синтезувати знання з різних галузей – соціальних, поведінкових наук та технічних дисциплін [22, с. 9].

Інноваційність в освіті означає активне використання сучасних цифрових платформ та інструментів. Міжнародні дослідження доводять ефективність системної інтеграції ШІ-компетенцій у дисциплінарні інженерні програми, що відкриває шлях до новітніх форм навчання [46, с. 3]. Практика впровадження дуальної освіти у ВНТУ на кафедрі метрології та промислової автоматики підтверджує інноваційний характер сучасної підготовки інженерів [5, с. 2].

Наближення освіти до реальних умов виробництва забезпечує актуальність знань. Стажування студентів ВНТУ на підприємствах медіакорпорації RIA та ДП «Вінницястандартметрологія» спрямоване на здобуття практичних навичок у реальних умовах [5, с. 3]. Крім того, залучення роботодавців до навчального процесу у форматі відкритих лекцій, практик і реальних проєктів посилює прикладну складову інженерної освіти [4, с. 4].

Компетентність формується поступово – від бакалаврату до магістратури й далі упродовж життя. У ВНТУ бакалаври з відзнакою й ті, що мають можливість безперервно продовжувати навчання на магістерському рівні, що сприяє системному академічному розвитку [5, с. 3]. Національні освітні ініціативи також орієнтовані на формування стійкої моделі «освіти упродовж життя» [17, с. 60].

Ефективна система освіти потребує чітких критеріїв оцінки сформованості компетентностей. У моделі підготовки електромеханіків визначено вагу кожної групи компетентностей – соціально-особистісних, загальнонаукових, загальнопрофесійних, що дозволяє об'єктивно оцінювати рівень сформованості [42, с. 15]. Українські методичні дослідження також пропонують стандартизовані підходи до оцінювання іншомовної компетентності інженерів-енергетиків [3, с. 4].

Під цифровою грамотністю розуміємо комплекс знань, умінь і ставлень, що відповідають областям DigComp: інформаційна грамотність; комунікація і співпраця; створення цифрового контенту; безпека; розв'язання проблем у цифровому середовищі. Система має привести до росту реального рівня засвоєння цих складників у студентів через поєднання: цілеспрямованих навчальних модулів, практичних лабораторій, проєктних завдань і модулів самооцінки. Теоретично і практично це підтверджено в DigComp 2.2 як опорному фреймворку та в рекомендаціях ЮНЕСКО щодо побудови шляхів розвитку цифрової грамотності [53, с. 6–9; 40, с. 18–22].

Індикатори та методи вимірювання:

- частка студентів, які досягають заданого рівня за вибраною шкалою DigComp (наприклад, рівень «базовий/проміжний/просунутий») – вимірюється через стандартизований тест/портфоліо до / після курсу [53, с. 42–44];
- середній приріст балів у діагностичних інструментах (pre/post) з інформаційної та медіаграмотності [40, с. 27–28];
- кількість практичних робіт/портфоліо-проєктів із застосуванням IT-інструментів, що відповідають компетентностям (відстеження в LMS);
- якісні індикатори: рецензії викладачів і саморефлексія студентів щодо упевненості й критичного ставлення до цифрових джерел.

Рамки DigComp і глобальні рекомендації показують, що цілеспрямовані навчальні модулі з прикладними завданнями дають стійке підвищення цифрових навичок; локальні експериментальні програми (вінницькі дослідження) показують ефективність проєктно-орієнтованого підходу та модульної діагностики [53, с. 46–49; 8, с. 5–19; 9, с. 1–7].

Підготовлені студенти вмітимуть використовувати прикладні цифрові інструменти (аналітика даних, CAD / CAE, системи управління проєктами, хмарні сервіси, базові інструменти ML / AI-інтеграції залежно від спеціальності) для вирішення наукових і виробничих задач; матимуть навички інтеграції цифрових інструментів у експериментальний/виробничий процес. Концептуально це відповідає розвитку цифрових трансформаційних навичок (Digital Transformation Skills Framework) [30, с. 15–16].

Індикатори та методи вимірювання:

− частка студентів, які успішно виконали галузеві практичні кейси (task-based assessment) із застосуванням відповідних інструментів; використання завдань типу «реальний кейс від промислового партнера» [30, с. 56–57].

− оцінка роботодавців / наукових керівників щодо готовності молодих спеціалістів (опитування, інтерв'ю) – метод, що застосовано в праці щодо очікувань роботодавців (емпіричні дослідження) [50, с. 16–18].

− наявність та використання лабораторій / віртуальних середовищ, кількість годин практики на профільних платформах.

Систематичні огляди наукової літератури та наявні **DT-фреймворки** підтверджують, що **готовність до застосування дизайн-мислення (Design Thinking, DT)** у професійній сфері не зводиться лише до технічних умінь. Вона потребує **поєднання двох блоків компетентностей.**

Систематичні огляди й фреймворки показують, що професійна готовність до **застосування дизайн-мислення (Design Thinking), (DT)** вимагає комбінації технічних і трансформаційних навичок (цифрове робоче вміння + адаптація, підприємницькість, колаборація) – тобто навчальна програма має бути мультикомпетентною [30, с. 21–23; 45, с. 1–4]. Вінницькі приклади впровадження комп'ютерно-орієнтованих технологій демонструють практичну ефективність такої підготовки в педагогічній / навчальній сфері [8, с. 5–19].

Система сприятиме виникненню в студентів умінь генерувати нові ідеї, конструювати прототипи, впроваджувати інноваційні рішення та трансформувати ідеї в проєктні продукти. Це включає підприємницьку компетентність, критичне мислення, міждисциплінарну співпрацю – компоненти, що виокремлені в сучасних DT-рамках і в EntreComp / LifeComp-підходах, які інтегруються з DigComp [53, с. 41–44; 30, с. 24–26].

Індикатори та методи вимірювання:

- кількість студентських інноваційних проєктів / стартап-ініціатив, що пройшли презентацію або тестування (demo-days, конкурси);
- рівень «творчої компетентності» за інструментами само / експертної оцінки (rating-scales), аналіз результатів портфоліо (реєстрація новизни рішень);
- включення елементів дизайн-мислення й практик відкритих інновацій у курси; кількість міжфакультетних проєктів [30, с. 49–54; 24, с. 117–122].

Рамки DT підкреслюють, що поряд із технічними вміннями потрібні трансформаційні компетенції – підприємницькість, адаптація, креативність; педагогічні моделі, що поєднують проєктну роботу та міждисциплінарність, довели свою ефективність у локальних дослідженнях (Вінниця) [30, с. 15–16; 8, с. 5–19; 16, с. 13–19].

Випускники системи повинні бути конкурентоспроможними завдяки поєднанню: технічних цифрових навичок, soft-skills для цифрового середовища (співпраця, комунікація), здатності до проєктної роботи й адаптації. Емпіричні дослідження роботодавців показують, що саме ці компетенції визначають найвищу затребуваність на ринку (дослідження роботодавців у Малайзії та глобальні огляди) [50, с. 16–18; 55, с. 1–4].

Індикатори та методи вимірювання:

− рівень працевлаштування випускників у суміжних цифрових / інноваційних ролях (послідковування випускників 6–12 місяців після закінчення ЗВО);

− частка випускників із записаними в резюме сертифікатами / портфоліо, що демонструють ЦК;

− оцінка роботодавців через стандартизовані опитувальники про готовність і продуктивність молодих спеціалістів (employer satisfaction index) [50, с. 83–89; 45, с. 1–4].

Аналітика вакансій і дослідження попиту демонструють зростання вимог до цифрових навичок у багатьох галузях; відповідно, навчальні програми, що орієнтовані на DT-навички і практичні кейси, підвищують працевлаштування й адаптивність випускників. Вінницькі дослідження щодо впровадження цифрових сервісів у професійній підготовці підтверджують позитивний ефект на готовність до роботи [55, с. 4–6; 8, с. 5–19; 9, с. 1–7].

Система має виробити в студентів метапортфоліо навичок: уміння самооцінки (learning to learn), здатність швидко опановувати нові інструменти, критичну позицію щодо інформації, готовність до рескілінгу / апскілінгу. DigComp і ЮНЕСКО акцентують роль компентенцій «learning to learn» і формування шляхів розвитку.

Індикатори та методи вимірювання:

− наявність персональної траєкторії / портфоліо навчання (e-portfolio) у відсотку студентів; кількість пройдених мікрокурсів і сертифікацій після випуску;

− показники самооцінки (методологія pre / post) з «навчання впродовж життя» і самоефективності у цифровому середовищі. [30, с. 206–213; 25, с. 133–136];

− частка студентів, які беруть участь у додаткових програмах рескілінгу/інтернатури/міжнародних обмінах.

Світові рекомендації та огляди підкреслюють, що здатність до оновлення навичок є ключовою для стійкості кар'єри в епоху швидких технологічних змін; навчальні моделі, що включають самостійні траєкторії, портфоліо й підтримку менторів, підвищують цю здатність [53, с. 42–44; 40, с. 27–28; 20, с. 212–214]. Дидактичні умови й моделі, апробовані в українських дослідженнях, дають приклади реалізації таких підходів у навчальному процесі [24, с. 95–136; 16, с. 13–19].

Методичні рекомендації щодо документування і верифікації результатів:

1. Використовувати DigComp-орієнтовані інструменти оцінювання (task-based + self-report) як основний вимірювальний каркас [53, с. 40–45; 55, с. 34–36].

2. Поєднати кількісні показники (pre / post тестування; працевлаштування) із якісними (портфоліо, відгуки роботодавців) для комплексної валідації [45, с. 1–4; 50, с. 83–89].

Залучати місцеві (вінницькі) експертизи й кейси: співпраця з кафедрами, індустріальними партнерами для розробки реальних кейсів і стажувань (підтверджено практикою в публікаціях Вінниці) [8, с. 5–19; 9, с. 1–7].

Висновки. Система формування ЦК майбутніх інженерів має бути цілісною, що передбачає органічну взаємопов'язаність усіх її компонентів – змістового, методичного, технологічного та оцінювального. Такий підхід відповідає європейським рамкам DigComp та DigCompEdu, які підкреслюють необхідність системного розвитку цифрових навичок у процесі підготовки фахівців [32, с. 4–6; 43, с. 3–5].

Інтеграція освіти з потребами ринку праці повинна здійснюватися шляхом партнерства університетів з підприємствами та IT-компаніями, оновлення навчальних програм відповідно до міжнародних стандартів та проведення моніторингу успішності випускників. Це забезпечує відповідність компетентнісного підходу сучасним технологічним трендам [32, с. 7–9; 43, с. 7–8].

Вінницькі науковці (Р. Гуревич, С. Дембіцька, В. Підгурська) роблять суттєвий внесок у дослідження проблем цифрової грамотності та компетентнісного підходу. Їхні роботи підтверджують доцільність впровадження інтегрованих моделей цифрової підготовки у ЗВО регіону [8; 10, с. 1–7; 25, с. 1–4].

Проведене дослідження дозволило визначити теоретико-методологічні основи та практичні аспекти формування ЦК майбутніх інженерів у технічних ЗВО. Встановлено, що ЦК виступає ключовим чинником професійної готовності інженерних кадрів до діяльності в умовах цифрової економіки та суспільства знань.

Розроблена система формування ЦК характеризується низкою базових ознак: цілісністю та системністю, гнучкістю й адаптивністю до технологічних змін, інноваційністю, практико-орієнтованістю, відкритістю та інтегрованістю в міжнародний освітній простір. Визначені індикатори вимірювання рівня ЦК студентів технічних університетів створюють можливість для об'єктивної оцінки результатів освітнього процесу та його постійного вдосконалення.

Особлива увага приділена регіональному досвіду, зокрема практикам ЗВО м. Вінниці, що впроваджують сучасні освітні технології (VR / AR, проєктне навчання, дуальна освіта) та забезпечують інтеграцію освітньої підготовки з потребами промисловості й ринку праці. Це підтверджує, що формування ЦК можливе лише за умови тісної взаємодії університетів, бізнесу та суспільства.

Наукова новизна роботи полягає у комплексному підході до структурування системи формування ЦК майбутніх інженерів, що поєднує освітній, дослідницький та виробничий компоненти. Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості їх використання для модернізації освітніх програм, удосконалення змісту дисциплін та розробки методичного забезпечення підготовки інженерних кадрів.

Перспективи подальших досліджень вбачаються у розробленні цифрових інструментів для діагностики рівня компетентності студентів, адаптації міжнародних рамок (DigComp, EntreComp) до вітчизняних реалій, а також у вивченні впливу інноваційних технологій на ефективність навчання майбутніх інженерів.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та згоди на публікацію.

Подяки. Автори висловлюють вдячність факультету педагогіки, психології і професійної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, який надав допомогу в написанні та перевірці статті. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бескорса О. Implementing Digital Competence Framework for Future Teachers' Professional Development. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*. 2018. № 8 (2). С. 33–41.
2. Биков В. Ю. Цифрова трансформація освіти і науки: проблеми та завдання. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2021. № 1 (81). С. 45–60.
3. Білан Н. М. Формування іншомовної компетентності інженерів-енергетиків. 2022. С. 4.
4. ВНТУ, кафедра САІТ. Співпраця з роботодавцями у підготовці інженерів. Вінниця, 2023. С. 4.
5. ВНТУ. Освітня програма «Комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні технології» та практика дуальної освіти. Вінниця, 2022. С. 2–3.
6. Генсерук Г. Р. Міжнародні рамки цифрової компетентності майбутніх учителів. *Педагогічні науки*. 2021. № 4. С. 32–37.
7. Генсерук Г. Р. Цифрова компетентність майбутніх учителів: зарубіжний досвід. *Наукові записки [Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова]. Серія : Педагогічні науки*. 2019. Вип. 144. С. 57–66.
8. Гуревич Р. С., Кобися В. М., Кобися А. П., Кізім С. С., Куцак Л. В., Опушко Н. Р. Формування цифрової компетентності майбутніх учителів у вивченні комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education...* 2022. Вип. 63. С. 5–19.
9. Дембіцька С. В., Кобилянський О. В. Формування професійної компетентності майбутніх фахівців з професійної освіти засобами цифрових технологій. *Педагогіка безпеки*. 2024. № 8 (1–2). С. 1–7.
10. Добровольська Н. В., Мерінова С. В., Добровольський О. І. Цифрова компетентність студентів закладів вищої освіти: теоретико-практичний аспект. *Scientific and Theoretical Journal «Science and Education»*. 2022. № 2. С. 53–61.
11. Засєкіна Т. М. Цифрова грамотність студентів як чинник інноваційного розвитку освіти. *Наукові записки ВДПУ ім. М. Коцюбинського*. Серія: Педагогіка і психологія. 2020. Вип. 62. С. 25–31.
12. Захаркевич Н. П. Формування цифрових компетенцій персоналу підприємств в умовах четвертої промислової революції (Індустрія 4.0) : матеріали XXIV Міжнародної наук.-практ. конференції, 30 травня 2024 р., м. Хмельницький / Хмельницький університет управління та права ім. Леоніда Юзькова. Хмельницький, 2024. С. 116–120.
13. Зелінська А. М.; Тарасович Л. В.; Лавриненко С. О. Цифрові компетенції як основа трансформації професійної освіти майбутніх менеджерів. *Економіка та суспільство*. Вип. 49. 2023. С. 348–355.
14. Зимня І. А. Ключові компетентності як результативно-цільова основа компетентнісного підходу. *Вища освіта України*. 2019. № 3. С. 17–24.
15. Кадемія М. Ю., Косянчук М. С. Формування цифрової компетентності майбутніх учителів початкових класів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання.* 2021. Вип. 61. С. 13–19.
16. Князькова Л., Сухоребра Т., Ковальчук М. та ін. Reforming Education in Ukraine Through the Introduction of STEM Technologies and Artificial Intelligence. 2024. P. 58–60.
17. Ковальчук В. В. Формування цифрової компетентності майбутніх інженерів у процесі професійної підготовки. *Освіта та розвиток обдарованої особистості*. 2021. № 6. С. 35–42.
18. Козяр О. В. Педагогічні аспекти формування цифрової компетентності майбутніх інженерів. *Освіта дорослих і розвиток суспільства*. 2022. № 2. С. 70–78.

19. Кондур О., Кондрат Р. Formation of digital competence in future specialists. *Mountain School of Ukrainian Carpaty*, 2025. Вип. 31. С. 96–98.
20. Куліш І. В. Аксіологічні засади цифрової освіти аграрних інженерів. *Вісник аграрної освіти і науки*. 2021. № 5. С. 98–105.
21. Львівська політехніка. Інтегральна компетентність у сучасній освіті. 2025. С. 9.
22. Ляхоцька Л. О. Інтеграція європейських стандартів цифрової компетентності в освітній процес аграрних університетів. *Наукові праці ВНАУ*. 2021. Т. 23, № 4. С. 61–67.
23. Моісеєнко М. В. Формування цифрової компетентності студентів у процесі вивчення інформатичних дисциплін : дис. канд. пед. наук. Кривий Ріг; 2021. 305 с.
24. Підгурська В. О. Розвиток інформаційно-цифрової компетентності учнів у контексті Нової української школи. *Збірник наукових праць Вінницького державного педагогічного університету*. Серія: Педагогіка і психологія. 2022. Вип. 70. С. 1–4.
25. Пометун О. І. Цифрова компетентність: структура та шляхи формування у студентів. *Педагогіка і психологія*. 2020. № 4. С. 50–56.
26. Радзіховський В. О. Розвиток цифрової культури студентів технічних університетів. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2022. № 3. С. 110–118.
27. Спірін О. М. et al. A Model for the Development of Digital Competence of Research and Teaching Staff. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2024. № 6 (104). С. 156–179.
28. Теклюк А. І. Філософська арфа для інженера-скрипаля: проблема балансу загальноосвітньої компоненти з спеціалізованою підготовкою фахівця. Вінниця, 2020. С. 16.
29. Bouwman M., Lub X., Orlowski M., Nguyen T.-V. Developing the digital transformation skills framework: A systematic literature review approach. *PLOS ONE*. 2024. № 19(7).
30. Carretero S., Vuorikari R., Punie Y. DigComp 2.1: The Digital Competence Framework for Citizens. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2017. 57 p.
31. Coskun S., Kayikci Y., Gencay E. Adapting Engineering Education to Industrie 4.0 Vision. 2017. P. 41.
32. Dimitrov G. Digital Education Action Plan 2021–2027. Resetting Education and Training for the Digital Age. European Commission, 2020. 18 p.
33. European Commission. European Qualifications Framework (EQF). Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2020. 64 p.
34. Ferrari A. Digital Competence in Practice: An Analysis of Frameworks. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2013. 92 p.
35. Hamaniuk V. A., Amelina S. M., Burov O. Yu. Project-Based Learning in Engineering Education: Digital Tools and Pedagogical Approaches. *CEUR Workshop Proceedings*. 2024. Vol. 3781. P. 216–223.
36. Huang J. et al. Towards Digital Engineering – The Advent of Digital Systems Engineering. arXiv. 2020.
37. Ka J. Virtual Reality in Engineering Education: A Cognitive Perspective. *Virtual Reality*. 2025. Vol. 29. P. 1–10.
38. Law N., Woo D., de la Torre J., Wong G. A Global Framework of Reference on Digital Literacy Skills for Indicator 4.4.2. UNESCO Institute for Statistics; 2018. 146 p.
39. Lyngdorf N. E. R., Jiang D., Du X. Frameworks and Models for Digital Transformation in Engineering Education: A Literature Review Using a Systematic Approach. Educ. Sci. 2024. 14. 519, 18 p.
40. Modlo Ye. O., Semerikov C. O., Shmeltzer Ye. O. Modernization of Professional Training of Electromechanics Bachelors: ICT-based Competence Approach. 2018. P. 27, 14, 15.
41. Redecker C., Punie Y. European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2017. 100 p.
42. Research on Metaverse and Engineering Education: Design Principles and Competencies. *ResearchGate preprint*. 2024. P. 1–15.
43. Rikala P., Braun G., Järvinen M., Stahre J., Hämäläinen R. Understanding and measuring skill gaps in Industry 4.0 – A review. *Technological Forecasting and Social Change*. 2024; 201: 123206.
44. Schleiss J., Johri A., Stober S. Integrating AI Education in Disciplinary Engineering Fields: Towards a System and Change Perspective. 2024. P. 3.
45. Striuk A. M., Rassovytska M. V., Shokaliuk S. V. Augmented Reality in Engineering Education: Methodical Approach. *arXiv preprint*. 2018. arXiv:1807.00279. P. 7–12.
46. Su M. Artificial Intelligence in Blended Learning for Engineering Students. *European Journal of Education and Pedagogy*. 2025. Vol. 6 (2). P. 3–7.
47. Suhail N. Immersive VR for Engineering Students: Enhancing Spatial Skills. *Frontiers in Virtual Reality*. 2024. Vol. 5. P. 9–14.
48. Tee P. K., Wong L. C., Dada M., Song B. L., Ng C. P. Demand for digital skills, skill gaps and graduate employability: Evidence from employers in Malaysia. *F1000Research*. 2024.
49. Tzafilkou K., Vrettos G., Agorastos A., Perifanou M. Development and validation of students' digital competence scale for higher education. *Heliyon*. 2022. Vol. 8(12). P. 1–18.

50. UNESCO. Digital Literacy in Education: Policy Brief. Paris: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, 2018. 28 p.
51. Vuorikari R., Kluzer S., Punie Y. DigComp 2.2: The Digital Competence Framework for Citizens. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2022. 134 p.
52. Wattanasin W., Chatwattana P., Piriyasurawong P. Engineering Project-Based Learning Using a Virtual Laboratory and Mixed Reality. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*. 2021. Vol. 16 (24). P. 42–52.
53. World Bank. The Vital Role of Digital Skills in Building an Inclusive, Smart, Safe, and Sustainable Digital Economy. Skills4Dev Knowledge Digest, December 2023. 10 p.

UDC 378.147:004.9:37.013.42

Modeling the digital competence of future engineers: theoretical and methodological foundations and core characteristics

Roman Gurevych, Maksym Yevtukhivskyi

Abstract. The article examines the theoretical and methodological foundations of developing digital competence (DC) in future engineers within the context of the transformation of modern higher technical education. The evolution of the concept of "digital competence" is analyzed – from computer literacy to a multidimensional category integrating knowledge, skills, abilities, values, and attitudes necessary for successful professional activity in the digital economy. The basic characteristics of the digital competence formation system are identified, including integrity and systemacity, flexibility and adaptability, innovativeness, practice orientation, openness, and integration into the international educational space. Based on international (DigComp, UNESCO, EntreComp) and national regulatory and methodological frameworks, the indicators for measuring the level of DC among students of technical universities are substantiated. Special attention is given to the experience of higher education institutions in Vinnytsia, where innovative educational practices are implemented – in particular, dual education, the use of VR/AR technologies, the introduction of project-based learning, and the integration of the educational process with the needs of the regional labor market. Methodological recommendations are developed to ensure the effectiveness of the DC formation system, aimed at combining academic training with students' practical activities. The scientific novelty of the work lies in the comprehensive analysis of the structural components and characteristics of the system for forming engineers' digital competence, which allows for the integration of educational, research, and industrial components. The practical significance of the study consists in the possibility of applying the proposed principles in the modernization of educational programs of technical universities.

Keywords: digital competence, future engineers, technical university, indicators, system, digitalization of education.

References

1. Beskorsa O. (2018) *Implementing Digital Competence Framework for Future Teachers' Professional Development*, Profesionalizm pedahoha: teoretychni y metodychni aspekty, **8** (2), 33–41.
2. Bykov V. Yu. (2021). *Digital Transformation of Education and Science: Challenges and Tasks*, Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia, **1** (81). 45–60. [in Ukrainian]
3. Bilan N. M. (2022). Formation of Foreign Language Competence of Power Engineering Students, 4. [in Ukrainian]
4. VNTU, Department of Computer-Aided and Information Technologies (CAIT). (2023). Cooperation with Employers in the Training of Engineers, Vinnytsia, 4. [in Ukrainian]
5. VNTU. (2022). Educational Program "Computerized Information and Measurement Technologies" and the Practice of Dual Education, Vinnytsia, 2–3. [in Ukrainian]
6. Henseruk H. R. (2021). *International Frameworks of Digital Competence for Future Teachers*, Pedahohichni nauky, **4**, 32–37. [in Ukrainian]
7. Henseruk H. R. (2019). *Digital Competence of Future Teachers: Foreign Experience*, Naukovi zapysky [Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu im. M. P. Drahomanova]. Seriia : Pedahohichni nauky, **144**, 57–66. [in Ukrainian]
8. Hurevych R. S., Kobysia V. M., Kobysia A. P., Kizim S. S., Kutsak L. V., Opushko N. R. (2022). *Formation of Digital Competence of Future Teachers in Studying Computer-Oriented Learning Technologies*, Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education..., **63**, 5–19. [in Ukrainian]

9. Dembitska S. V., Kobylianskyi O. V. (2024). *Formation of Professional Competence of Future Vocational Education Specialists by Means of Digital Technologies*, Pedahohika bezpeky, **8** (1–2), 1–7. [in Ukrainian]
10. Dobrovolska N. V., Merinova S. V., Dobrovolskyi O. I. (2022). *Digital Competence of Higher Education Students: Theoretical and Practical Aspect*, Scientific and Theoretical Journal "Science and Education, **2**, 53–61. [in Ukrainian]
11. Zasiekina T. M. (2020). *Digital Literacy of Students as a Factor of Innovative Development of Education*, Naukovi zapysky VDPU im. M. Kotsiubynskoho. Seriia: Pedahohika i psykholohiia, **62**, 25–31. [in Ukrainian]
12. Zakharkevych N. P. (2024). *Formation of Digital Competencies of Enterprise Personnel in the Context of the Fourth Industrial Revolution (Industry 4.0)*: Proceedings of the 24th International Scientific and Practical Conference, May 30, 2024, Khmelnytskyi / Khmelnytskyi University of Management and Law named after Leonid Yuzkov. – Khmelnytskyi, 116–120. [in Ukrainian]
13. Zelinska A. M., Tarasovych L. V., Lavrynenko S. O. (2023). *Digital Competencies as the Basis for the Transformation of Future Managers' Vocational Education*, Ekonomika ta suspilstvo, **49**, 348–355. [in Ukrainian]
14. Zymnia I. A. (2019). *Key Competencies as a Result-Oriented and Goal-Based Foundation of the Competence-Based Approach*, Vyshcha osvita Ukrainy, **3**, 17–24. [in Ukrainian]
15. Kademiia M. Yu., Kosianchuk M. S. (2021). *Formation of Digital Competence of Future Primary School Teachers*, Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia, **61**, 13–19. [in Ukrainian]
16. Kniazkova L., Sukhorebra T., Kovalchuk M., et al. (2024). *Reforming Education in Ukraine Through the Introduction of STEM Technologies and Artificial Intelligence*, 58–60.
17. Kovalchuk V. V. (2021). *Formation of Digital Competence of Future Engineers in the Process of Professional Training*, Osvita ta rozvytok obdarovanoi osobystosti, **6**, 35–42. [in Ukrainian]
18. Koziar O. V. (2022). *Pedagogical Aspects of Forming the Digital Competence of Future Engineers*, Osvita doroslykh i rozvytok suspilstva, **2**, 70–78. [in Ukrainian]
19. Kondur O., Kondrat R. (2025). *Formation of digital competence in future specialists*, Mountain School of Ukrainian Carpaty, **31**, 96–98.
20. Kulish I. V. (2021). *Axiological Foundations of Digital Education of Agricultural Engineers*, Visnyk ahrarnoi osvity i nauky, **5**, 98–105. [in Ukrainian]
21. Lviv Polytechnic National University. (2025). Integral Competence in Modern Education, 9. [in Ukrainian]
22. Liakhotska L. O. (2021). *Integration of European standards of digital competence into the educational process of agricultural universities*, *Naukovi pratsi VNAU*, **23** (4), 61–67. [in Ukrainian]
23. Moiseienko M. V. (2021). Formation of students' digital competence in the process of studying computer science disciplines: dissertation for the degree of Candidate of Pedagogical Sciences, Kryvyi Rih, 305. [in Ukrainian]
24. Pidhurska V. O. (2022). *Developing Students' Information And Digital Literacy In The Context Of The New Ukrainian School*, Zbirnyk naukovykh prats Vinnytskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu. Seriia: Pedahohika i psykholohiia, **70**, 1–4. [in Ukrainian]
25. Pometun O. I. (2020). *Digital Competence: Structure And Ways Of Developing It In Students*, Pedahohika i psykholohiia, **4**, 50–56. [in Ukrainian]
26. Radzikhovskyi V. O. (2022). *Developing Digital Literacy Among Students At Technical Universities*, Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu, **3**, 110–118. [in Ukrainian]
27. Spirin O. M., et al. (2024). *A Model for the Development of Digital Competence of Research and Teaching Staff.* Information Technology And Learning Tools, **6** (104), 56–179.
28. Tekliuk A. I. (2020). A philosophical harp for an engineer-violinist: the problem of balancing general education with specialized training, Vinnytsia, 16. [in Ukrainian]
29. Bouwman M., Lub X., Orlowski M., Nguyen T.-V. (2024). *Developing the digital transformation skills framework: A systematic literature review approach*, PLOS ONE, **19** (7).
30. Carretero S., Vuorikari R., Punie Y. (2017). *DigComp 2.1: The Digital Competence Framework for Citizens*, Luxembourg: Publications Office of the European Union, 57.
31. Coskun S., Kayikci Y., Gencay E. (2017). *Adapting Engineering Education to Industrie 4.0 Vision*, 41.
32. Dimitrov G. (2020). *Digital Education Action Plan 2021–2027. Resetting Education and Training for the Digital Age*, European Commission, 18.
33. European Commission. (2020). *European Qualifications Framework (EQF)*, Luxembourg: Publications Office of the European Union, 64.
34. Ferrari A. *Digital Competence in Practice: An Analysis of Frameworks*, Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2013. 92 p.
35. Hamaniuk V. A., Amelina S. M., Burov O. Yu. (2024). *Project-Based Learning in Engineering Education: Digital Tools and Pedagogical Approaches*, CEUR Workshop Proceedings…, **3781**, 216–223.
36. Huang J. et al. (2020). *Towards Digital Engineering – The Advent of Digital Systems Engineering*, arXiv.
37. Ka J. (2025). *Virtual Reality in Engineering Education: A Cognitive Perspective*, Virtual Reality, **29**. 1–10.

38. Law N., Woo D., de la Torre J., Wong G. (2018). *A Global Framework of Reference on Digital Literacy Skills for Indicator 4.4.2*, UNESCO Institute for Statistics, 146.
39. Lyngdorf N. E. R., Jiang D., Du X. (2024). *Frameworks and Models for Digital Transformation in Engineering Education: A Literature Review Using a Systematic Approach*, Educ. Sci, **14**, 519, 18.
40. Modlo Ye. O., Semerikov C. O., Shmeltzer Ye. O. (2018). *Modernization of Professional Training of Electromechanics Bachelors: ICT-based Competence Approach*, 27, 14, 15.
41. Redecker C., Punie Y. (2017). *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*, Luxembourg: Publications Office of the European Union, 100.
42. *Research on Metaverse and Engineering Education: Design Principles and Competencies* (2024), ResearchGate preprint, 1–15.
43. Rikala P., Braun G., Järvinen M., Stahre J., Hämäläinen R. (2024). *Understanding and measuring skill gaps in Industry 4.0 – A review*, Technological Forecasting and Social Change, **201**, 123206.
44. Schleiss J., Johri A., Stober S. (2024). *Integrating AI Education in Disciplinary Engineering Fields: Towards a System and Change Perspective*, 3.
45. Striuk A. M., Rassovytska M. V., Shokaliuk S. V. (2018). *Augmented Reality in Engineering Education: Methodical Approach*, arXiv preprint, **1807.**00279, 7–12.
46. Su M. (2025). *Artificial Intelligence in Blended Learning for Engineering Students*, European Journal of Education and Pedagogy, **6** (2), 3–7.
47. Suhail N. (2024). *Immersive VR for Engineering Students: Enhancing Spatial Skills*, Frontiers in Virtual Reality, **5**, 9–14.
48. Tee P. K., Wong L. C., Dada M., Song B. L., Ng C. P. (2024). *Demand for digital skills, skill gaps and graduate employability: Evidence from employers in Malaysia*, F1000Research.
49. Tzafilkou K., Vrettos G., Agorastos A., Perifanou M. (2022). *Development and validation of students' digital competence scale for higher education*, Heliyon, **8** (12), 1–18.
50. UNESCO. (2018). *Digital Literacy in Education: Policy Brief*, Paris: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, 28.
51. Vuorikari R., Kluzer S., Punie Y. (2022). *DigComp 2.2: The Digital Competence Framework for Citizens*, Luxembourg: Publications Office of the European Union, 134.
52. Wattanasin W., Chatwattana P., Piriyasurawong P. (2021). *Engineering Project-Based Learning Using a Virtual Laboratory and Mixed Reality*, International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), **16** (24), 42–52.
53. World Bank. (2023). *The Vital Role of Digital Skills in Building an Inclusive, Smart, Safe, and Sustainable Digital Economy*. Skills4Dev Knowledge Digest, December, 10.

Про авторів / About the authors

Роман Гуревич, заслужений працівник народної освіти України, доктор педагогічних наук, професор, дійсний член (академік) НАПН України, кафедра цифрових технологій і професійної освіти, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Roman Gurevych, Honored Worker of Public Education of Ukraine, Doctor of of Science in Pedagogy, Professor, Full Member (Academician) of the National Academy of Educational Sciences of Ukraine, Department of Digital Technologies and Professional Education. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Максим Євтухівський, аспірант кафедри цифрових технологій і професійної освіти, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Maksym Yevtukhivskyi, Postgraduate Student, Department of Digital Technologies and Professional Education, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 31.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 285–293.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 285–293.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147:51:004

Синергетика і математичне моделювання: інтеграція фізичних задач у процес математичної підготовки технічних фахівців

Альона Коломієць[1], Михайло Лисий[2], Світлана Кирилащук[3]

[1]Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики,
м. Вінниця, Україна
kolomiets@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7665-6247

[2]Вінницький національний технічний університет, фізики,
м. Вінниця, Україна
lisiymv@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-5155-966X

[3]Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики,
м. Вінниця, Україна
kyrylashchuk@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-8972-3541

Анотація. Робота присвячена актуальній проблемі підвищення якості фундаментальної математичної підготовки майбутніх технічних фахівців в умовах динамічного розвитку науки і техніки. Це сприяє нелінійній взаємодії математичних та фізичних знань, формуванню цілісної системи наукового світогляду У статті обґрунтовано теоретико-методологічні засади реалізації синергетичного підходу як ефективної стратегії модернізації освітнього процесу у вищих технічних закладах освіти. З позицій синергетики фундаментальна математична підготовка розглядається як складна, відкрита педагогічна система, що перебуває у стані нелінійної динаміки та самоорганізації. Ключовим механізмом реалізації синергетичного підходу у статті визначено інтеграцію розв'язування фізичних задач у процес вивчення вищої математики. У роботі розкрито дидактичний потенціал фізичних задач як засобу фундаменталізації математичної підготовки. Визначено теоретико-дидактичні принципи реалізації синергетичного підходу у фундаментальній математичній підготовці майбутніх технічних фахівців шляхом розв'язування фізичних задач; наведено критерії добору та конструювання фізичних задач, інтегрованих у математичний курс, що забезпечують формування не лише математичних знань, умінь та навичок, але й професійно спрямованих компетентностей, включаючи навички математичного моделювання, аналізу складних систем, проблемного мислення та міждисциплінарної інтеграції. У статті наведено приклад реалізації пропонованого підходу у математичній підготовці майбутніх технічних фахівців.

Ключові слова: синергетичний підхід, фундаментальна математична підготовка, технічні фахівці, розв'язування фізичних задач, інтеграція, педагогічна система, самоорганізація, міждисциплінарність, професійна компетентність, математичне моделювання.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-12

1. Вступ

Розвиток наукового знання та ріст соціального замовлення щодо якості підготовки інженерних кадрів постають детермінантами, що ініціюють процеси якісної трансформації освітньої системи. На сучасному етапі трансформації освітньої системи України та з огляду на її динамічний розвиток особливої актуальності набуває синергетичний підхід. Такий підхід відображає не лише взаємозалежність і багатовимірність освітніх процесів, а й забезпечує ефективну взаємодію між їх елементами, результатом якої є поява нових якісних характеристик, що не зводяться до простої суми властивостей окремих компонентів системи. У контексті вищої технічної освіти це вимагає міждисциплінарної інтеграції та активної співпраці між усіма учасниками освітнього процесу.

Синергетичний підхід є *методологічною основою* для аналізу процесу фундаментальної математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю. У контексті синергетичного підходу фундаментальна математична підготовка постає як динамічна педагогічна система, що трансформується в умовах нелінійної взаємодії внутрішніх та зовнішніх факторів.

Такі процеси в освітньому просторі обумовлюють якісну трансформацію поглядів та методології навчання у вищій технічній школі. Це проявляється в оптимізації його організаційної структури та функціональних характеристик. У межах цього оволодіння курсом вищої математики розглядається не лише як засвоєння сукупності математичних знань, а як формування інтегрованого комплексу професійно орієнтованих компетентностей. До складу цього комплексу входять когнітивний (знання), операційний (навички та вміння), мотиваційно-ціннісний (професійна спрямованість) та рефлексивний компоненти, що забезпечують необхідний фундамент для успішної професійної діяльності майбутніх технічних фахівців.

Розвитком концепції реалізації синергетичного підходу в освітньому процесі займалися Лисенко Т. І.[12], Спірін О.М.[14], Сисоєва С. О. [13] та інші.

Зокрема, Кремень В. Г [11] розглядає філософсько-методологічні засади синергетики та її значення для розвитку освіти в Україні. Зайченко, О. І. [5], [6] досліджує процес становлення педагогічної синергетики як нової наукової парадигми в освіті.

У наукових розробках дослідників система освіти постає як нелінійна багатовекторна система, що розвивається в умовах взаємодії багатьох факторів. Реалізація синергетичного підходу в процесі підготовки майбутніх фахівців з технічного спрямування забезпечує формування гнучкої та динамічної освітньої системи, здатної до адаптації, саморозвитку та оперативного реагування на актуальні соціальні виклики та трансформації ринку праці.

Однак, попри наявність широкого спектру наукових розвідок у цьому напрямі, досі спостерігається фрагментарність у практичному впровадженні синергетичного підходу у математичну підготовку технічних фахівців. Актуальною залишається проблема узгодження традиційних методів навчання з новітніми освітніми концептами, що вимагає подальшого дослідження й методичного супроводу.

2. Постановка проблеми

Метою статті є теоретико-методичне обґрунтування та розробка моделі реалізації синергетичного підходу у фундаментальній математичній підготовці майбутніх технічних фахівців, виокремлення основних принципів її реалізації. Завданням дослідження є побудова траєкторії фундаментальної математичної підготовки, що має інтегративний та прикладний характер.

Для вирішення поставленого завдання ми пропонуємо інтегрувати розв’язування задач загальної фізики (або окремі фрагменти такого розв’язування) у процес математичної підготовки майбутніх технічних фахівців. Це зумовить посилення розуміння у студентів важливості вивчення математичних понять, формування аналітичного та критичного мислення.

Аналіз напрацювань дослідників феномену синергії та реалізації синергетичного підходу в освітньому процесі дозволив виокремити основні теоретико-дидактичні принципи реалізації синергетичного підходу у фундаментальній математичній підготовці майбутніх технічних фахівців, зокрема шляхом розв’язування фізичних задач. Основні принципи та їх обґрунтування наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Основні принципи реалізації синергетичного підходу у процесі математичної підготовки майбутніх технічних фахівців

Назва принципу	*Дослідники принципу*	*Трактування дії принципу у контексті фундаментальної математичної підготовки*
Принцип нелінійності	Haken, H. [2] Chernavskii, D. S. [1]	Взаємодія математичних знань та фізичних задач не є лінійною. Застосування математичних понять у процесі розв’язування фізичних завдань призводить до якісно нових рівнів розуміння обох дисциплін.
Принцип відкритості	Вознюк, О. В. [3], [4] Кремень В. Г. [11]	Освітній процес є відкритою системою, у якій відбувається обмін інформацією та ресурсами із зовнішнім середовищем (науковою літературою, практичним досвідом, вимогами професійної діяльності).
Принцип самоорганізації	Haken, H. [2]	Створення умов для активної пізнавальної діяльності студентів через розв'язування фізичних задач, викладач переважно не дає готових алгоритмів, стимулює процес самостійного пошуку знань та творчого застосування математичного апарату.

Отже, до основних принципів реалізації синергетичного підходу у фундаментальній математичній підготовці майбутніх технічних фахівців належать принципи *нелінійності, відкритості, самоорганізації.*

Розв'язування фізичних завдань або наведення елементів їх розв’язування на заняттях вищої математики активізує навички аналітичного мислення, дозволяє моделювати процеси, будувати алгоритми вирішення проблем та приймати обґрунтовані рішення. Такий підхід створює точки біфуракції (критичні моменти або стани в розвитку системи, коли її подальший шлях стає невизначеним) в традиційному освітньому процесі, стимулюючи студентів до активного застосування абстрактних математичних концепцій до аналізу конкретних фізичних явищ і процесів. Наприклад, при вивченні диференціального числення функції однієї змінної без наведення практичного застосування математичних понять та теорій студенти приходять до «висновку непотрібності» вивчення матеріалу вважаючи його виключно теоретичним. Від так, у студентів може бути втрачена мотивація вивчення як поточного навчального матеріалу, так і наступного, настає стан «нерівноваги» системи внутрішньої мотивації до навчання студентів. Точкою біфуракції в цьому випадку може бути інтеграція розв'язування фізичних завдань у структуру фундаментальної математичної підготовки студентів.

Дієвість пропонованої ідеї полягає у тому, що у процесі математичної підготовки лінійне накопичення математичних фактів заміняється формуванням у студентів нелінійних зв'язків між математичними абстракціями та конкретними фізичними явищами шляхом розв'язування фізичних задач. Ця взаємодія може призвести до виникнення нових розумінь та навичок, які не будуть сумою знань з обох дисциплін, а створять передумови для розуміння математичних знань, як потужного інструменту для дослідження світу, а не просто самоціллю. Саме тому розв'язування фізичних задач або наведення фрагментів розв'язування є ефективним інструментом до фундаментальної математичної підготовки майбутніх технічних фахівців.

3. Основний результат

При доборі фізичних задач у процесі фундаментальної математичної підготовки майбутніх технічних фахівців доцільно дотримуватися критеріїв, що сприятимуть оптимальному засвоєнню математичних знань та формування математичних умінь. Основними критеріями добору фізичних задач для посилення синергії математичної підготовки є

✓ ***фундаментальність фізичного змісту.*** Задачі повинні охоплювати ключові, фундаментальні поняття та закони фізики, які мають широке застосування в різних галузях техніки. Це забезпечує розуміння студентами універсальності фізичних принципів, що корелюють з універсальністю математичних методів;

✓ ***значущість математичного апарату для розв'язання.*** Розв'язання задач повинно зумовлювати застосування значного та різноманітного спектру математичних методів і концепцій, що вивчаються в курсі вищої математики (наприклад, диференціальне та інтегральне числення, векторний аналіз, диференціальні рівняння, лінійна алгебра, комплексні числа, теорія ймовірностей та математична статистика тощо). Це демонструє практичну необхідність математичних знань для аналізу фізичних явищ;

✓ ***модельний характер.*** Задачі повинні передбачати побудову математичної моделі фізичної ситуації, що розвиває у студентів навички формалізації реальних процесів математичною мовою, тобто вміння математично (формулою) описати фізичну ситуацію; важливо, щоб студенти розуміли етапи моделювання: від виділення ключових параметрів до інтерпретації математичних результатів у фізичному контексті.

✓ ***професійна орієнтованість.*** Бажано, щоб фізичні задачі мали зв'язок з майбутньою професійною діяльністю технічних фахівців у різних галузях. Це підвищує мотивацію студентів до вивчення як математики, так і фізики, демонструючи їхню практичну цінність для розв'язання інженерних, технічних завдань.

✓ ***різноманітність рівнів складності.*** Доцільно використовувати задачі різних рівнів складності – від простих ілюстративних прикладів до складних проблем, що вимагають творчого застосування знань та навичок. Це дозволяє враховувати індивідуальні особливості студентів та забезпечувати поступове зростання їхньої математичної та фізичної компетентності;

✓ ***візуалізація та наочність.*** Задачі, що піддаються наочній інтерпретації або можуть бути візуалізовані (графічно, схематично), сприяють кращому розумінню фізичної сутності проблеми та її математичної моделі;

✓ ***можливість для міждисциплінарних зв'язків.*** Задачі повинні створювати можливості для встановлення зв'язків не лише між математикою та фізикою, але й з

іншими технічними дисциплінами, що вивчаються студентами. Це сприяє формуванню цілісного наукового світогляду та розумінню системності знань.
Дотримання цих критеріїв при відборі фізичних задач дозволить максимально посилити синергію математичної підготовки майбутніх технічних фахівців, що сприятиме глибшому розумінню математичних концепцій.

Наведемо приклад реалізації пропонованого підходу - розв'язування фізичних задач та методологічним обґрунтуванням важливості дій, що виконуються під час цього процесу.

Задача. Посудина з водою висотою h знаходиться у вертикальному положенні. На якій висоті H потрібно зробити отвір, щоб дальність витікання води з отвору була максимальною (рис 1.)

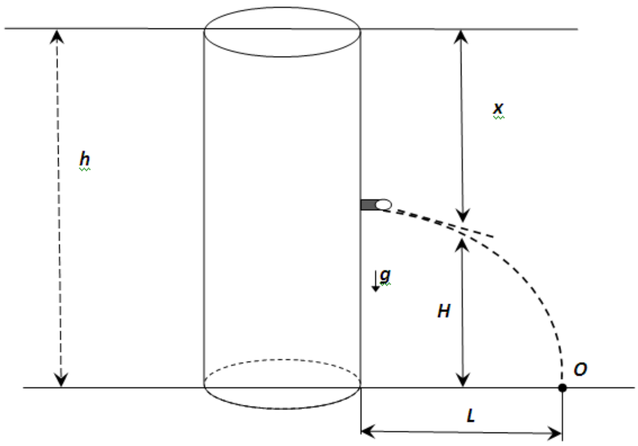


Рисунок 1.

H- висота отвору від горизонтальної поверхні;
h – висота посудини,
L – відстань на яку витікає вода.

Розв'язування	*Коментар*
Складаємо функцію $L=L(x)$, яка показує залежність витікання води з отвору від висоти x. Відомо: $L = V \cdot t$, (1) де t – час витікання води від отвору посудини до кінцевої точки O, V - швидкість витікання.	*Проведення актуалізацію знань складання функціональних залежностей.*
Для рівноприскореного руху $H = \frac{gt^2}{2}$, де g – прискорення вільного падіння. З останньої рівності знаходимо час (*дати кілька хвилин студентам для самостійного виведення формули*) $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$,	*Повторення вмінь елементарних перетворень функції, вираження одних змінних через інші.*
Швидкість витікання води визначаємо за законом Торрічеллі:	*Актуалізація вмінь встановлення*

$$V = \sqrt{2gx} \quad , (2)$$

закономірностей та взаємозалежностей між величинами.

Маємо: $x=h-H$, $H=h-x$
Тоді:

$$t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} , (3)$$

Підставимо швидкість (2) і час (3) в формулу (1), отримаємо:

$$L = \sqrt{2gx} \cdot \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = \sqrt{4x(h-x)} = 2\sqrt{x(h-x)} ,$$

де $x<0<h$

Отже, L є функцією від x $L = L(x) = 2\sqrt{x(h-x)}$

Досліджуємо функцію $L(x)$ на max на відрізку [0;h].
Відомо, що найбільше (найменше) значення функції на відрізку може знаходитися або у критичній точці, яка належить відрізку, або на кінцях відрізка.
Знаходимо похідну функції $L(x)$:

Проведення актуалізації знань та вмінь знаходити екстремум функції однієї змінної, встановлення мінімального та максимального значення функції на відрізку.
Систематизація зань та умінь обчислювати похідну складеної функції

$$L'(x) = \left(2\sqrt{x(h-x)}\right)' = 2\left(\left(x(h-x)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(x(h-x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x(h-x)\right)'$$

$$= \frac{\left(hx - x^2\right)'}{\sqrt{x(h-x)}} = \frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}$$

Знаходимо критичні точки функції L(x), які належать проміжку [0;h].
Похідна функції не існує в точках *0 і h* (на кінцях відрізка), які не належать області визначення похідної, тому їх не розглядаємо.
Прирівнюємо похідну до нуля, розв’язавши отримаємо рівняння. Знаходимо інші критичні точки:

Систематизація вмінь обчислення похідної функції, знаходження критичних точок, що належать проміжку функції.

$$\frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}} = 0$$

, або $h - 2x = 0$

Тоді: $x = \dfrac{h}{2}$

Тільки одна точка, корінь, тому:

$$H = \frac{h}{2}$$

Відповідь: $H = \dfrac{h}{2}$

Отже, розв'язування фізичних задач на заняттях вищої математики постає як потужний засіб фундаменталізації математичної підготовки майбутніх технічних фахівців.

Висновки.

1. Обґрунтовано теоретико-методологічні засади реалізації синергетичного підходу у процесі фундаментальної математичної підготовки майбутніх технічних фахівців. З позицій синергетики, фундаментальна математична підготовка розглядається як складна, відкрита педагогічна система.

2. Визначено ключовий механізм реалізації синергетичного підходу, як от, інтеграція розв'язування фізичних задач у процес вивчення вищої математики є детермінантом нелінійній взаємодії математичних та фізичних знань.

3. Розкрито дидактичний потенціал фізичних задач, як потужного засобу фундаменталізації математичної підготовки та формування цілісної системи наукового світогляду.

4. Виокремлено теоретико-дидактичні принципи реалізації синергетичного підходу у фундаментальній математичній підготовці майбутніх технічних фахівців через розв'язування фізичних задач, як-от: принципи *нелінійності, відкритості, самоорганізації.*

5. Виокремлено критерії добору фізичних задач для посилення синергії математичної підготовки: *фундаментальність фізичного змісту, значущість математичного апарату для розв'язання, модельний характер. професійна орієнтованість, різноманітність рівнів складності, візуалізація та наочність*, *можливість для міждисциплінарних зв'язків.*

6. Наведено приклад реалізації пропонованого синергетичного підходу – інтегрування фізичних задач у математичну підготовку технічних фахівців.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Chernavskii D. S**.** Synergetics: From Microscopic to Macroscopic Order. Springer-Verlag, 1991.
2. Haken H. Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology. Springer-Verlag, 1983.
3. Вознюк О. В. Педагогічна синергетика: генеза, теорія і практика : монографія. Житомир : Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2012. 708 с.
4. Вознюк О. В**.** Синергетичний підхід як метод аналізу розвитку вітчизняної педагогічної думки (друга половина ХХ століття) : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.01 «Загальна педагогіка та історія педагогіки». Житомир, 2009. 22 с.
5. Зайченко І. В**.** Педагогіка : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл. 2-ге вид. Київ : Освіта України ; КНТ, 2008. 528 с.
6. Зайченко О. І. Педагогічна синергетика: становлення парадигми. Черкаси : Вид-во ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2003.
7. Калашнікова С. А. Педагогічна синергетика: теоретико-методологічний аспект. Луганськ : Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2005.
8. Кирилащук С. А., Коломієць А**.** А. Формування графічної компетентності майбутніх фахівців технічних спеціальностей засобами штучного інтелекту. *Педагогіка безпеки*. 2024. № 1. С. 50–56.
9. Кирилащук С. А., Коломієць А**.** А., Хом`юк І. В., Васаженко Н. Проєктна діяльність у процесі підготовки фахівців у закладах вищої освіти. *Нова педагогічна думка*. 2023. № 2. С. 49–55.
10. Коломієць А**.,** Кашканова Г., Ковальчук М., Прозор О. Роль системного та синергетичного підходів у фундаменталізації математичної підготовки майбутніх технічних фахівців. *Педагогіка безпеки*. 2025. Вип. 10, № 1. С. 41–48.

11. Кремень В. Г. Синергетика і освіта. Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України, 2014. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/106585/1/
12. Лисенко Т. І. Синергетичний підхід у професійній освіті: теорія і практика : монографія. Кропивницький : Видавець Лисенко В. Ф., 2019. 284 с.
13. Сисоєва С. О. Теоретико-методологічні засади педагогічної інноватики : монографія. Київ : Педагогічна думка, 2010. 280 с.
14. Спірін О. М. Синергетичний підхід у контексті інформаційного освіти. *Інформаційні технології та засоби навчання*. 2011. № 1 (21). С. 1–12.

UDC 378.147:51:004

Synergetics and mathematical modeling: integration of physical problems into the process of mathematical training of technical specialists

Alona Kolomiiets, Mykhailo Lysiy, Svitlana Kyrylashchuk

Abstract. The work is devoted to the urgent problem of improving the quality of fundamental mathematical training of future technical specialists in the conditions of dynamic development of science and technology. This contributes to the nonlinear interaction of mathematical and physical knowledge, the formation of a holistic system of scientific worldview. The article substantiates the theoretical and methodological principles of implementing the synergistic approach as an effective strategy for modernizing the educational process in higher technical educational institutions. From the standpoint of synergetics, fundamental mathematical training is considered as a complex, open pedagogical system that is in a state of nonlinear dynamics and self-organization. The key mechanism for implementing the synergistic approach in the article is the integration of solving physical problems into the process of studying higher mathematics. The work reveals the didactic potential of physical problems as a means of fundamentalizing mathematical training. The theoretical and didactic principles for implementing the synergistic approach in the fundamental mathematical training of future technical specialists by solving physical problems are determined; The article presents criteria for selecting and constructing physical problems integrated into a mathematics course, which ensure the formation of not only mathematical knowledge, skills and abilities, but also professionally oriented competencies, including skills in mathematical modeling, analysis of complex systems, problem-solving thinking, and interdisciplinary integration. The article provides an example of the implementation of the proposed approach in the mathematical training of future technical specialists.

Keywords: synergetic approach, fundamental mathematical training, technical specialists, solving physical problems, integration, pedagogical system, self-organization, interdisciplinarity, professional competence, mathematical modeling.

References

1. Chernavskii, D. S. (1991). *Synergetics: From Microscopic to Macroscopic Order*. Springer-Verlag.
2. Haken, H. (1983). *Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology*. Springer-Verlag.
3. Vozniuk, O. V. (2012). *Pedagogical Synergetics: Genesis, Theory and Practice: Monograph*. Vyd-vo ZhDU imeni Ivana Franka, Zhytomyr. [in Ukrainian]
4. Vozniuk, O. V. (2009). Synergetic Approach as a Method of Analysis of the Development of Domestic Pedagogical Thought (Second Half of the 20th Century) : Abstr. of Ph.D. diss. : 13.00.01 «General Pedagogy and History of Pedagogy». Zhytomyr. [in Ukrainian]
5. Zaichenko, I. V. (2008). *Pedagogy : Textbook for Students of Higher Pedagogical Educational Institutions*, 2nd ed. Osvita Ukrainy ; KNT, Kyiv. [in Ukrainian]
6. Zaichenko, O. I. (2003). *Pedagogical Synergetics: Paradigm Formation*. Vyd-vo ChDU im. B. Khmelnytskoho, Cherkasy. [in Ukrainian]
7. Kalashnikova, S. A. (2005). *Pedagogical Synergetics: Theoretical and Methodological Aspect*. Vyd-vo SNU im. V. Dalya, Luhansk. [in Ukrainian]
8. Kyrylashchuk, S. A., Kolomiiets, A. A. (2024). Forming the Graphic Competence of Future Technical Specialists by Means of Artificial Intelligence, *Pedagogika Bezpeky*, **1**, 50–56. [in Ukrainian]
9. Kyrylashchuk, S. A., Kolomiiets, A. A., Khomiuk, I. V., Vasazhenko, N. (2023). Project Activity in the Process of Training Specialists in Higher Education Institutions, *Nova Pedahohichna Dumka*, **2**, 49–55. [in Ukrainian]

10. Kolomiiets, A., Kashkanova, H., Kovalchuk, M., Prozor, O. (2025). *The Role of Systemic and Synergetic Approaches in the Fundamentalization of Mathematical Training for Future Technical Specialists*, Pedagogika Bezpeky, **10** (1), 41–48. [in Ukrainian]
11. Kremin, V. G. (2014). *Synergetics and Education*. Institute of Information Technologies and Learning Tools, NAPS of Ukraine. [in Ukrainian]. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/106585/1/
12. Lysenko, T. I. (2019). *Synergetic Approach in Vocational Education: Theory and Practice: Monograph*. Vydavets Lysenko V. F., Kropyvnytskyi. [in Ukrainian]
13. Sisoieva, S. O. (2010). *Theoretical and Methodological Principles of Pedagogical Innovations: Monograph*. Pedahohichna Dumka, Kyiv. [in Ukrainian]
14. Spirin, O. M. (2011). *Synergetic Approach in the Context of Information Education*, Information Technologies and Learning Tools, 1 (21), 1–12. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Альона Коломієць, доктор педагогічних наук, професор, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна;

Alona Kolomiiets, Doctor of Sciences in Pedagogy, Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske Shosse Str., Vinnytsia 21021, Ukraine;

Михайло Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізики, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна;

Mykhailo Lysiy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske Shosse Str., Vinnytsia 21021, Ukraine;

Світлана Кирилащук, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна;

Svitlana Kyrylashchuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske Shosse Str., Vinnytsia 21021, Ukraine.

Отримано / Received 21.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 294–308.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 294–308.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.6.016:[373.5.016:51]

Теоретико-методичні аспекти моделі підготовки майбутніх учителів математики: професійна спрямованість і прикладний характер навчання

Олег Коношевський[1], Роман Гуревич[2], Аліна Воєвода[3]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра алгебри і методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
oleh.konoshevskyi@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8408-1829

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, науковий інститут аспірантури і докторантури, м. Вінниця, Україна
r.gurevych2018@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1304-3870

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра алгебри і методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
alina.voievoda@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1844-6759

Анотація. В статті розглянуто одну з важливих проблем у теорії та практиці педагогічної освіти – професійну підготовку майбутнього вчителя математики в університетах. Професійна математична освіта майбутнього вчителя будується на базовій математичній компетентності випускника закладу загальної середньої освіти (ЗЗСО) на рівні державного стандарту базової та повної середньої освіти України і далі проходить три щаблі свого розвитку: функціональна математична компетентність, професійно-математична компетентність (до рівня «математика-методолога»), науково-математична компетентність, що гарантує подальшу наукову діяльність випускника у галузі математики, методики навчання математики тощо. Пропонуються педагогічні умови формування моделі освітнього простору майбутнього вчителя математики на основі компетентнісного підходу.
Ключові слова: професійна математична освіта, освітній простір, компетентність, компетенція, модель підготовки майбутніх учителів математики.

1. Вступ

Підвищення якості загальної та професійної освіти є нагальною метою не лише української, а й світової освіти. Для розв’язання цієї проблеми переосмислюються цілі

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-13

та результати навчання, змінюється його зміст і використовуються терміни «кваліфікація», «професіоналізм». Дедалі частіше використовується поняття «професійна підготовка» в певній галузі.

Поняття «професійна освіта» набуло значного поширення в період реформи вищої освіти. Відповідно до концепції модернізації української освіти, основною метою професійної освіти є знання професії, ефективне виконання роботи, вільна орієнтація в суміжних галузях професійної діяльності та конкурентоспроможність на ринку праці.

У сучасних наукових дослідженнях питання професійної підготовки та спрямованості навчання майбутніх учителів математики як суб'єктів педагогічної діяльності, компетентних і здатних до саморозвитку, займає одне з головних місць у дослідженнях науковців. Розвитку професійної підготовки майбутніх учителів математики присвятили свої роботи науковці: І. Акуленко, В. Бевз, Г. Бевз, М. Бурда, С. Гончаренко, О. Дубинчук, М. Жалдак, М. Ігнатенко, В. Клочко, М. Ковтонюк, А. Кузьмінський, Н. Лосєва, Ю. Мальований, О. Матяш, Г. Михалін, В. Моторіна, З. Слєпкань, О. Співаковський, Н. Тарасенкова, Ю. Триус, О. Чашечнікова, В. Швець, М. Шкіль та ін. Поміж інших питань, яких стосувалися праці науковців, стали розглядати поняття «професійна компетентність вчителя математики» та «формування професійної компетентності майбутнього вчителя».

2. Постановка проблеми

Важлива вимога до моделі підготовки майбутніх учителів математики – спроможність демонструвати основні компетентності в своїй професійній діяльності. Тому суттєве значення тут надається ефективній реалізації компетентнісного підходу до професійної підготовки майбутніх фахівців.

Основною метою навчання в професійній підготовці майбутніх учителів математики є не лише математична освіта, а й знання студентами методики практичного застосування цих знань. Тому викладачі закладів вищої освіти (ЗВО) мають не лише озброїти студентів математичною інформацією, а й логічно осмислити її, дати логічну оцінку та продумати питання її здобуття у професійній діяльності. Науковці називають це «прогнозуванням майбутньої професійної діяльності». Для того, щоб ознайомитися з майбутньою професійною діяльністю, студенти проходять в університетах спеціальну професійну підготовку. Майбутній учитель математики має розуміти необхідність оволодіння ефективною та раціональною методикою навчання. Кожний викладач визнає, що під час професійної підготовки студента, предметно-методична компетентність – це ступінь, якої необхідно досягти майбутнім учителям математики.

Виникає питання, якою є структура моделі професійної підготовки майбутніх учителів математики, які компоненти входять до її складу, як потрібно формувати професійну спрямованість студента на основі цієї підготовки.

Щоб відповісти на ці запитання, ми поставили такі завдання:

- схарактеризувати розвиток концепції професійної підготовки;
- розкрити сутність поняття професійна спрямованість;
- визначити особливості професійної спрямованості майбутніх учителів математики в навчанні математичних дисциплін.

Мета статті – з'ясування теоретичних засад моделі професійної підготовки майбутніх учителів математики.

3. Основні результати

У розвідках О. Королюк йдеться про те, що «суспільство нині потребує фахівців нової генерації, які відповідають світовим освітнім стандартам». З огляду на це, підвищується роль учителя в суспільстві, адже від його діяльності значною мірою залежить ефективність реформ. Використання новітніх технологій, забезпечення діяльності високотехнологічних підприємств, сучасні тенденції в економіці підсилюють потреби в математичній освіті. Тому вдосконалення професійної підготовки, розвиток мобільності, активності, самостійності майбутніх учителів, а зокрема учителів математики, є одним із провідних завдань модернізації освіти [8, с. 133-134].

У дисертаційному дослідженні [10] В. Моторіна під професійною підготовкою майбутнього вчителя математики розглядає систему, яка забезпечує єдність змісту, структури, цілей навчання і виховання, способів реалізації знань, умінь і навичок. Дослідницею визначено й обґрунтовано педагогічні умови підготовки майбутніх учителів математики, а саме: майбутнього вчителя варто готувати до професійної праці не лише функціонально, а й як творчу особистість; зміст і структуру методичних дисциплін будувати відповідно до завдань і основних компонентів професійної підготовки майбутнього вчителя на основі ціннісно-гуманістичної спрямованості; процес формування професійно-технологічних умінь на основі викладання методики здійснювати цілеспрямовано, з урахуванням педагогічних умов, які сприяють їх реалізації; процес включення майбутніх педагогів у навчально-дослідницьку і науково-дослідницьку діяльність має бути систематичним і цілеспрямованим» [10].

Погоджуємося з думкою дослідниці Т. Коростіянець, яка стверджує, що «навчання з педагогічного напряму в ЗВО надає широкі можливості для здійснення підготовки майбутніх вчителів математики до діагностики метапредметних умінь. У процесі професійної підготовки студентам надається великий вибір форм роботи з обраної дисципліни, багате методичне забезпечення навчального процесу, різноманіття тематики курсових і випускних кваліфікаційних робіт, а також високий рівень професійної підготовки викладацького складу» [9, с. 22].

«Структура професійної підготовки майбутніх учителів, – зазначає в своїй дисертації О. Бігун, – включає три основних компоненти:

1) курс методики навчання фахового предмета, започаткований для розвитку професійних знань та вмінь навчати певної дисципліни (практичні прийоми викладання обраного предмету, уміння планувати уроки, оцінювати, організовувати роботу учнів у мікрогрупах);

2) курси професійних знань і школознавства, спрямовані на забезпечення глибокого розуміння студентами процесу формування педагогічної компетентності під час опрацювання тем загальноосвітнього характеру та практичного спрямування;

3) педагогічна практика» [3, с. 116].

У розвідках Т. Коростіянець йдеться про те, що «в умовах сучасної підготовки майбутнього вчителя переважає компетентнісний підхід, який характеризується переходом від репродуктивної діяльності до самостійної, пошуково-дослідницької, експериментальної. Формування професійної компетентності майбутнього вчителя математики передбачає оволодіння сукупністю основних компетенцій: методологічної, психолого-педагогічної, предметної та методичної. Методологічна компетенція вчителя забезпечується формуванням у майбутнього вчителя системи знань і здатності «відкривати» нові знання. Психолого-педагогічна компетенція розкриває особистісну позицію. Предметна компетенція передбачає оволодіння системою наукових знань і вмінь» [9, с. 23]. Методична компетенція спрямована на оволодіння майбутніми вчителями знань і вмінь методичного характеру, тобто методи, прийоми, засоби, форми навчання.

Слушною є думка науковців В. Галузинського та М. Євтуха, котрі «визначають терміном «підхід» сукупність організаційних, педагогічних, психологічних та методологічних впливів на особистість майбутнього фахівця, завдяки яким забезпечується його ефективне та успішне навчання, виховання та розвиток, а в цілому – його професійна підготовка як сучасного професіонала і громадянина [4, с. 73].

У баченні В. Безлюдної під «професійною підготовкою майбутнього вчителя розуміємо систему організаційно-педагогічних заходів, зорієнтованих на особистісний його розвиток, метою і кінцевим результатом якого має стати готовність до виконання професійно-педагогічної діяльності [2, с. 78].

На думку О. Андрусь, професійна підготовка − це «організаційно-методичний процес формування у студентів їх професійної компетентності, активної життєвої позиції, внутрішньої культури, здатності до продуктивного спілкування з навколишнім світом для професійно-особистісної та соціальної реалізації, навчання та самоосвіти упродовж життя» [1, с. 292].

За змістом підготовка тісно пов’язана з процесом спорядження, приготування до чогось. Поняття професійної підготовки передбачає певну сукупність спеціальних знань, умінь та навичок, що дозволяють виконувати роботу в певній галузі професійної діяльності. Отже, використання присудка «професійна» відноситься до деталей роботи з розвитку особистості, тобто до досягнення професіоналізму як здатності людини спілкуватися в професійному світі з урахуванням норм і вимог цього світу.

Отже, поняття «професійна підготовка» можна визначити як професійну (фахову) освіту, основний шлях здобуття якої – самоосвіта або навчання:

− у закладах професійної (професійно-технічної) освіти;
− у закладах професійної та фахової передвищої освіти (коледжах і технікумах) на базі повної або неповної середньої освіти;
− у ЗВО на базі повної середньої освіти;
− під час підготовки робітників на виробництві;
− під час курсового навчання;
− під час підвищення кваліфікації робітниками та фахівцями або їхньої перепідготовки.

Проблема професійної підготовки студентів до багатофункціональної діяльності на користь рівності та соціальної справедливості нині займає одне з пріоритетних місць у системі професійної освіти, метою якою є засвоєння учнями навичок, необхідних для виконання певної роботи; повідомлення учням знань та умінь і відповідний результат у вигляді сукупності спеціальних знань, умінь, навичок, якостей, трудового досвіду, що забезпечують можливість успішної роботи з певної професії; результат навчання в закладах професійної освіти.

Результати освіти, що здобувається в результаті професійної підготовки, на думку європейських науковців, зумовлені збільшенням мобільності фахівців, володінням дипломами та кваліфікаційними можливостями і можливостями сумісності. Реалізація підходу до професійної підготовки в Україні може стати важливим чинником становлення та розвитку єдиного освітнього, професійно-кваліфікаційного та культурно-ціннісного простору.

Основні функції професійної підготовки у вищій освіті можна визначити так:

1) здійснення професійної та соціальної потреби випускників ЗВО, підготовлених до практичної діяльності й участі в повсякденному житті;

2) наявність засобу усунення помилкової оцінки можливостей, що надаються освітою, умови реалізації особистісних якостей студентів;

3) надання можливості визначати конкретні об’єкти навколишньої дійсності для можливості цілеспрямованого комплексного застосування здобутих знань, умінь і прийомів роботи;

4) постановка досвіду професійної діяльності, необхідної для формування в студентів практичних навичок та здібностей щодо реальних об’єктів дійсності;

5) наявність частини змісту різних навчальних дисциплін і сфер освіти як змісту міжпредметних елементів освіти;

6) поєднання теоретичних знань із можливостями їх практичного застосування для розв'язання професійних завдань;

7) виконання функції інструменту організації комплексного особистісного та соціального освітнього контролю з докладним описом якості підготовки майбутніх учителів математики.

Загалом підхід до професійної підготовки майбутніх учителів математики в системі освіти впливає на посилення суворості й адаптивності стандартів, що стосуються місцевого, регіонального, національного та міжнародного контекстів, збільшення академічної свободи ЗВО, підвищення орієнтованості освітніх результатів на вимоги ринку праці.

Професорка Т. Годованюк зауважує, що «в умовах реформування середньої освіти вчитель математики є однією із ключових ланок інтенсифікації й раціоналізації пізнавально-освітньої, науково-дослідницької, інтелектуально-творчої діяльності учнів. Очевидно, що реформування шкільної освіти, реалізація концепції Нової української школи, впровадження в освітній процес інноваційних технологій і засобів навчання вимагають оновлення підходів та осучаснення змісту методичної підготовки майбутніх учителів математики. Держава потребує успішного, мобільного, конкурентоспроможного вчителя математики, який є активним і творчим фахівцем, відповідальним громадянином та здатний підвищувати освітній рівень підростаючого покоління задля забезпечення сталого розвитку України. Успішним і конкурентним учитель буде лише за умови, якщо темп його навчання перевищить темп змін у зовнішньому середовищі, що в свою чергу, сприятиме формуванню здатності і вміння навчатися та вдосконалюватися впродовж усього життя [5, с. 6-7].

Різноманітність дослідницьких підходів до вивчення моделі професійної підготовки майбутніх учителів математики привела до появи низки її визначень у психолого-педагогічній літературі. Аналіз цих визначень привів до висновку про те, що професійна підготовка студентів у педагогічному університеті є складною системою, що динамічно розвивається, оскільки вона:

− є комплексною й ієрархічною за своєю структурою;

− схильна до постійних змін у зв'язку зі змінними вимогами суспільства, які зумовлені його соціокультурними трансформаціями, появою нових функцій у професійній діяльності педагогів;

− залежить від особливостей особистісно-професійного становлення людини.

Говорячи про цільову складову професійної підготовки студентів у ЗВО, в тому числі й педагогічного, дослідники розглядають його як:

− повідомлення студентам відповідних знань та вмінь, які забезпечують їм можливість успішної роботи з обраної професії;

− результат засвоєння ними системи професійних знань, усвідомлення особистісного змісту цих знань;

− засвоєння професійних умінь;

− розвиток найважливіших професійно-особистісних якостей;

− становлення особистісного досвіду професійної діяльності через спільну діяльність студентів і викладачів;

− становлення суб'єктної позиції студента в розв'язанні навчально-професійних завдань, які відповідають за своїм змістом основним типам професійних завдань сучасного вчителя математики;

− становлення суб'єктного досвіду засвоєння цілісної професійної діяльності.

Отже, професійна підготовка в педагогічному університеті є логічно завершеним ланцюжком взаємопов'язаних і повторюваних видів діяльності, що здійснюються з використанням ресурсів ЗВО. Результатом діяльності є дидактично перероблений соціокультурний досвід; особистісний досвід, який здобувають студенти педагогічного університету на основі суб'єктного спілкування (і зумовлених ним ситуацій), що проявляється у формі переживання, сенсу творчості, саморозвитку.

Змістовний аспект процесу професійної підготовки у педагогічному університеті відображається в задачній логіці його побудови. Сукупність професійних завдань утворює «ядро» змісту професійної підготовки в педагогічному університеті, а етапи становлення професійної компетентності визначають логіку «розгортання» змісту.

Акцентуючи увагу на результаті професійної підготовки в педагогічному університеті, дослідники говорять про його якість та необхідність відповідності результатів підготовки кваліфікаційним вимогам, необхідність наявності сукупності компетентностей, які дозволять випускнику бути успішним у своїй професійній сфері. Очікувані результати професійної підготовки в педагогічному університеті визначені в стандартах вищої професійної освіти та професійному стандарті. Новим у стандартизації вищої педагогічної освіти є те, що стандартизується не навчання, не зміст освіти, а її результати.

Підсумовуючи аналіз визначень професійної підготовки у ЗВО, можна зробити висновок, що дослідники, інтерпретуючи це поняття, розглядають професійну підготовку в педагогічному університеті як мету, процес і результат.

У процесі проведеного дослідження було визначено, що професійна підготовка – це процесуальна цілісність, яка проявляється під час підготовки фахівців педагогічного профілю до професійної діяльності, характеризується вмінням чітко та швидко приймати рішення, загальною спрямованістю особистості щодо педагогічного явища, високим інтересом до своєї професії, володінням ефективними прийомами спілкування, навичками регуляції, консультування й інтерв'ювання.

Далі розглянемо особливості професійної спрямованості навчання математики в педагогічному університеті.

Дослідниця Є. Іванченко зазначає, що «професійна спрямованість студентів педагогічних спеціальностей визначається позитивним ставленням та інтересом до педагогічних професій, внутрішнім впливом (мотивами вибору педагогічної спеціальності), зовнішнім впливом (впливом родичів, друзів), соціальною значущістю обраної спеціальності тощо. Професійна спрямованість складається з таких компетенцій: позитивне ставлення до професії; професійна придатність; професійна мотивація; професійні інтереси, цінності, відносини; психологічна готовність до професійної діяльності; професійна усталеність» [6, с.124].

Формування професійної спрямованості в діяльності здобувачів освіти – це зміцнення їхнього позитивного ставлення до майбутньої професії, інтересу, схильності та здібностей до неї, прагнення до вдосконалення своєї кваліфікації після закінчення ЗВО, задоволення своїх основних матеріальних і духовних потреб, розвиток ідеалів, поглядів, переконань, престижу професії, постійно займаючись вибраним видом професійної праці. В сучасній літературі з психології компоненти цих якостей та професійної спрямованості є показником рівня її розвитку та сформованості студентів, що характеризуються стійкістю, планами на далеке чи найближче майбутнє. Об'єктом педагогічної професії є людина, а предметом – діяльність, що спрямована на її розвиток, виховання та навчання. Дуже важливо розуміти структуру професійної спрямованості не тільки через певну професійну діяльність, а й через соціально значимі дії, такі як заняття спільною працею. Професійна спрямованість визначається чуттєвими формами (цікавість, бажання, пристрасть), і навіть позиціями, тенденціями, інтересами, нахилами, ідеалами, переконаннями. Як видно з наведених визначень, потреби, інтереси та схильності, а також ідеали та переконання часто поділяються. Це дозволяє припустити, що ці компоненти також відіграють певну роль у формуванні професійної спрямованості.

У літературі зазначається, що педагогічні засоби реалізації професійної спрямованості навчання є елементами змісту навчання. У психолого-педагогічній літературі трактування концепції професійної спрямованості освіти полягає в такому:

− професійна спрямованість учня проявляється через позитивне ставлення до професії;

− структура професійної спрямованості визначається суспільно-цінною діяльністю та професійною працею. Узагальнюючи підходи до поняття професійної спрямованості навчання в контексті нашого дослідження, варто зазначити, що залежно як від професійного розвитку здобувачів освіти, так і від спеціальності, що здобувається ними, які навчаються математичної та будь-якої педагогічної освіти треба зазначити, що професійна спрямованість навчання математики передбачає формування позитивних відносин як математика – предмет, що сприяє особистості.

Розуміємо професійну спрямованість як «теорію навчання в умовах поєднання основ науки з професійною освітою, іншими словами, теорію зв'язку основ науки з професійною підготовкою здобувачів освіти. Професійна спрямованість загальноосвітніх дисциплін, на думку авторів статті, може бути забезпечена шляхом удосконалення загальної структури освіти, змісту загальноосвітніх дисциплін і методів навчання. За такого підходу враховується лише технічна сторона професійної підготовки. Однак, оскільки підсумковою метою освіти є формування всебічно розвиненої особистості, зміст принципу професійної спрямованості нині розширюється. Такий підхід до розуміння професійної спрямованості визначає пізнавальні, морально-етичні та світоглядні аспекти професійної спрямованості. Він характеризує професійну спрямованість так: під професійною спрямованістю навчання загальноосвітніх дисциплін у ЗЗСО розуміється використання дидактичних засобів, що забезпечують засвоєння мінімуму знань, умінь та навичок, передбачених програмами, а також сприяють розвитку в них ціннісного ставлення до обраної професії якостей особистості майбутнього фахівця.

Провідними професійно значущими якостями фахівця у суспільстві є його професійна компетентність, конкурентоспроможність, здатність ефективно розв'язувати завдання в широкому діапазоні соціальних, професійних і життєвих ситуацій. У цьому особлива роль відводиться оновленню змісту професійної освіти з метою приведення її у відповідність до вимог суспільства та ринку праці, переосмислення цілей і результатів освіти.

Математична освіта, її зміст і рівень мають сприяти підготовці фахівців, які працюють у галузях математики, природничих і технічних наук, у відповідних сферах практичної діяльності, пов'язаної з навчанням математики. Тому математична освіта займає одне з основних місць у системі загальної освіти. У зв'язку з цим однією з актуальних проблем є пошук ефективних шляхів вибору змісту математичної освіти та підвищення якості навчання математики.

Для того, щоб максимально реалізувати можливості математики в закладах педагогічної освіти, мета, методи та зміст її навчання як навчальної дисципліни повинні мати міждисциплінарний зв'язок відповідно до знань та кваліфікацій, одержаних здобувачами освіти з спеціальних дисциплін.

У створенні методичної системи професійно-орієнтованого навчання математики в педагогічних університетах важливе значення набуває створення можливостей для розвитку наочно-інтуїтивних основ і практичної спрямованості, сприйняття учнями концепцій, висновків та завдань, пов'язаних з майбутньою професією, способами мислення, а не орієнтація на логічно суворе викладання теорії, здійснюючи міждисциплінарні зв'язки зі спеціальними дисциплінами.

Зростає нині і значення математичної підготовки всіх фахівців, зокрема майбутніх учителів математики. Оскільки математика є важливим стратегічним ресурсом розвитку людської епохи, вона торкається практично всіх сторін діяльності держави – економічної, військової, природоохоронної, технологічної, культурної, управлінської й інших сфер. Базова підготовка учня визначається запитами суспільства та визначається певними аспектами. В сукупності ці компоненти забезпечують результат, очікуваний майбутнім учителем математики впродовж усього періоду навчання. Ці компоненти мають формуватися під час навчання будь-якої навчальної дисципліни. Під час навчання конкретної дисципліни фундаментальної підготовки майбутнього вчителя математики є забезпечення вміння опановувати та використовувати знання, необхідні для формування особистості. Викладачі можуть правильно сформувати майбутніх учителів математики лише в тому випадку, якщо вони розглядають вимоги підготовки фахівців як підсумкову мету та як прикінцевий результат під час викладання загальноосвітніх дисциплін.

У зв'язку з цим математиці відводиться особливе місце у підготовці передових, конкурентоспроможних та сучасних учителів математики. Недарма кажуть, що «Математика – цариця наук». За яку б спеціальність ви не взялися, її майбутнє неможливо уявити без математики.

Для максимальної реалізації можливостей математики в педагогічних університетах мета, методи та зміст її викладання як навчального предмета мають супроводжуватись наступністю відповідно до одержаних учнями в ЗЗСО знань і кваліфікацій. Тому в побудові методичної системи навчання математики в педагогічних університетах важливе значення набуває створення можливостей для розвитку наочних інтуїтивних основ та практичної спрямованості, сприйняття здобувачами освіти концепцій, висновків і завдань, пов'язаних із майбутньою професією, способами мислення, а не орієнтація теорії на логічний виклад, здійснюючи наступність зі змістом шкільної математичної освіти.

Як зазначено в «Концептуальних засадах розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір», методична підготовка передбачає вивчення методик викладання навчальних предметів та методик проведення позашкільної і позакласної роботи. Забезпечується також шляхом вивчення психолого-педагогічних дисциплін, проходження навчальних, виробничих (педагогічних) практик, а також шляхом методичної спрямованості викладання фундаментальних навчальних дисциплін [9].

Під час навчання математики здобувачі освіти повинні якнайглибше зрозуміти практичну сутність змісту теми, важливість її подальшого застосування. Під час освоєння будь-якого теоретичного матеріалу найкраще відзначити сферу його застосування.

Наявність глибоких і міцних знань, уміння розв'язувати професійні завдання формування високого рівня ставлення до професійної діяльності надає можливість доповнювати та розвивати власні знання під час розв'язання будь-яких складних завдань, що необхідно для раціонального використання розумових здібностей, які виникають у професійної діяльності.

Уроки математики мають включати зв'язок між теорією та завданнями і навчати студентів розв'язувати необхідні та прикладні завдання з дисципліни.

Демонстрація прикладного напряму математики в галузі техніки формує ставлення здобувачів освіти до навчального предмету. На уроці математики необхідно тісно пов'язати теоретичний і розрахунковий матеріал, сформувати реальні та систематичні математичні навички учня. Ці навички будуть необхідними для подальшого вивчення математики та застосування їх у житті та професії. В більшості випадків студенти складають завдання абстрактного змісту, діти мало цікавляться звичайними обчисленнями, тому їхня активність знижується.

З цієї причини необхідно доповнювати різні за змістом прикладні завдання загальною математичною моделлю, абстрактні завдання практичним змістом.

Викладання математики в прикладному напрямі означає її застосування в техніці та суміжних з нею науках, орієнтування на застосування в народному господарстві та побуті, встановлення зв'язків з уроками фізики, хімії, географії, технологій; комп'ютерної грамотності, формування навичок математичного мислення та роботи, навчання учнів розв'язання завдань, формування навичок самостійного розрахунку, виведення прикладів.

Зрозуміло, що для глибокого засвоєння духовних і матеріальних багатств природи, неможливо розв'язати проблему без зважування, розрахунку та диференціації. Саме тоді розкривається роль математики у природі, у житті.

Під час професійної підготовки необхідно здійснювати такі методичні рекомендації щодо розв'язання прикладних завдань:

– прикладні завдання мають регулярно включатися до навчальної програми, а не епізодично;

– вправи для прикладних завдань повинні відповідати програмному матеріалу математики;

– через обмеженість термінів навчання вправи для прикладних завдань мають бути підібрані правильно й адекватно;

– система вправ будується за принципом від простого до складного, і виконується в залежності від ступеня складності.

На завершення зазначимо, що прикладні завдання поглиблюють знання учнів, допомагають формувати знання та ділові навички, необхідні для застосування математики у повсякденному житті, найголовніше, що через прикладні завдання забезпечуємо професійну орієнтацію, можемо навчити використовувати одержані знання в житті, в будь-якій ситуації, у соціальному середовищі.

Викладання математики відіграє значну роль в системі підготовки майбутніх учителів математики. Математичні методи в алгебрі, геометрії та математичному аналізі через свою універсальність можуть використовуватися на рівні загальнонаукової методології, показуючи зв'язок між теоретичними матеріалами та практикою. Впровадження нових стандартів у систему освіти забезпечило зміну змісту програм із математики щодо різних напрямів професійної підготовки та з погляду компетентності.

Навчання математики завжди сильно впливало на формування стилю мислення школяра, що актуально і для нашого часу. Тому перехід на нові стандарти освіти, розроблені на основі компетентнісного підходу, підвищення ефективності навчання математики є необхідним завданням. Отже, компетентнісний підхід є основою підготовки випускників до майбутньої професійної діяльності.

Для одержання результатів у навчанні математики необхідно змінити підхід до навчання, переглянути зміст освіти в частині забезпечення компетентнісного підходу, здійснити впровадження інноваційних освітніх технологій (з використанням гри, зміни ролей вчителя та учнів та ін.), необхідно також використовувати систему формуючого оцінювання, систематично підвищувати кваліфікацію вчителів.

Виходячи з вищевикладеного, сформулюємо мету навчання математики в педагогічних університетах:

– оволодіння основами математичних знань відповідно до сучасних вимог до майбутніх учителів математики;

– формування математичної культури майбутніх учителів математики;

– створення міждисциплінарної бази для подальшого вивчення спеціальних дисциплін у галузі педагогіки.

Отже, особливістю навчання студентів педагогічного університету є розробка методичної системи професійно-орієнтованої математичної освіти, оскільки математика є базою для засвоєння загальнопрофесійних предметів, предметів професійно-модульного навчання, інструментом розв’язання професійних завдань.

Професійна спрямованість навчання математики здійснюється через систему завдань, спеціально підібраних для професій та спеціальностей. Крім використання професійно-орієнтованих завдань на заняттях з математики можуть бути реалізовані такі шляхи здійснення прикладного характеру математики:

1) відкриття оригінальності реального світу за допомогою математичних інструментів;

2) наближення методів розв’язання математичних завдань до методів, що використовуються у виробничій діяльності;

3) формування необхідного практичного досвіду та практичних ділових навичок у навчальній діяльності.

До завдання під час занять математики у педагогічному університеті потрібно висувати такі вимоги:

− завдання мають відповідати програмі курсу, включатися в навчальний процес як необхідний компонент, служити досягненню цілей навчання;

– способи та методи розв’язання завдання мають бути близькими до практичних методів і прийомів;

− демонстрація конкретної навчальної ситуацію;

− використання реальних цифрових даних;

− включати визначення професійних термінів;

− прикладна частина завдання має включати його математичне значення;

− тексти доповідей студентів має демонструвати реалізацію міждисциплінарних зв’язків.

Можна запропонувати розв’язання завдань із різних тем та спеціальностей.

Знайомство з різними видами математичних моделей під час роботи з професійно орієнтованими завданнями дозволяє сформувати у студентів уявлення про важливість математики в їхній майбутній професійній діяльності. Їх використання сприяє організації професійної підготовки студентів із математики, що забезпечує успішне вивчення предметів міждисциплінарних курсів і формування професійної компетентності майбутніх учителів математики.

Отже, під професійною спрямованістю навчання педагоги розуміють використання засобів, які забезпечують засвоєння студентами матеріалу, передбаченого програмою, мінімум знань, умінь та навичок, а також сприяють розвитку в них позитивного ставлення до обраної професії, формування особистісних якостей майбутнього фахівця.

Сучасна педагогічна діяльність, що відрізняється складним і динамічним характером, передбачає використання цифрових інформаційних технологій, зразків технічних досягнень і характеризується високим рівнем відповідальності. Для прийняття відповідальних рішень в умовах сучасного освітнього процесу важливе глибоке розуміння учителем математики всіх освітніх процесів з урахуванням їх взаємозв’язку, особливо на етапі навчання. Саме від правильності дій учителя математики залежить, чи буде швидко ліквідована допущена помилка, що виникла, або вона перейде в серйозну, здатну спричинити важкі наслідки.

Соціально-економічні перетворення, що відбуваються в суспільстві, вплинули на зміну цілей підготовки студентів педагогічних спеціальностей. В умовах ринкової економіки та необхідності використання наукомістких технологій в освіті затребувані сучасні вчителі, що володіють фундаментальними математичними знаннями, вміють користуватися відповідним математичним апаратом, розробляти нові й оптимізувати наявні рішення, вільно переміщатися інформаційним простором, володіючи актуальною інформацією та можливістю діяти. Пріоритетним компонентом професійної підготовки студентів є їхня математична підготовка, що сприяє формуванню професійно-математичної компетентності майбутніх учителів математики.

«Кінцевий результат реалізації системи методичної підготовки майбутніх учителів математики в університеті вбачаємо у фаховій готовності та здатності до методично грамотної реалізації комплексного підходу в освітньому процесі з математики, що визначається через систему математичних, методичних, спеціально-наукових, психологічних, педагогічних знань і вмінь, власного досвіду, ціннісних орієнтирів, професійних та особистісних якостей педагога» [5, с. 8].

Висновки. Домогтися якісного викладання математики у ЗВО можна застосуванням методичних і змістовних методів в організації освітнього процесу. Створення певної структури освітнього процесу, визначення основних видів, методики та засобів навчання, ретельний відбір предметного змісту визначається конкретними дидактичними засадами педагогіки. Загалом ці принципи є реальними досягненнями сучасної педагогіки та постійно змінюються. Це можна пояснити поступовою зміною та розширенням наявної системи дидактичних принципів. Розв'язати цей комплекс питань можна за допомогою компетентнісних методів, а також шляхом запровадження в програму моделі підготовки майбутніх учителів математики у ЗВО спеціальних, професійно спрямованих математичних дисциплін. Професійна спрямованість викладання курсу математики покликана послідовно сформувати психологічну та соціальну спрямованість майбутніх учителів математики з урахуванням їхньої подальшої професійної діяльності, а також встановити міжпредметні зв'язки під час організації освітнього процесу в педагогічних університетах.

Водночас необхідно звернути увагу на професійну спрямованість навчання, що свідчить про обов'язковий і тісний зв'язок навчання з наукою та практикою.

Основним завданням виконаної нами роботи було вивчення теоретичних основ професійної спрямованості викладання дисциплін математики в педагогічних університетах. Це має велике значення з погляду вдосконалення майбутніх учителів математики, які навчаються у педагогічному університеті, та створення необхідних умов підвищення якості навчання, орієнтуючи дисципліни вищої математики на подальшу професійну діяльність.

Методологічну основу цієї роботи становить об'єднання методів системного аналізу основної концепції викладання математики у ЗВО з перспективними можливостями активізації та посилення професійної спрямованості під час її викладання. У ході дослідження проаналізували основні особливості викладання математики у системі вищої освіти.

Вивчення теоретичних основ професійно-спрямованого викладання математики в педагогічному університеті, проведене нами, показало, що надалі необхідно враховувати такі основні аспекти:

1. Визначення змісту дисциплін математики з правилами, що формують професійну компетентність майбутніх учителів математики та діючими освітніми програмами ЗВО.

2. У навчанні демонструвати зв'язок математики з вузькоспеціальними предметами, які вивчаються у межах навчальних програм ЗВО.

3. Основна увага приділяється навчанню студентів певним навичкам, необхідним для подальшого застосування одержаних знань у житті майбутніх учителів математики.

4. Розвивати вміння учнів самостійно аналізувати зміст математичних дисциплін, що вивчаються, з метою підвищення якості засвоєння нових знань.

5. З метою підвищення якості сприйняття студентами актуальної навчальної інформації, використання методу аналогій на заняттях, пов'язаних із майбутньою професійною діяльністю майбутнього вчителя математики. Важливо вміти якісно

спроєктувати освітній процес відповідно до вимог сьогодення. Це пов'язано з тим, що завдяки цьому визначається рівень професійної підготовки майбутніх учителів математики, рівень їхніх математичних знань у рамках програми у ЗВО.

Саме тут варто приділяти особливу увагу поглибленій математичній підготовці студентів. Під час цієї підготовки було встановлено, що слід звернути увагу на такі аспекти:

1. Базова, фундаментальна підготовка, заснована на придбанні спеціальних знань у галузі математики, що безпосередньо даються здобувачам освіти під час навчання основних математичних дисциплін, таких як алгебра, лінійна геометрія, математичний аналіз, основи теорії інтегральних та диференціальних рівнянь.

2. Педагогічна та професійна підготовка, основою якої є методична та психологічна освіта. Опанування цього гарантує ефективну організацію професійної діяльності випускника в майбутній педагогічній діяльності.

3. Загальнокультурна підготовка, заснована на вихованні інтелектуально розвинених особистостей, здобутті знань соціального та економічного характеру, необхідних гуманітарних дисциплін, адаптованих до реального способу життя та вимог майбутньої професії.

Отже, основна мета вивчення математики – одержати математичну освіту, необхідну студентам для використання математичних методів у розв'язанні практичних задач, розвитку інтуїції та формування математичної культури. Майбутні вчителі математики повинні добре розумітися на математичному апараті, що дозволяє їм розв'язувати різні проблеми, як теоретичні, так і практичні, та розвивати свої логічні міркування. Вивчення математичних дисциплін сприяє навчанню майбутніх учителів математики навичкам, необхідним для успішної роботи в своїй професійній сфері. Важливо навчити студентів бачити математичні концепції й усвідомлювати дії математичних законів у навколишньому світі та в сфері знань.

Математична освіта студентів математичних спеціальностей – один із ключових елементів їхньої майбутньої професійної діяльності. Важливо як одержати математичні знання, а й навчитися застосовувати їх у розв'язанні конкретних прикладних задач. Навчання «за допомогою задач» дозволяє студентам зміцнити свої теоретичні знання на практиці та розвинути навички розв'язання проблем.

Під час цього важливо також звертати увагу на зв'язок математичних знань зі спеціальністю студента, щоб він міг бачити не тільки теоретичні можливості, а й практичну застосовність математики у своїй майбутній професійній діяльності. Отже, найбільш ефективним підходом є комбінування навчання через завдання з прикладами практичного застосування математики в конкретних галузях педагогічної діяльності. Це дозволить студентам більш усвідомлено й ефективно використовувати свої математичні знання у майбутній діяльності.

Для формування високої професійної підготовки майбутнього вчителя математики необхідно використати конкретні завдання, які допоможуть розвинути системний підхід до розв'язання проблем. Система завдань, які були спеціально підібрані з урахуванням їхньої професійної спрямованості, дозволить виявити практичну значущість математичної теорії, що вивчається.

У професійному математичному завданні математичний контент, прихований у стані, представлений освітнім контентом професійного характеру. Такі завдання допомагають студентам навчитися застосовувати базові знання та навички в професійних ситуаціях та сприяють формуванню здатності передавати ці знання в практичні задачі. Процес розв'язання професійно орієнтованої математичної задачі складається з кількох етапів.

Виконання професійних задач, що включають елементи дослідження, допомагає підвищити інтерес студентів до вивчення дисциплін, розширює можливості нестандартного мислення та заохочує їхнє прагнення до самостійної роботи. Важливим аспектом є те, що студенти повинні мати можливість розуміти свої результати під час набуття знань та навичок, а також ступінь відповідності своїх особистих якостей та інтересів обраної професії та конкретним сферам. Отже, розв'язання завдань на основі математичних дисциплін та їх застосування допоможе майбутньому вчителеві математики не тільки одержати необхідні знання, а й навчити їх орієнтуватися у своїй майбутній професійній діяльності.

Перспективи подальших пошуків пов'язані з окресленням шляхів розвитку підготовки та професійної спрямованості навчання майбутніх учителів математики, а й в інших видах освітньої діяльності пов'язаної з підготовкою кадрів для реалізації ідей професійної підготовки, а також розробкою інноваційних технологій, що дозволять істотно збагатити професійну підготовку майбутніх учителів математики.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів та повністю дотримувалися всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори висловлюють вдячність факультету математики, фізики і комп'ютерних наук Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, який надав допомогу в написанні та перевірці статті. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Андрусь О. Сучасні аспекти професійної підготовки студентів у технічних університетах. *Проблеми підготовки сучасного вчителя*. 2011. № 4 (2). С. 283–294.
2. Безлюдна В. Професійна підготовка майбутніх учителів як наукова проблема. *Вісник Черкаського університету.* 2016. № 4. С. 76–79.
3. Бігун О. М. Педагогічна підготовка майбутніх учителів середніх шкіл у коледжах Великої Британії : дис. … канд. пед. наук : 13.00.04. *ДВНЗ Переяслав-Хмельницький держ. пед. ун-т ім. Григорія Сковороди*, 2020. 231 с.
4. Галузинський В. Г., Євтух М. Б. Основи педагогіки та психології вищої школи. Київ, 1995. 168 с.
5. Годованюк Т. Л. Методична підготовка майбутніх учителів математики: теорія і практика : монографія. Умань: Видавець «Сочинський М. М.», 2019. 316 с.
6. Іванченко Є. А. Дослідження щодо виявлення професійної спрямованості студентів та результати її формування в системі інтегративної професійної підготовки майбутніх економістів. *Наука і освіта.* Одеса, 2009. № 10. С.123–129.
7. Концептуальні засади розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір : Наказ МОН № 988 від 31.12.2004 р. URL: https://osvita.ua/legislation/Vishya_osvita/3145/
8. Королюк О. М. Професійна підготовка майбутніх учителів математики у Великій Британії. *Інноваційна педагогіка.* 2022. Випуск 52. Том 1. С. 133–138. DOI: https://doi.org/10.32782/2663-6085/2022/52.1.25
9. Коростіянець Т. П. Підготовка майбутніх вчителів математики до діагностики освітніх результатів як засіб формування їх методичної компетентності. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах.* 2021. № 74, Т. 3. С. 21–25. DOI: https://doi.org/10.32840/1992-5786.2021.74-3.3
10. Моторіна В. Г. Дидактичні і методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів математики у вищих педагогічних навчальних закладах : автореф. дис... д-ра пед. наук : 13.00.04. Харків, 2005. 45 с.

UDC 378.6.016:[373.5.016:51]

Theoretical and methodological aspects of the training model for future mathematics teachers: professional orientation and applied nature of training

Oleh Konoshevskyi, Roman Gurevych, Alina Voievoda

Abstract. The article considers one of the important problems in the theory and practice of pedagogical education – professional training of future mathematics teachers in universities. Professional mathematical education of a future teacher is built on the basic mathematical competence of a graduate of a general secondary education institution (GGSO) at the level of the state standard of basic and complete secondary education of Ukraine and then goes through three stages of its development: functional mathematical competence, professional mathematical competence (up to the level of "mathematician-methodologist"), scientific and mathematical competence, which guarantees the graduate's further scientific activity in the field of mathematics, mathematics teaching methods, etc. Pedagogical conditions for the formation of the educational space of a future mathematics teacher based on a competency approach are proposed.

Keywords: professional mathematical education, educational space, competence, model for training future mathematics teachers.

References

1. Andrus, O. (2011). *Modern aspects of professional training of students in technical universities,* Problems of training of a modern teacher, **4** (2), 283–294. [in Ukrainian]
2. Bezlyudna, V. (2016). *Professional training of future teachers as a scientific problem.* Bulletin of Cherkasy University, **4**, 76–79. [in Ukrainian]
3. Bihun, O. (2020). *Pedagogical training of future secondary school teachers in colleges of Great Britain: dissertation ... candidate of pedagogical sciences: 13.00.04.* State Higher Educational Institution Pereyaslav-Khmelnytskyi State Pedagogical University named after Hryhoriy Skovoroda. [in Ukrainian]
4. Galuzynskyi, V., Yevtukh, M. (1995). *Fundamentals of Pedagogy and Psychology of Higher Education*, Kyiv. [in Ukrainian]
5. Godovanyuk, T. (2019). *Methodical training of future mathematics teachers: theory and practice: monograph*, publisher Sochynskyi M. M., Uman. [in Ukrainian]
6. Ivanchenko, E. (2009). *Research on identifying students' professional orientation and the results of its formation in the system of integrative professional training of future economists,* Science and Education, Odesa, **10**, 123–129. [in Ukrainian]
7. Conceptual principles of the development of pedagogical education in Ukraine and its integration into the European educational space: Order N. 988 of 12.31.2004 / Ministry of Education and Science of Ukraine. [in Ukrainian]. https://osvita.ua/legislation/Vishya_osvita/3145/
8. Korolyuk, O. (2022). *Professional training of future mathematics teachers in Great Britain*, Innovative pedagogy, **52** (1), 133–138. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32782/2663- 6085/2022/52.1.25
9. Korostyanets, T. (2021). *Training future mathematics teachers for the diagnosis of educational results as a means of forming their methodological competence,* Pedagogy of the formation of a creative personality in higher and general education schools, **74** (3), 21–25. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32840/1992-5786.2021.74-3.3
10. Motorina, V. (2005). *Didactic and methodological principles of professional training of future mathematics teachers in higher pedagogical educational institutions:* author's abstract of the dissertation... Doctor of Pedagogical Sciences: 13.00.04, Kharkiv. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Олег Коношевський, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Oleh Konoshevskyi, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Роман Гуревич, доктор педагогічних наук, професор, дійсний член (академік) НАПН України, директор наукового інституту аспірантури і докторантури, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Roman Gurevych, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Full Member (Academician) of the National Academy of Sciences of Ukraine, Director of the Scientific Institute of Postgraduate and Doctoral Studies, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Аліна Воєвода, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, декан факультету математики, фізики і комп’ютерних наук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Alina Voievoda, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Dean of the Faculty of Mathematics, Physics and Computer Sciences, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 13.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 04.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 309–317.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 309–317.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147.091.33-028.16/.21:514.122

Формування математичних компетентностей під час використання моделювання в інтерактивному навчанні на уроках математики

Ольга Кравчук[1], Анна Никитюк[2]

[1] Волинський національний університет імені Лесі Українки
кафедра математичного аналізу та статистики, м. Луцьк, Україна
olikr57@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-3828-7783

[2] Волинський національний університет імені Лесі Українки
кафедра математичного аналізу та статистики, м. Луцьк, Україна
anna.nykytiukk@gmail.com
https://orcid.org/0009-0004-7158-2068

*Анотація***.** Концепція Нової української школи визначає важливість використання методів навчання. У статті висвітлено основні принципи моделювання в інтерактивному навчанні математики та аргументовано переваги їх застосування в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти. Подано характеристику окремих методів моделювання в інтерактивному навчанні, розкрито значення їх використання у процесі формування математичних компетентностей.

Моделювання в інтерактивному навчанні є альтернативою навчальної діяльності учнів за сучасних умов у нашій країні. Правильне використання моделювання в інтерактивному навчанні передбачає інтеграцію з іншими методами, надаючи перевагу активній взаємодії учнів, практичному застосуванні знань і розвитку критичного мислення. Всі інтерактивні методи мають за мету активно залучати учнів до освітнього процесу, зацікавити їх самостійно міркувати, свідомо засвоювати інформацію. На відміну від традиційних, основним завданням яких в освітньому процесі була передача вчителем «готових» знань учням, інтерактивні методи базуються на активній взаємодії учасників освітнього процесу, при цьому увага звертається на взаємодію учнів між собою. Такий підхід дозволяє, активізуючи навчальний процес, зробити його більш цікавим, а, значить, менш виснажливим для учнів. На уроках має бути атмосфера доброзичливості, взаємопідтримки, взаємоповаги, організовується індивідуальна, парна, групова робота у процесі якої формуються математичні компетентності, розвиваються дослідницькі, творчі здібності, логічне мислення. Моделі роблять абстрактні або складні поняття більш зрозумілими та наочними, надаючи візуальне уявлення про предмет, захоплюють учнів, пробуджують в них інтерес та мотивацію.

Ефективне вивчення математики потребує самоконтролю у використанні часу, в організації самостійної роботи, в умінні правильно вибрати і використати інтернет-ресурси. Математика вимагає від учня сили волі, ініціативи та витримки на шляху до перемоги.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-14

Завдання кожного учителя – навчити учнів не обходити, а переборювати труднощі, виховувати у них наполегливість, прагнення до досліджень. У вирішенні цих питань допоможе моделювання в інтерактивному навчанні на уроках математики. Використання моделювання в інтерактивному навчанні є одним із перспективних напрямів розвитку освіти в Україні.

Метою формування математичної компетентності є навчити учнів застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання та можливості використання.

Ключові слова: математика, моделювання, інтерактивне навчання, математична компетентність, національна школа.

1. Вступ

У Концепції Нової української школи підкреслюється важливість використання методів навчання: «У процесі навчання будуть використовуватися методи, які вчать робити самостійний вибір, пов'язувати вивчене з практичним життям, враховують індивідуальність учня» [8].

Концепція визначає модель випускника школи як цілісної, усебічно розвиненої особистості, здатної до критичного мислення; патріота з активною позицією, який діє згідно з морально-етичними принципами і здатний приймати відповідальні рішення; інноватора, здатного змінювати навколишній світ, розвивати економіку, конкурувати на ринку праці, учитися впродовж життя. Проблема навчання математики, формування відповідних знань, вмінь, навичок та зацікавленості у вивченні предмета завжди потребувала значних зусиль як вчителя, так і учнів. Використання моделювання в інтерактивному навчанні на уроках математики є особливо актуальним сьогодні та сприятиме вирішенню цієї проблеми. Формування математичної компетентності передбачає розвиток здатності особи бачити математику в житті, створювати математичні моделі об'єктів, явищ, процесів навколишнього світу, застосовувати набуті знання при вирішенні повсякденних завдань.

Пандемія і повномасштабна війна внесли свої корективи у роботу шкіл України. Хоча навчальний процес у таких умовах переважно відбувається в онлайн режимі, та це не означає, що проблема виховання у дітей відповідального ставлення до навчання і праці вже відійшла у минуле. Саме інтерактивні методи навчання ефективніше, ніж інші педагогічні технології, активно залучають учнів до навчального процесу, спонукають їх міркувати самостійно, краще засвоювати інформацію, прияють інтелектуальному, соціальному й духовному розвитку, формують готовність жити й працювати у гуманному, демократичному суспільстві.

2. Постановка проблеми

«Інтерактивне навчання (від лат. Interaction – взаємодія) – навчання, побудоване на взаємодії учнів з навчальним оточенням, навчальним середовищем, що служить сферою засвоєння знань» – таке тлумачення знаходимо у педагогічному словнику [3].

Про елементи інтерактивного навчання писав у своїх працях В. Сухомлинський, над розробкою та дослідженням використання інтерактивних методів працювали вчителі-новатори 70-80-х рр. (В. Шаталов, С. Лисенкова, Ш. Амонашвілі та ін.) [4]. Різні аспекти застосування інтерактивних методів навчання досліджували С. Лисенкова, В. Давидов, М. Кларін, Т. Кошманова, Л. Пуховська та ін. Вивченням специфіки і завдань інтерактивних технологій навчання в Україні займалися К. Баханов, І. Дичківська, О. Комар, О. Пометун, Л. Пироженко [10] та ін.

У сучасних дослідженнях науковців-педагогів, учителів-практиків прослідковується інтерес до вивчення можливостей та ефективності використання інтерактивних методів навчання. Підтвердженням цього є низка публікацій, у яких подається огляд інтерактивних методів навчання [9], видів інтерактивних методів та прийомів навчання [1], розглядається сутність та призначення їх, упровадження у навчальний процес на прикладах окремих конкретних методів [5], подаються презентації [4].

Інтерактивні методи – способи навчання, у процесі яких учні і вчитель перебувають у режимі бесіди, діалогу між собою. Це співпраця, взаємонавчання: вчитель – учень, учень – учень. При цьому вчитель і учень – рівноправні, рівнозначні суб'єкти навчання. Під час такого спілкування учні вчаться бути демократичними, спілкуватися з іншими людьми, критично мислити, ухвалювати обґрунтовані рішення [2].

Моделювання в інтерактивному навчанні передбачає створення реальних або віртуальних ситуацій, процесів чи систем, що дозволяє учням досліджувати, експериментувати, радитися та приймати рішення при виконанні певного завдання.

Мета статті полягає у теоретичному обґрунтуванні системи інтерактивних методів навчання з використанням моделювання, які сприяють формуванню математичних компетентностей учнів у процесі навчання математики, дослідженні шляхів розв'язання проблеми підвищення якості математичних знань.

3. Основні результати

Моделювання в інтерактивному навчанні може мати різні форми залежно від цілей навчання та предмету вивчення.

Інтерактивне навчання – це специфічна форма організації пізнавальної діяльності, яка має передбачувану мету – створити комфортні умови навчання, за яких кожен учень відчуває свою успішність, інтелектуальну спроможність [11, с. 9].

Пометун О., Пироженко Л. виділяють чотири групи інтерактивних технологій навчання: групове навчання (робота учня з учителем чи однолітком один на один, трійками, четвірками), фронтальне навчання, навчання у грі, навчання у дискусії.

Групова навчальна діяльність – це форма організації навчання у малих групах учнів, об'єднаних спільною навчальною метою. За такої організації навчання учитель керує роботою кожного учня опосередковано, через завдання, якими він спрямовує діяльність групи. При цьому відкриваються для учнів можливості співпраці зі своїми ровесниками, реалізувати природне прагнення до спілкування, досягнення вищих результатів засвоєння знань і формування вмінь. Така модель легко й ефективно поєднується із традиційними формами та методами навчання [7, с. 22].

Важливим фактором, що впливає на ефективність формування математичних компетентностей, є різноманітність форм і прийомів організації навчального процесу. Розглядаючи різні інтерактивні технології, ми виділяємо найбільш характерні для кожної з них дидактичні можливості. Однак варто зауважити, що в процесі використання моделювання в інтерактивному навчанні освітній процес відбувається за умови постійної активної взаємодії учнів: всі учасники залучаються до процесу пізнання, отримання певного результату, де кожен робить індивідуальний внесок, обмінюється знаннями, ідеями, способами розв'язання проблеми.

Ситуативне моделювання (рольові ігри, кейс-методи) інтерактивного навчання передбачають одночасну спільну роботу всього класу. Серед них найпоширенішими є «Мікрофон» , коли кожен учень має можливість швидко, по черзі висловити свою думку чи вказати правильну відповідь до завдання, або закінчити початок запропонованого твердження і «Мозковий штурм», коли колективно обговорюються запропоновані кілька варіантів для прийняття спільного розв'язання конкретної проблеми (вправи, задачі тощо). Часто використовують інші інтерактивні методи навчання математики, зокрема: «Навчаючи-вчуся» – розвиває здатність передавати знання іншим, формулювати та пояснювати складні поняття, орієнтуватися і вирішенні проблем, які виникають у цьому процесі; метод кейсів («Case-метод») стимулює здатність практично застосовувати отримані знання, аналізуючи реальні ситуації, оцінювати можливі ризики та пропонувати способи ефективного розв’язання завдання; «Акваріум» – розвиває вміння уважно слухати, різнобічно аналізувати отримані обґрунтування розв’язання певної задач, на основі почутого робити певні висновки, критично оцінювати пропозиції інших.

До інтерактивних технологій навчання у грі відносяться імітації, рольові ігри, драматизація. Гра – це гімнастика розуму, що розвиває творчу фантазію, сприяє вихованню досконалої особистості. На уроках математики є великі можливості застосовувати нетрадиційні форми роботи: уроки-ігри, уроки-змагання, уроки-казки, уроки-подорожі тощо.

Умови навчального процесу, за ігровою моделлю, відрізняються від традиційного навчання. Учням надають максимальну свободу інтелектуальної діяльності, що обмежується лише конкретними правилами гри. Учні самі обирають свою роль у грі; висуваючи припущення про ймовірний розвиток подій, створюють проблемну ситуацію, шукають шляхи її розв’язання, покладаючи на себе відповідальність за обране рішення. Учитель в ігровій моделі виступає як: інструктор (ознайомлення з правилами гри, консультації під час її проведення), суддя-рефері (коригування і поради стосовно розподілу ролей), тренер (підказки учням з метою прискорення проведення гри), головуючий, ведучий (організатор обговорення). Як правило, ігрова модель навчання має 4 етапи: – орієнтація (введення учнів у тему, ознайомлення з правилами гри, загальний огляд її перебігу); – підготовка до проведення гри (ознайомлення зі сценарієм гри, визначення ігрових завдань, ролей, орієнтовних шляхів розв’язання проблеми); – основна частина – проведення гри; – обговорення [7, с. 42].

Навчання у дискусії, проведення дебатів розвиває в учнів уміння будувати аргументи та контраргументи, відстоювати свої ідеї, оцінювати протилежні точки зору, знаходити компроміси, спонукає до висловлення своєї думки, стимулює вироблення творчого ставлення до будь-яких висновків, правил тощо.

Інтерактивні методи не можуть бути «мистецтвом заради мистецтва» – вони повинні чітко реалізувати мету заняття, повинні просто підвести до очікуваних результатів. З іншого боку, сама суть інтерактивності вводить елемент непередбачуваності. Отже, результат є, з одного боку, ефектом підготовки з боку наставника, а з іншого – наслідком цілої гами реакцій, які виникають під час заняття. Навчальна група не є лише зібранням індивідуумів, для яких проводиться заняття – завдяки цим методам група створює нову творчу освітню якість [6].

Вчитель під час інтерактивного навчання виступає як організатор процесу навчання, консультант, фасилітатор. Головними у цьому процесі є зв’язки між учнями, їхня взаємодія і співпраця. Учень перестає бути пасивним споживачем готової інформації, а активно працює над оволодінням знаннями. Він має аналізувати навчальну інформацію, творчо підходити до засвоєння нового матеріалу, що сприяє усвідомленню, формуванню інтересу і розвиває творчу ініціативу. Ефективнішому вирішенню цих завдань допомагає створення проблемної ситуації, яка визначає початковий момент мислення і викликає пізнавальну необхідність учня, створює внутрішні умови для активного засвоєння нових знань і способів діяльності.

Проблемна ситуація породжується конкретною навчальною ситуацією, яка пов’язує вже відому інформацію з досі невідомою (новою). Постановка проблеми передбачає забезпечення таких дидактичних цілей: акцентувати увагу учня на досліджуваному питанні (завданні); викликати у нього пізнавальний інтерес та інші мотиви діяльності;

поставити перед учнем такі посильні пізнавальні завдання, подолання яких активізувало б його розумову діяльність; вказати учню на протиріччя між його пізнавальною необхідністю та наявними у нього компетентностями. Наведемо деякі приклади.

Перед зведенням дробів до спільного знаменника учні вивчають дії над звичайними дробами з однаковими знаменниками. Доцільно запропонувати додати дроби з різними знаменниками, при цьому учні переконуються у необхідності зведення дробів до спільного знаменника.

Під час розв’язування квадратних рівнянь, ще до вивчення теореми Вієта, доцільно запропонувати учням встановити зв’язок між коренями та коефіцієнтами квадратного рівняння. Це зацікавить учнів, а дехто з них самостійно намагатиметься сформулювати теорему.

Математична мова – символьна. Враховуючи досвід навчання математики у закладах загальної середньої освіти, знаємо з якими труднощами зустрічаються учні сьомого класу, починаючи вивчати алгебру. Вони не можуть звикнути до того, що числа можуть позначатися буквами і що над ними можна виконувати ті самі дії, як і над звичайними числами. Учні відчувають труднощі, записуючи формули для розв’язання задач, складаючи рівняння за умовою задачі й інші. Для подолання цих труднощів доцільно практикувати введення буквеної символіки на уроках математики, починаючи з п’ятого класу. Наприклад, під час повторення теми «Цілі числа» варто ввести поняття довільного числа натурального ряду, позначивши його буквою n, можна запропонувати учням назвати і записати наступне за ним натуральне число (n+1), попереднє йому (n-1). Далі, в процесі вивчення подільності чисел можна ввести загальний вигляд парного (2n) і непарного (2n+1) числа, пропонуючи учням назвати і записати декілька послідовних парних (непарних) чисел, а потім дітям з високим рівнем знань розв’язати задачі на доведення: 1) довести , що добуток чисел n(n+1) ділиться на 2; 2) добуток чисел n(n-1)(n+1) кратний шести та інші.

Якщо символи вводяться не самі по собі, а за їх змістом, то й використання мови символів (букв) сприймається рівносильним використанню звичної нашої мови.

Процес навчання на уроках математики потребує напруженої розумової роботи учня, його власної активної участі у цьому процесі. Одним із важливих завдань є розвиток логічного мислення. Шляхи досягнення цієї мети різноманітні. Це розв’язування задач, складання задач учнями, доведення прямої і оберненої теорем, проведення практичних робіт і диктантів, розв’язування усних задач і прикладів на кмітливість тощо. Важливо, щоб учні у результаті тривалої аналітико-синтетичної роботи в процесі сприйняття нового матеріалу, розв’язування задач і повторення вивченого зрозуміли сенс того чи іншого міркування, твердження і зробили самостійні висновки щодо їх важливості та практичного значення.

Формують уміння застосовувати знання не лише у рамках одного предмета, а й інших дисциплін шкільного курсу, розвивають їхній кругозір та інтуїцію інтегровані математичні диктанти. Учнів необхідно готувати до майбутнього життя, у якому вони зустрічатимуться саме з інтегрованими, комплексними завданнями. Дуже добре залучати їх самих до складання таких диктантів. При цьому вони матимуть можливість ще раз перегорнути сторінки підручників, додаткової літератури, самостійно відшукати та опрацювати інформацію на довідкових інтернет-сайтах.

Математичні диктанти розвивають в учнів увагу, кмітливість, дозволяють економити час на організації опитування.

Зупинимось на завданнях. Вивчаючи тему «Ознаки подільності чисел» вчитель проводить диктант, розрахований на 10 хвилин.

1). Які із сум 120+962, 240+125, 414+510 діляться націло на 2, на 3, на 5?

2). Знайти остачу від ділення кожного з чисел 4165, 364, 6021 на 3, на 5.

3). Замість знаку питання поставити цифри так, щоб отримані числа ділились націло:

– на 3: 17?4, 1?43, 60?14;

– на 4: 83?95??, 70?4;

– на 9: 136?5, 4825?, 294?.

Для розвитку кмітливості учнів і підвищення культури математичної мови доцільно практикувати усне розв'язання задач за готовими слайдами чи рисунками, підготовленими заздалегідь. Цей вид роботи варто практикувати на кожному уроці не лише за раніше вивченим, але і по новому матеріалу.

Наприклад, після пояснення правила множення коренів у 8 класі учням можна запропонувати для усного розв'язання наступні вправи:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6};\ 3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14};\ 3\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Розв'язуючи усно, учні не лише використовують правило множення коренів, а й усно розкладають на множники підкореневі вирази, виносять множники з-під знаку кореня, виконують скорочення підкореневих виразів і т. д.

Швидкість і раціональність вмілого виконання перетворень та обчислень дуже важливі при вивченні математики. Без сумніву ефективність роботи учня і класу в цілому буде невисокою, якщо учні ділитимуть 34,68:17 стовпчиком, або на уроці алгебри рівняння

$$x^2-5x+6=0$$

будуть розв'язувати не за теоремою Вієта. Використання усного рахунку має сприяти свідомому засвоєнню раціональних способів обчислень.

Ми вже зауважували на тому, що при інтерактивному навчанні комунікаційні зв'язки виникають не тільки між учителем і учнями, а й між усіма учнями. Це особливо прослідковується під час розв'язання задач, висловлювання ідей щодо способів відшукання розв'язків. Привчати учнів до обов'язкового аналізу завдання, запису математичної моделі і можливості використання способу його виконання – першочергове завдання вчителя. Моделювання є не просто допоміжним інструментом, а центральним елементом інтерактивного навчання, який забезпечує глибше розуміння предмета та ефективну підготовку до реалій життя.

Зупинимось, зокрема, на важливості цієї проблеми під час розв'язування задач з геометрії. «Знайти площу трикутника, сторони якого відповідно дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см». Не аналізуючи умову задачі, учні намагаються використати формулу для обчислення площі трикутника:

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a.$$

Виникає трудність у відшуканні висоти. Наступним способом у міркуваннях учнів є використання формули Герона. Проте, детально проаналізувавши умову задачі, учні врешті-решт приходять до висновку про те, що даний трикутник – прямокутний і його площу можна обчислити усно:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=60(\text{см}^2).$$

Навчання стає навчальною діяльністю тільки в тому випадку, якщо учень у ході здобування знань опановує нові способи навчальних дій, що випливають із самостійно поставлених навчальних задач, засвоює прийоми самоконтролю й самооцінки своєї навчальної діяльності. Саме самостійна робота може сформувати в учнів необхідні навички у розв'язанні задач, виконанні обчислень, тотожних перетворень, розв'язуванні рівнянь тощо. Дуже важливо, щоб в організації та проведенні самостійних робіт, у підборі завдань для самостійних робіт була спеціальна система. Тільки у цьому випадку учні отримають навички розв'язання задач.

Варто зауважити, що в учнів помітно згасає інтерес до навчання, з кожним роком знижується рівень успішності. Як свідчать результати складання національного мультипредметного тесту з математики впродовж останніх декількох років, динаміка невтішна, оскільки середній бал з цього предмету все знижується. На це безперечно впливають зовнішні фактори у зв'язку з пандемією та повномасштабною війною. Проте, дуже важливу роль відіграє самодисципліна та усвідомлення важливості отриманих знань, розуміння того, що саме вони є підґрунтям майбутнього життя. Досить влучне висловлення нашого українського педагога та письменника Василя Сухомлинського: «Хоча б над тобою було сто вчителів – вони будуть безсилі, якщо ти не зможеш сам змусити себе до праці і сам вимагати її від себе» [12].

Висновки. Розвиток математичних компетентностей кожного учня неможливий без використання моделювання в інтерактивному навчанні. Воно завжди має бути мотивованим і орієнтованим на конкретних учнів. Інтерактивні методи – це найкращий шлях для досягнення мети. Але їх упровадження у освітній процес потребує чимало зусиль, щоби отримати хороший результат. Потрібно навчити учня користуватися знаннями, бути творчим, вміти спостерігати, аналізувати, розв'язувати проблеми, вміти співпрацювати з однокласниками під час вирішення спільної проблеми тощо.

Моделювання є не просто допоміжним інструментом, а центральним елементом інтерактивного навчання, який забезпечує глибше розуміння предмета та ефективну підготовку до реальних життєвих викликів.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Види інтерактивних методів та прийомів навчання: Електронний ресурс. URL: https://vseosvita.ua/library/vydy-interaktyvnykh-metodiv-ta-pryiomiv-navchannia-641318.html
2. Використання інтерактивних методів: Електронний ресурс. URL: http://vikoristannya-interaktivnih-metodiv-navchannya.html
3. Гончаренко С. Український педагогічний словник. Київ: Либідь, 1997. 376 с.
4. Інноваційні технології в початковій школі. Київ: Шкільний світ, 2018. 112 с.
5. Інтерактивні методи навчання: переваги та використання в сучасній освіті. Електронний ресурс. URL: https://gosta.media/nauka-ta-osvita/interaktyvni-metody-navchannia-perevahy-ta-vykorystannia-v-suchasnij-osviti
6. Інтерактивні методи навчання: Електронний ресурс. URL: https://nmc-pto.rv.ua/DOK/IMN_2005.pdf.I
7. Інтерактивні технології навчання: Теорія, досвід: метод. посіб. авт.-уклад.: О. Пометун, Л. Пироженко. Київ: А.П.Н., 2002. 136 с.
8. Концепція Нової української школи: Електронний ресурс. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/739493
9. Огляд інтерактивних методів: Електронний ресурс. URL: http://multycourse.com.ua/ua/page/19/698
10. Пометун О., Пироженко Л. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. Київ, 2011. 135 с.
11. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. Київ: А.С.К., 2004. 192 с.
12. 10 золотих цитат В. Сухомлинського про школу та виховання: Електронний ресурс. URL: https://naurok.com.ua/post/10-zolotih-citat-v-suhomlinskogo-pro-shkolu-ta-vihovannya

UDC 378.147.091.33-028.16/.21:514.122

Formation of mathematical competencies through the use of modeling in interactive learning in mathematics lessons

Olga Kravchuk, Anna Nykytiuk

Abstract. The concept of the New Ukrainian School emphasizes the importance of teaching methods. This article highlights the basic principles of modeling in interactive mathematics education and argues for the advantages of their application in the educational process of general secondary education institutions. It provides a description of individual modeling methods in interactive teaching and reveals the significance of their use in the process of developing mathematical competencies.

Modeling in interactive teaching is an alternative to the educational activities of students in the current conditions in our country. The correct use of modeling in interactive learning involves integration with other methods, giving preference to active student interaction, practical application of knowledge, and the development of critical thinking. All interactive methods aim to actively involve students in the educational process, encourage them to think independently, and consciously assimilate information. Unlike traditional methods, whose main task in the educational process was the transfer of "ready-made" knowledge from the teacher to the students, interactive methods are based on the active interaction of participants in the educational process, with attention focused on the interaction between students. This approach makes the learning process more active and interesting, and therefore less exhausting for students.Classes should have an atmosphere of friendliness, mutual support, and mutual respect. Individual, pair, and group work should be organized to develop mathematical competencies, research and creative abilities, and logical thinking. Models make abstract or complex concepts more understandable and vivid, providing a visual representation of the subject, engaging students, and arousing their interest and motivation.

Effective learning of mathematics requires self-control in the use of time, in the organization of independent work, and in the ability to correctly select and use Internet resources. Mathematics requires students to have willpower, initiative, and perseverance on the path to success. The task of every teacher is to teach students not to avoid difficulties, but to overcome them, to instill in them perseverance and a desire for research. Modeling in interactive learning in mathematics lessons will help in solving these issues. The use of modeling in interactive learning is one of the promising areas of development of education in Ukraine.

The goal of developing mathematical competence is to teach students to apply mathematics in real life, understand the content and method of mathematical modeling, and its possible uses.

Keywords: mathematics, modeling, interactive learning, mathematical competence, national school.

References

1. *Types of interactive teaching methods and techniques*: Electronic resource. [in Ukrainian]. https://vseosvita.ua/library/vydy-interaktyvnykh-metodiv-ta-pryiomiv-navchannia-641318.html
2. *The use of interactive methods*: An electronic resource. [in Ukrainian]. http://vikoristannya-interaktivnih-metodiv-navchannya.html
3. Goncharenko, S. (1997). *Ukrainian Pedagogical Dictionary*. Kyiv: Lybid. [in Ukrainian]
4. *Innovative technologies in primary school*. (2018), Shk. svit, Kyiv.
5. *Interactive teaching methods: advantages and use in modern education*: Electronic resource. [in Ukrainian]. https://gosta.media/nauka-ta-osvita/interaktyvni-metody-navchannia-perevahy-ta-vykorystannia-v-suchasnij-osviti
6. *Interactive teaching methods*: Electronic resource. https://nmc-pto.rv.ua/DOK/IMN_2005.pdf.I
7. Pometun, O., Pirozhenko, L. (2002). *Interactive learning technologies: Theory, experience*: methodical manual, A.P.N, Kyiv. [in Ukrainian]
8. *The concept of the New Ukrainian School*: Electronic resource. [in Ukrainian]. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/739493/
9. *Overview of interactive methods*: Electronic resource. [in Ukrainian]. http://multycourse.com.ua/ua/page/19/698
10. Pometun, O., Pirozhenko, L. (2011). Interactive learning technologies: theory, practice, experience, Kyiv. [in Ukrainian]
11. Pometun. O., Pirozhenko, L. (2011). A modern lesson. Interactive learning technologies: theory, practice, experience, A.C.K., Kyiv. [in Ukrainian]
12. *10 golden quotes of V. Sukhomlynsky about school and education*: Electronic resource. [in Ukrainian]. https://naurok.com.ua/post/10-zolotih-citat-v-suhomlinskogo-pro-shkolu-ta-vihovannya

Про авторів / About the authors

Ольга Кравчук, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математичного аналізу та статистики, Волинський національний університет імені Лесі Українки, вул. Банкова, 9, м. Луцьк, 43003, Україна;

Olha Kravchuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Statistics, Lesia Ukrainka Volyn National University, 9 Bankova Str., Lutsk 43003, Ukraine.

Анна Никитюк, студентка, факультет інформаційних технологій та математики, Волинський національний університет імені Лесі Українки, вул. Банкова, 9, м. Луцьк, 43003, Україна;

Anna Nykytiuk, student, Faculty of Information Technologies and Mathematics, Lesya Ukrainka Volyn National University, 9 Bankova Str., Lutsk 43003, Ukraine.

Отримано / Received 06.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 318–326.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 318–326.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.1+519.2:004:37.091.3

Модель інтеграції математики та інформатики під час вивчення елементів комбінаторики та статистики в старшій школі

Володимир Крижановський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
кафедра алгебри та інформатики, м. Чернівці, Україна
kryzhanovskyi.volodymyr@gmail.com
https://orcid.org/0009-0004-4133-2156

Анотація. У статті розглядається навчальна модель інтеграції дисциплін математики та інформатики старшої школи через використання елементів комбінаторики та статистики. Визначено важливість такої інтеграції для підвищення ефективності навчання та розвитку аналітичного мислення учнів старшої школи. Описано приклади практичного застосування комбінаторики за допомогою програмного забезпечення Excel, а також застосування статистичних методів для аналізу даних. Показано, як учні старшої школи, працюючи з реальними кейсами та інструментами моделювання, набувають практичних навичок, які можуть бути їм потрібними в подальшому навчанні та професійній діяльності. Використання сучасних комп'ютерних технологій дозволяє зробити навчальний процес мобільнішим і індивідуалізованим, сприяючи формуванню навичок, які є необхідними для майбутньої кар'єри.

Ключові слова: інтеграція дисциплін, математика, інформатика, математичне моделювання, комбінаторика, математична статистика, MS Excel, освітня модель, навчання, старша школа.

1. Вступ

Інтегровані уроки математики та інформатики в старшій школі відкривають широкі можливості для розвитку аналітичного мислення та практичних навичок учнів, завдяки особливому використанню елементів комбінаторики та статистики. Комбінаторика допомагає учням освоїти принципи організації та аналізу даних, розвиває логічне значення. Статистика дозволяє школярам працювати з реальними даними, опановувати методи їх збору, обробки та аналізу, що є актуальним у сучасному світі. Інтеграція реалізується як навчальна модель, у якій комбінаторні конструкції та статистичні процедури поєднуються з алгоритмічними кроками програмування. Завдяки об'єднанню

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-15

цих математичних розділів із завданнями інформатики, такими як створення програм, моделювання ситуацій та розробка алгоритмів, що впорядковуються у модель розв'язування, що забезпечує відтворюваність обчислень на уроці, та завдяки міждисциплінарному підходу, формуються навички критичного мислення та підготовки до майбутньої професійної діяльності. Учні не лише підтримують глибокі знання з математики та інформатики, а й навчаються застосувати їх на практиці, моделюючи реальний контекст, аналізуючи дані та приймаючи обґрунтовані рішення.

Інтеграція комбінаторики та статистики в освітній процес висвітлена у підручнику Н. Захарченко, де представлено базові підходи до викладання теорії ймовірностей та математичної статистики на рівні загальноосвітньої школи [1]. У спільній роботі Т. Бех і Н. Захарченко акцент зроблено на використанні методу математичного моделювання для розв'язання прикладних задач, що дозволяє формувати в учнів навички аналітичного мислення через контекстне застосування математичних знань [2]. У методичних рекомендаціях О. Пшеничної та А. Гаращенка окреслено можливості реалізації STEM-підходу в підготовці майбутніх учителів математики, зокрема через об'єднання змістових ліній математики й інформатики під час лабораторних занять [3]. У концептуальній праці С. Литвинової подано структуру системи комп'ютерного моделювання та розглянуто її інтеграцію в освітню практику як інструмент розвитку обчислювальних та статистичних навичок учнів [4]. Комплексне викладення теоретичних засад і педагогічних рішень щодо вивчення ймовірності та статистики запропоновано в підручнику М. Жалдака, Н. Кузьміної та Г. Михаліна, де йдеться про методику викладання цих тем у фізико-математичних класах педагогічних університетів, з акцентом на їхню практичну застосовність у майбутній вчительській діяльності [5].

2. Постановка проблеми

Серед усіх загальноосвітніх дисциплін інформатика має найбільшу взаємодію з математикою. Ці предмети часто сприймаються учнями як складні, проте вони тісно пов'язані та взаємодоповнюють один одного. Їхній розвиток завжди йшов паралельно, сприяючи взаємному збагаченню методів і підходів. Використання сучасних комп'ютерних технологій під час уроків математики дозволяє значно підвищити ефективність навчання, забезпечуючи його мобільність, індивідуальний підхід до кожного учня та можливість адаптації до різного рівня знань [6].

Загалом інтеграція навчальних предметів є ефективним засобом підвищення інтересу учнів до навчання та розвитку їх аналітичного мислення. Поєднання математики та інформатики особливо актуальне в умовах сучасного світу, де знання обох дисциплін є необхідними для розв'язання багатьох задач. Елементи комбінаторики та статистики є інструментами, які дозволяють учням оволодіти методами аналізу даних, оптимізації процесів і прогнозування.

Метою статті є розроблення методичних підходів розробки та впровадження моделі інтеграції елементів комбінаторики та статистики в навчальний процес старшої школи шляхом поєднання змісту математики та інформатики, з використанням цифрових інструментів MS Excel для формування аналітичного мислення та прикладних навичок учнів.

3. Основні результати

Формування навичок аналізу даних здійснюється через математичне моделювання, де кожна задача має чітку модель вхідних параметрів і очікуваних виходів. Завдяки поєднанню математики та інформатики учні мають можливість глибше зрозуміти теоретичні концепції та побачити їхнє практичне застосування. Наприклад, задачі комбінаторики можуть допомогти у створенні ефективних алгоритмів, а статистичні методи є незамінними для обробки та аналізу великих обсягів даних.

На уроках, де інтегруються елементи цих дисциплін, учні працюють над розв'язанням реальних кейсів, таких як аналіз даних із соціальних мереж, прогнозування результатів спортивних змагань чи оптимізація витрат. Такий підхід не лише підвищує мотивацію до навчання, а й дозволяє набути важливих практичних навичок, які стануть у нагоді в подальшій освіті чи майбутній професійній діяльності.

Загалом використання елементів комбінаторики та статистики на таких уроках дозволяє зробити навчальний процес цікавим і практичним. Початкове знайомство з комбінаторкою передбачає побудову варіантів із заданими властивостями, вивчення правил додавання і множення. На цьому етапі інформатичні інструменти, як і алгоритми генерації комбінацій чи електронних таблиць, полегшують обчислення й забезпечують наочність матеріалу. Далі учні освоєння розміщення, перестановки, комбінації та формули бінома Ньютона, що закріплюється через написання алгоритмів або моделювання завдань [7, с. 35]. Наприклад, задачі з комбінаторики можуть охоплювати обчислення кількості варіантів паролів, організацію турнірів або моделювання ймовірностей у буденному житті [8].

Наведемо приклад виконання завдань з із використанням пакета Excel для інтегрованих уроків математики та інформатики за допомогою комбінаторики, відтак приклади демонструють модель обчислень, у якій теоретичні формули реалізуються інструментами електронних таблиць.

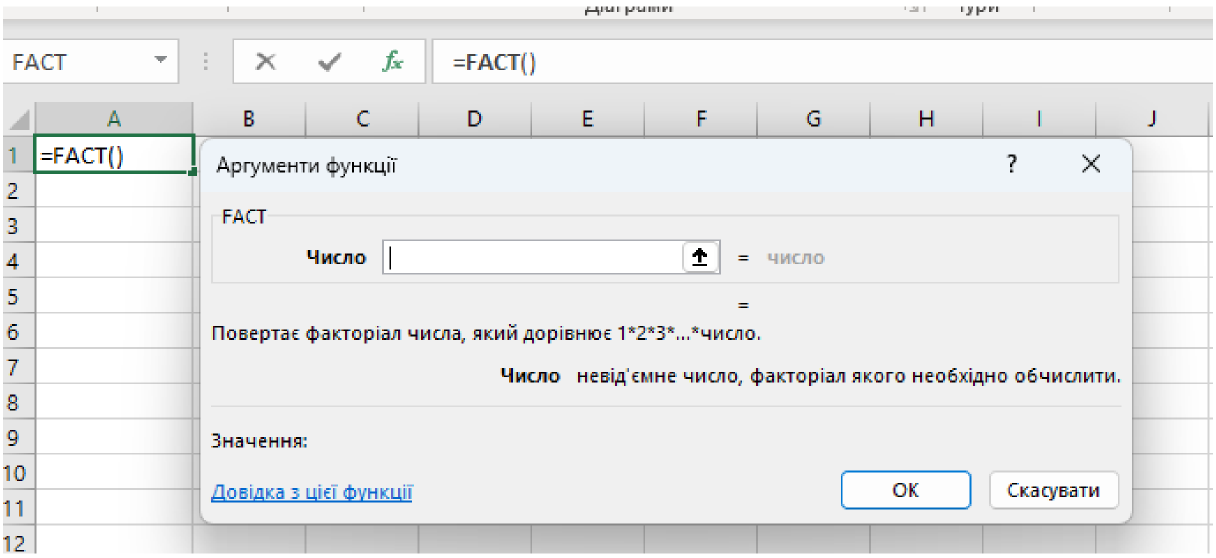
Приклад 1. Скільки перестановок можна утворити із трьох елементів А, Б і В?

Розв'язання. Для трьох елементів, які не повторюються, можна створити шість перестановок: АБВ, АВБ, ВАБ, ВБА, БАВ, БВА. Обчислюється це за формулою 3!=6. Реалізація у середовищі Excel відтворює модель факторіалу через функцію ФАКТР(), що полегшує перевірку результатів.

Для виконання обчислень у середовищі Excel можна включити вбудовану функцію ФАКТР(число), яка дозволяє швидко знайти факторіал будь-якого невід'ємного цілого числа.

1. У програмі Excel виберіть Вставлення → Функція → Математичні → FACT.
2. Відкриється діалогове вікно, у полі «число» введіть значення, факторіал якого потрібно обчислити (у даному випадку 3*n*) (див. рис. 1) [9; 14].

Приклад демонструє застосування інформатики для розв'язання математичних задач, підвищуючи ефективність і точність обчислень. Він також дозволяє учням



закріплювати знання з комбінаторики, одночасно навчаючись працювати з популярними програмами обчислень.

Рис. 1. Обчислення кількості перестановок [9]

Приклад 2. Скільки перестановок по дві букви можна скласти з трьох букв: А, Б і В?

Розв'язання. Із трьох букв А, Б і В можна скласти шість перестановок по дві букви: АБ, БА, АВ, ВА, БВ, ВБ. Для цього можна застосувати формулу для кількості перестановок по k елементів з n елементів:

$$P\,(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

У нашому випадку n=3n (кількість букв) і k=2k (кількість елементів в перестановці), тому кількість перестановок по дві букви буде:

$$P\,(3,2) = \frac{3!}{(2-3)!} = 6$$

Тобто, з трьох букв можна скласти шість перестановок по дві букви.

Обчислення числа перестановок за допомогою Excel.

Щоб знайти кількість перестановок за допомогою Excel, можна скористатися функцією PERMUT):

1. Відкрийте Excel.
2. Виберіть комірку, де хочете отримати результат.
3. Введіть формулу: =PERMUT(3,2) (для англійської версії).
4. Натисніть Enter [4, с. 15].

   Excel обчислить кількість перестановок, що дорівнює 6.

В результаті ви отримаєте, що можна скласти 6 перестановок по дві букви з трьох букв А, Б і В (рис. 2).

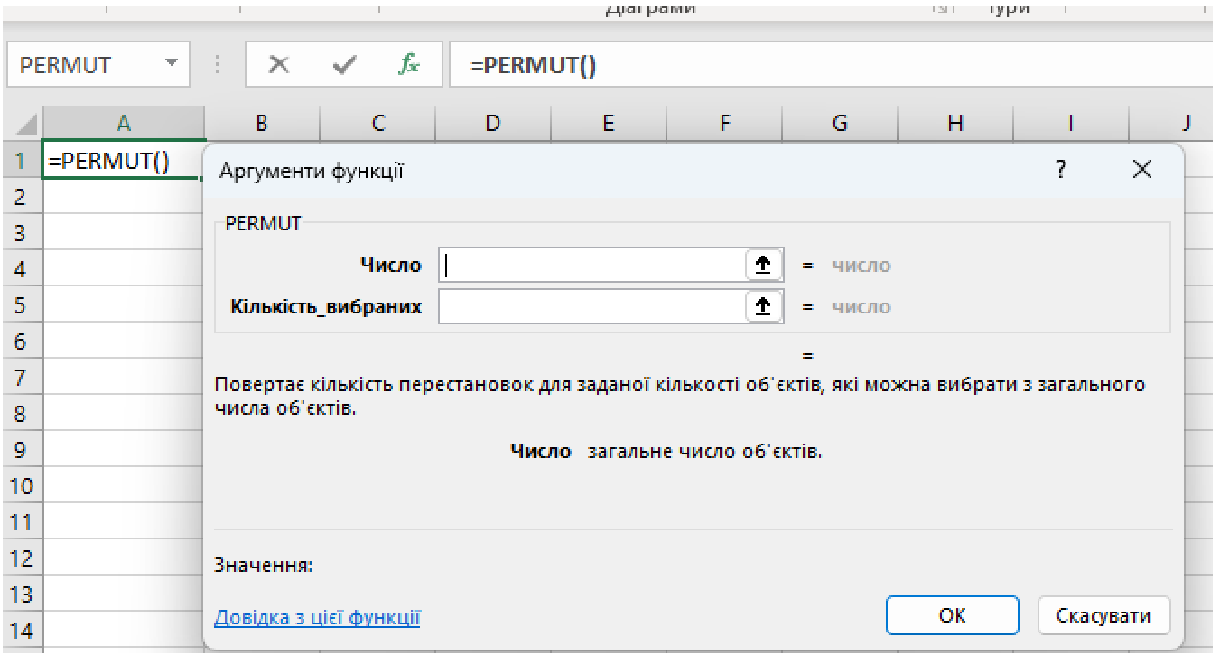


Рис. 2 Обчислення розміщень [9]

У цьому прикладі ми розглянули, як обчислити кількість перестановок по дві букви з трьох заданих букв (А, Б, В). Застосовуючи формулу для перестановок, ми отримали результат 6, що означає, що існує шість можливих способів розташувати ці букви в перестановці. За допомогою Excel можна швидко та ефективно здійснити таке обчислення, використовуючи функцію **PERMUT**. Вона дозволяє зручно розв'язувати задачі комбінаторики, застосовуючи як математичні методи, так і сучасні технологічні інструменти для автоматизації обчислень.

Варто зазначити, що математична статистика займається аналізом даних із застосуванням закономірностей виявлення, характерних для певної сукупності елементів. Її основний зміст міститься в систематизації, обробці та використанні статистичної інформації для визначення загальних тенденцій або особливостей досліджуваних ознак [10, с. 115].

Як галузь математики, математична статистика базується на дослідницьких даних, які можуть вивчати ймовірні закономірності масових явищ. Основні завдання цієї дисципліни включати перевірку статистичних гіпотез, аналіз та оцінку розподілу імовірностей, визначення їх параметрів, дослідження статистичних залежностей, а також розрахунок чисельних характеристик вибору. До таких характеристик належать вибіркове середнє, дисперсія, стандартне відхилення тощо [10, с. 115].

Елементи статистики також дозволяють учням аналізувати дані анкетувань, вивчати розподіли результатів тестування або досліджувати ймовірність подій. Наприклад, під час уроку можна провести експеримент із підкиданням монети, моделюючи процес імовірнісного прогнозування. Робота з даними соціальних мереж та прогнозування спортивних результатів оформлюється як статистичні моделі, що калібруються на доступних вибірках. Учні можуть порівнювати теоретичні очікування з експериментальними даними, використовуючи спеціалізоване програмне забезпечення, таке як Excel.

На уроках інформатики елементи статистики можуть бути використані для аналізу різноманітних даних, що мають практичне застосування для учнів 9 класу, можна провести інтегрований урок математики й інформатики за темою «Елементи статистики: описові показники та візуалізація даних у табличному процесорі», відповідно до навчальної програми з математики (тема «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики») та програми з інформатики («Опрацювання табличних даних», електронні таблиці). Наприклад, учням можна запропонувати завдання з аналізу успішності класу за результатами контрольних робіт з кількох предметів, таких як математика, інформатика та українська мова. Для цього учні створюють таблицю в Excel, у якій заносять оцінки учнів з кожного предмета (табл. 1). Така таблиця може містити стовпці з іменами учнів та їхніми оцінками, що дозволяє зручно організувати дані для подальшого аналізу.

Таблиця 1

Приклад заповнення

Імя учня	*Математика*	*Інформатика*	*Українська мова*
Оля	8	7	9
Іван	6	8	7
Петро	9	9	8
Марія	7	6	7
Дмитро	10	8	9

Далі, учні можуть обчислювати середні бали для кожного предмета за допомогою функції СЕРЕДНЄ (AVERAGE), а також визначати максимальні і мінімальні бали з кожного предмета, використовуючи функції МАКС (MAX) і МІН (MIN). Крім того, за допомогою функцій ДИСП (VAR.S/VAR.P) та СТАНДОТВІДХ (STDEV.S/STDEV.P) вони можуть обчислювати дисперсію та стандартне відхилення оцінок, що допомагає зрозуміти, наскільки рівномірно розподілені результати серед учнів. На основі отриманих даних учні створюють графіки, наприклад, стовпчасті діаграми, що наочно демонструють середні бали за кожним предметом.

Такий підхід дає учням можливість не тільки опанувати основи статистики, але й навчитися працювати з реальними даними, проводити їх аналіз та робити висновки щодо рівня успішності учнів у класі.

Практична складова інтегрованих уроків є важливим компонентом сучасної освіти, оскільки вона дає учням можливість не лише отримувати теоретичні знання, але й застосовувати їх у реальних життєвих ситуаціях. Такий підхід допомагає формувати критичне та аналітичне мислення, яке є основою для вирішення складних задач у професійній діяльності. Крім того, учні розвивають навички, які є затребуваними на ринку праці, такі як здатність працювати в команді, самостійно шукати та обробляти інформацію, а також використовувати сучасні технології для вирішення різноманітних завдань. Також це охоплює використання спеціалізованих програмних інструментів, які допомагають не тільки автоматизувати процеси, але й робити їх більш точними та ефективними. Наприклад, використання програм для аналізу даних, таких як Excel, дозволяє учням освоїти базові та просунуті методи статистики, програмування та візуалізації, що є важливими не лише в освіті, але й у майбутній кар'єрі.

Загалом на уроках, які орієнтовані на аналіз даних, учні мають можливість працювати з реальними даними, що робить процес навчання більш цікавим та практичним. Збирання, обробка та аналіз цих даних допомагають учням не тільки отримати нові знання, а й зрозуміти важливість математичних та статистичних методів у реальному житті. Наприклад, учні можуть використовувати Excel для створення діаграм та графіків, що дозволяє їм візуалізувати закономірності і зрозуміти, як дані можуть бути інтерпретовані та використані для прийняття рішень у різних сферах. Вивчення таких аспектів дозволяє розвивати вміння формулювати висновки, засновані на даних, а також критично оцінювати інформацію, що є важливим у сучасному інформаційному суспільстві.

Важливим аспектом інтегрованих уроків є міжпредметна співпраця, яка демонструє учням, як різні науки взаємодіють між собою і як знання з різних областей можуть бути використані для розв'язання реальних задач. Наприклад, учні можуть поєднувати знання з математики та інформатики для того, щоб аналізувати за допомогою математичних алгоритмів [11, с. 40]. Такі уроки допомагають учням побачити реальну практичну цінність теоретичних знань, що стимулює їх до подальшого навчання та розвитку. Вони вчаться не тільки знаходити рішення для проблем, а й розуміти, як ці рішення можуть бути застосовані у різних сферах діяльності, таких як наука, бізнес або навіть повсякденне життя.

Використання комбінаторики та статистики на інтегрованих уроках дозволяє учням глибше зрозуміти теоретичні концепції, що лежать в основі багатьох реальних ситуацій. Наприклад, під час розв’язання задач на ймовірність учні можуть обчислювати шанси того, що певна подія відбудеться, вивчаючи основи комбінаторики. Знання можуть бути застосовані не тільки в математиці, а й у реальному житті для оцінки ризиків, прогнозування результатів у різних сферах, таких як фінанси або маркетинг. Завдяки цьому, учні здобувають практичні навички, які дозволяють їм бути успішними в майбутньому, коли вони зіткнуться з необхідністю аналізувати великі обсяги даних чи приймати важливі бізнес-рішення на основі числових даних.

Також інтегровані уроки сприяють формуванню в учнів системного мислення. Учні вчаться бачити зв'язки між різними дисциплінами, застосовувати знання з різних предметів для вирішення однієї задачі і знаходити оптимальні варіанти рішень у складних ситуаціях. Наприклад, під час виконання проєктів, що поєднують науку, техніку та економіку, учні можуть розробляти алгоритми для розв'язання конкретних задач, таких як прогнозування попиту на ринку або оптимізація витрат для підприємства [12].

Отже, інтегровані уроки допомагають учням не тільки оволодіти основними науковими та практичними знаннями, але й розвивати важливі компетенції, які будуть корисні в їхньому житті та професійній діяльності. Поєднання теоретичних знань з практичною діяльністю допомагає формувати глибоке розуміння світу та здатність до ефективного вирішення проблем у різних галузях. Запропонована навчальна модель узгоджує комбінаторні підрахунки зі статистичним моделюванням і забезпечує перевірюваність отриманих результатів у Excel.

Висновки. Інтеграція математики та інформатики в освітньому процесі сприяє розвитку в учнів аналітичного мислення та практичних навичок, необхідних для розв'язання реальних задач. Спільне використання комбінаторики, статистики та інформативних методів навчання допомагає учням не лише засвоїти теоретичні концепції, але й застосовувати їх у практичній діяльності. Використання комп'ютерних технологій, таких як Excel, робить процес навчання більш доступним і наочним, що стимулює учнів до активнішого вивчення цих дисциплін.

Подальші дослідження в цій галузі можуть зосереджуватися на розширенні використання нових інструментів і технологій для навчання комбінаторики та статистики. Вивчення можливостей сучасних програмних платформ та онлайн-ресурсів може значно підвищити ефективність навчального процесу, зробивши його більш інтерактивним і цікавим для учнів. Інтеграція нових технологій дозволяє розвивати практичні навички обробки даних, прогнозування та оптимізації процесів, що є важливим для подальшої професійної діяльності.

Особливо важливим є розробка нових методик інтеграції математики та інформатики через проєктні методи, кейс-метод, ігрові технології та інші сучасні педагогічні стратегії. Дослідження ефективності таких методик відкриває можливості для створення комплексних навчальних моделей, які поєднують математичні методи з іншими дисциплінами, такими як фізика, хімія та економіка.

Конфлікт інтересів і етика. Автор заявляє, що не має конфліктів інтересів. Автор також заявляє про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автор заявляє про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Захарченко Н. В. Теорія ймовірності та математична статистика. Вінниця: ФОП Рогальська І.О., 2020. 162 с.
2. Бех Т. В., Захарченко Н. В. Методика розв'язування прикладних задач із теорії ймовірності методом математичного моделювання. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологій: зб. наук. праць.* Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця: ТОВ «МеркьюріПоділля», 2020. Вип.17. С. 4-9.
3. Пшенична О. С., Гаращенко А. П. Методичні аспекти реалізації STEMпідходів у навчанні: методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти магістра

спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2025. 83 с.
4. Литвинова С. Г. Система комп'ютерного моделювання об'єктів і процесів та особливості її використання в навчальному процесі закладів загальної середньої освіти. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 2018, №3. URL: https://arxiv.org/pdf/2005.07552
5. Жалдак М. І., Кузьміна, Н. М., Михалін, Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Київ. НПУ імені М.П. Драгоманова, 2020. 750 с.
6. Дуборез А. В. Сучасні методи поєднання математики та інформатики у середній школі. *Всеукраїнська науково-практична конференція. «Досвід роботи сучасного вчителя: практичні розробки та теоретичні надбання»* (Полтава, 2020). URL: https://genezum.org/library/suchasni-metody-poednannya-matematyky-ta-informatyky-u-seredniy-shkoli
7. Друшляк М. Г., Лукашова Т. Д., Скасків Л. В. Навчання майбутніх вчителів математики Розв'язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. *Фізико-математична освіта*. 2019. Випуск 1 (19). С.35-40. DOI: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-006
8. Урок «Елементи комбінаторики та математичної статистики». URL: https://naurok.com.ua/urok-elementi-kombinatoriki-ta-matematichno-statistiki-122826.html
9. Горбачук В. М. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними та економічними спеціальностями. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 351 с.
10. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
11. Корольський В. В., Крамаренко Т. Г., Семеріков С. О., Шокалюк С. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посіб. / наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с.
12. Інтегрований урок та його аналіз. URL: https://osvita.ua/school/method/technol/714/

UDC 519.1+519.2:004:37.091.3

Model of integrating mathematics and informatics in the study of elements of combinatorics and statistics

Volodymyr Kryzhanovskyi

Abstract. The article discusses an educational model for integrating mathematics and computer science in high school through the use of elements of combinatorics and statistics. The importance of such integration for improving the effectiveness of teaching and developing analytical thinking in high school students is determined. Examples of the practical application of combinatorics using MS Excel software, as well as the application of statistical methods for data analysis, are described. It shows how high school students, working with real cases and modeling tools, acquire practical skills that may be useful to them in their further education and professional activities. The use of modern computer technologies makes the learning process more mobile and individualized, contributing to the formation of skills that are necessary for future careers.

Keywords: discipline integration, mathematics, informatics, mathematical modeling, combinatorics, mathematical statistics, MS Excel, educational model, learning, high school.

References

1. Zakharchenko, N. V. (2020). *Probability theory and mathematical statistics*. FOP Rohalska I. O., Vinnytsia.
2. Bekh, T. V., Zakharchenko, N. V. (2020). *Methodology for solving applied problems in probability theory using mathematical modeling*, Current Issues of Mathematics, Physics and Technologies: Collection of Scientific Papers, **17**, 4–9.
3. Pshenychna, O. S., Harashchenko, A. P. (2025). *Methodological aspects of implementing the STEM approach in education: methodological recommendations for laboratory classes for master's degree students of the specialty "Secondary Education" (Mathematics)*, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia.
4. Lytvynova, S. H. (2018). *System of computer modeling of objects and processes and features of its use in the educational process of general secondary education institutions*, Information Technologies and Learning Tools, **3**. https://arxiv.org/pdf/2005.07552

5. Zhaldak, M. I., Kuzmina, N. M., Mykhalin, H. O. (2020). *Probability theory and mathematical statistics*: a textbook for students of physical, mathematical and information specialties of pedagogical universities, National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv.
6. Duborez, A. V. (2020). *Modern methods of integrating mathematics and computer science in secondary school,* All-Ukrainian Scientific and Practical Conference. "Experience of a Modern Teacher: Practical Developments and Theoretical Achievements" (Poltava, 2020). https://genezum.org/library/suchasni-metody-poednannya-matematyky-ta-informatyky-u-seredniy-shkoli
7. Drushlyak, M. G., Lukashova, T. D., Skaskiv, L. V. (2019). *Training Future Mathematics Teachers Solve Graph Theory Problems Using GEOGEBRA*, Physical and Mathematical Education, **1** (19), 35–40. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-006
8. *Lesson "Elements of Combinatorics and Mathematical Statistics"*. https://naurok.com.ua/urok-elementi-kombinatoriki-ta-matematichno-statistiki-122826.html
9. Horbachuk, V. M. (2023). *Probability theory and mathematical statistics: a textbook for bachelor's degree applicants in technical and economic specialties*, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.
10. Ogirko, O. I., Galayko, N. V. (2017). *Probability theory and mathematical statistics: a textbook*, Lviv State University of Internal Affairs, Lviv.
11. Korolsky V. V., Kramarenko T. G., Semerikov S. O., Shokalyuk S. V. (2019*). Innovative information and communication technologies for teaching mathematics: a textbook* / scientific editor M. I. Zhaldak. Ed. 2, Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih.
12. Integrated lesson and its analysis. https://osvita.ua/school/method/technol/714/

Про автора / About the author

Володимир Крижановський, аспірант, кафедра алгебри та інформатики, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58002, Україна;

Volodymyr Kryzhanovskyi, Postgraduate Student, Department of Algebra and Informatics, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsiubynskyi St., Chernivtsi 58002, Ukraine.

Отримано / Received 16.05.2025
Прийнято до друку / Accepted 04.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 327–337.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 327–337.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147.001.76

Застосування комп'ютерних програм-симуляторів для моделювання електричних схем у навчальному процесі

Олександр Мозговий[1], Анатолій Відьмаченко[2], Валентина Суботіна[3], Олег Пальчик[4]

[1] Національний транспортний університет, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, м. Київ, Україна
mavimfto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0797-8779
[2]Національний університет біоресурсів і природокористування України, кафедра фізики; Головна астрономічна обсерваторія НАН України, відділ фізики субзоряних і планетних систем, м. Київ, Україна
avidmachenko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0523-5234

[3] Національний транспортний університет, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, м. Київ, Україна
vsubotina20@gmail.com
https://orcid.org/0009-0006-9615-9746

[4] Національний транспортний університет, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, м. Київ, Україна
o_palchik@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-4486-9819

Анотація. У статті розглянуті сучасні підходи до моделювання електронних складних об'єктів і систем з використанням комп'ютерних програм-симуляторів. Особлива увага приділена інтеграції новітніх технологій, таких як хмарні симулятори, штучний інтелект, віртуальна та доповнена реальність, які здатні розширити можливості навчального процесу.
Ключові слова: комп'ютерне моделювання, комп'ютерні програми-симулятори, хмарні платформи.

1. Вступ

Випускники вищих навчальних закладів повинні володіти знаннями і навиками основної спеціальності, а також вміти користуватися сучасними інформаційними технологіями, мати здібність до саморозвитку, бути мобільними і конкурентоспроможними на ринку праці та ін.

Розвиток комп'ютерної техніки на початку двадцять першого століття створив умови розвитку комп'ютерного моделювання, яке стало невід'ємною частиною навчання та досліджень у галузі електротехніки, електроніки та комп'ютерних наук.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-16

Використання хмарних платформ, штучного інтелекту (AI) та віртуальної реальності (VR) розширює можливості учнів і студентів для навчання. Сучасні програми-симулятори такі як LTspice, KiCad, а також хмарні платформи CircuitLab і Tinkercad спрощують процес моделювання та роблять його більш доступним для учнів, студентів та інженерів. Активно використовуються у навчальному процесі інтерактивні симуляції на платформі PhET [1], моделювання та симуляції для вивчення комп'ютерних мереж [2] тощо.

Використання комп’ютерних програм дає можливість істотно зменшити витрати на облаштування досить дорогих навчальних лабораторій, які потребують дотримання певних технічних умов та обслуговування кваліфікованим персоналом. Створення віртуальної лабораторії не може замінити реальну лабораторію, де студенти вчаться складати електричні схеми, працювати з вимірювальною технікою. За відсутності необхідного дорогого радіотехнічного обладнання та в умовах дистанційного навчання дослідження функціонування складних електронних схем доцільно здійснювати саме у віртуальній лабораторії [3 - 5]. Тому розширення використання інформаційних технологій у навчальному процесі є актуальною задачею.

2. Постановка проблеми

Історично комп’ютерне базувалося на аналогових обчислювальних пристроях і стало основним інструментом для дослідження складних об'єктів і систем. Воно ґрунтувалося на аналогії між математичними моделями та електричними колами, що дозволяло вивчати процеси, які описані рівняннями. Однак таке моделювання було: потрібно було вручну збирати та налаштовувати схеми.

З розвитком цифрових технологій традиційні аналогові методи були витіснені комп'ютерними програмами-симуляторами, які дозволяють моделювати електричні схеми швидше та точніше. Наприклад, програми Electronics Workbench та Multisim стали популярними інструментами для навчання та досліджень. Однак ці програми зазнали значних змін через появу хмарних платформ.

Основним та важливим викликом є перехід до новітніх інструментів, таких як LTspice, KiCad, а також хмарних симуляторів CircuitLab та Tinkercad. Вони дозволяють моделювати складні системи, такі як IoT-пристрої, автономні транспортні засоби та смарт-мережі, що є актуальним для сучасного навчання та досліджень .

Метою статті є огляд сучасних підходів до моделювання з використанням комп'ютерних програм-симуляторів, які дозволяють учням, студентам та аспірантам швидко і точно досліджувати складні електричні системи.

Запропонований огляд комп’ютерних програм-симуляторів допоможе викладачам вищих навчальних закладів і вчителям шкіл створювати методичні рекомендації при вивченні складних електронних схем і їх аналізу.

3. Основні результати

Сучасне комп’ютерне моделювання базується на створенні віртуальних електричних кіл, які відображають математичні моделі реальних об'єктів. Ці моделі дозволяють досліджувати процеси, які описані рівняннями, спрощувати складані явища, робити висновки про стан реальних систем, передбачити результати і, навіть, є можливість управляти ними.

Математичні моделі поділяють на динамічні і статичні, лінійні чи нелінійні, детерміновані або стохастичні. Вид моделі, яку використовують, залежить від особливостей об’єкта та завдань, що потрібно вирішити [6].

Математичне моделювання має такі етапи: визначення завдання, побудова математичної моделі та її аналіз, перевірка моделі на адекватність та безпосереднє використання моделі до розв’язування поставлених задач.

Розглянемо кілька типів моделей залежно від виду рівнянь, які їх описують. Кожен тип моделі має свої особливості та застосування: алгебраїчні моделі, диференціюючого та моделі інтегруючого типів.

Алгебраїчні моделі описуються лінійними або нелінійними рівняннями. Вони використовуються для моделювання статичних систем, де час не є змінною.

- Лінійні алгебраїчні моделі описуються рівнянням виду: $A_x = F$, де: A – матриця коефіцієнтів, x – вектор невідомих величин, F – вектор заданих величин.

Приклад. Моделювання електричного кола з постійними параметрами (рис.1).

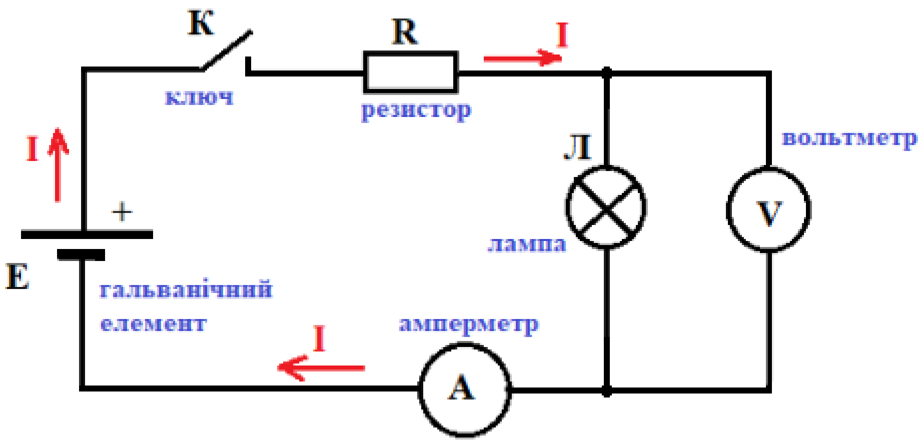


Рис. 1. Лінійна електрична модель з гальванічним елементом, резистором, лампочкою і приладами для вимірювання струму та напруги [7]

- Нелінійні алгебраїчні моделі описуються нелінійними рівняннями, наприклад: $f_{(x)} = 0$, де $f_{(x)}$ - нелінійна функція.

Приклад. Моделювання діодів або транзисторів, де залежність струму від напруги нелінійна і може бути представлена вольт-амперною характеристикою. Така характеристика, як правило, зображується у вигляді графіка, в якому напруга відкладається вздовж осі абсцис, а струм – вздовж осі ординат (рис.2).

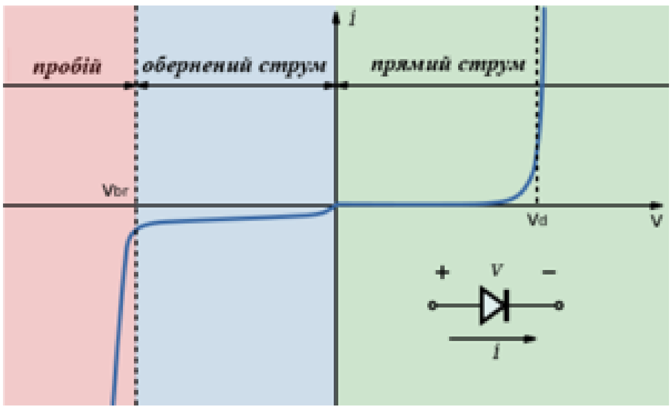


Рис. 2. Вольт-амперна характеристика діода (нелінійна модель) [8]

Диференціальні моделі описуються диференціальними рівняннями, які враховують зміну величин у часі [9]. Вони використовуються для моделювання динамічних систем.

- Лінійні диференціальні моделі описуються рівнянням виду: $\frac{dx}{dt} = A_x + F(t)$, де:

x — вектор стану системи, A — матриця коефіцієнтів, F — вектор зовнішніх впливів.

Приклад. Моделювання RC-кола. Напруга на конденсаторі змінюється з часом. Коло називається диференцюючого типу якщо вхідний сигнал (V in) подається на конденсатор, а вихідний (V out) знімається з резистора (рис. 3). Напруга на виході (резисторі), а значить і пропорційний цій напрузі струм через резистор є функцією напруги, яка прикладена до конденсатора.

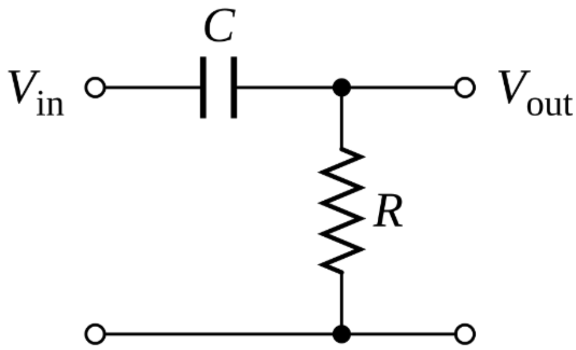


Рис. 3. RC-коло, приклад диференціюючого типу [10]

Якщо вхідний сигнал (V in) подається на резистор, а вихідний (V out) знімається з конденсатора (рис. 4), то таке коло називається колом інтегруючого типу. Напруга на виході (конденсаторі) є інтегральною функцією струму заряджання конденсатора. При цьому реакція кола на одиничний вхідний перепад з амплітудою V буде визначатись формулою $V_c(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Для такого аперіодичного процесу постійна часу визначається як $\tau = RC$.

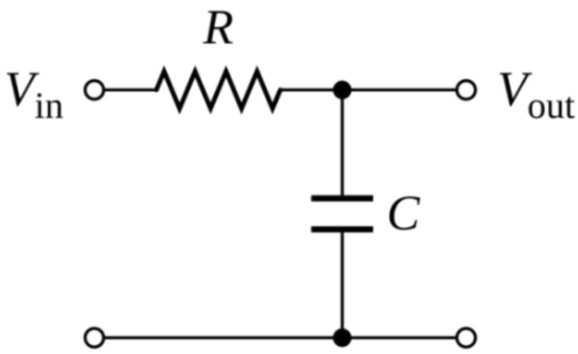


Рис. 4. RC-коло, приклад інтегруючого типу [10]

Нелінійні диференціальні моделі [9] описуються нелінійними диференціальними рівняннями, наприклад, моделювання коливань у нелінійних системах таких як маятник (рис. 5) або автогенератори. Динаміка маятника під впливом гравітації є класичною широко вивченою нелінійною задачею. У роботі [11] показано, що рух маятника можна описати за допомогою безрозмірністного нелінійного рівняння $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0$, де θ – кут між вертикальним напрямом гравітації і маятником.

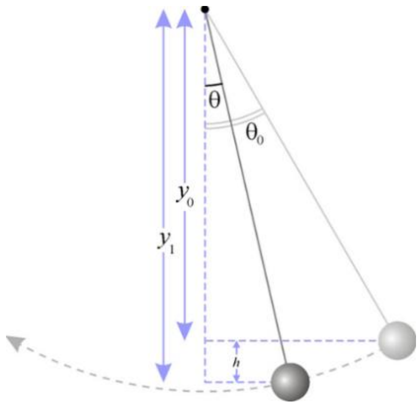


Рис. 5. Нелінійний маятник, приклад нелінійної диференціальної моделі

Сучасні інструменти для моделювання

Використання сучасних програм для комп’ютерного моделювання стає все частішим та ширшим. Ці програми дозволяють швидко та точно створювати віртуальні схеми, які легкі не тільки для сприйняття, а й піддаються для модифікації та покращення. Розглянемо нові інструменти, такі як LTspice [12], KiCad [13] та хмарні платформи CircuitLab і Tinkercad [14].

LTspice – це досить потужне, швидке та безкоштовне програмне забезпечення для симуляції SPICE, створення схем та перегляду осцилограм із покращеннями та моделями для покращення моделювання аналогових кіл. Його графічний інтерфейс створення схем дозволяє досліджувати схеми та отримувати результати моделювання, які можна додатково дослідити за допомогою вбудованого переглядача осцилограм.

Переваги такого програмного забезпечення є безкоштовне завантаження, підтримання моделювання аналогових та цифрових схем (рис. 6). Використовується для проектування та аналізу складних електричних систем.

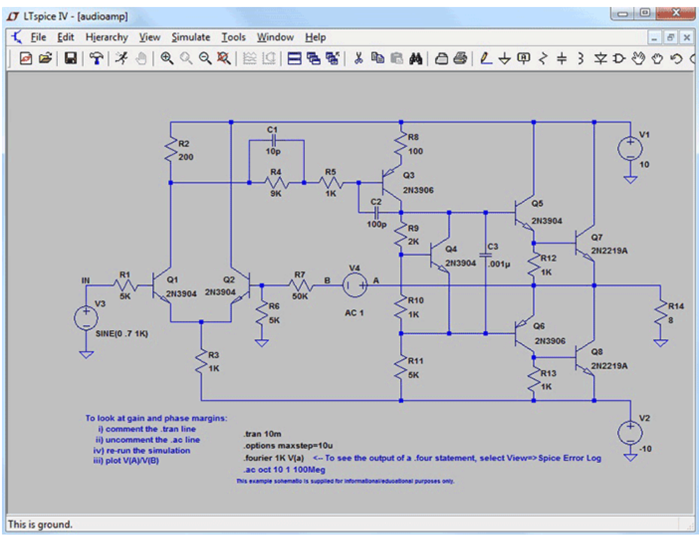


Рис. 6. Інтерфейс LTspice для моделювання електричних схем

Редактор схем KiCad – це відкрита платформа для проєктування схем і друкованих плат. Використовується для створення складних електричних схем та їх підготовки до виробництва (рис. 7).

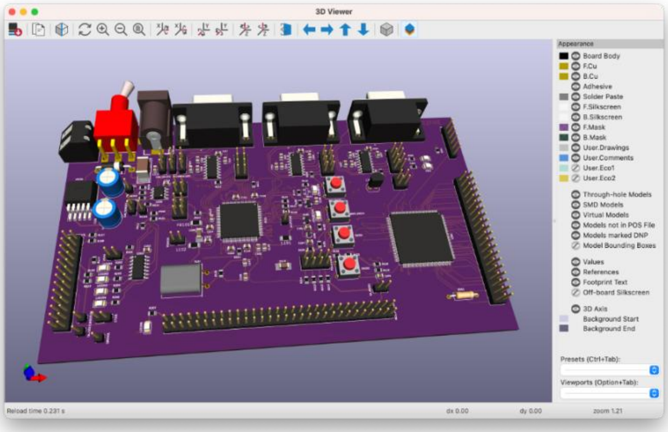


Рис. 7. Інтерфейс KiCad для проектування схем

Даний редактор підтримує все: від найпростіших схем до складних ієрархічних проектів із сотнями аркушів. KiCad дозволяє створювати власні символи або використовувати деякі з тисяч, які знаходяться в офіційній бібліотеці KiCad. Можна перевірити свій проект за допомогою інтегрованого симулятора SPICE та засобу перевірки електричних правил.

Tinkercad простий у використанні, працює у хмарі, підходить для початківців. Дозволяє швидко створювати та тестувати схеми (рис. 8). Використовується для навчання та швидкого прототипування схем.

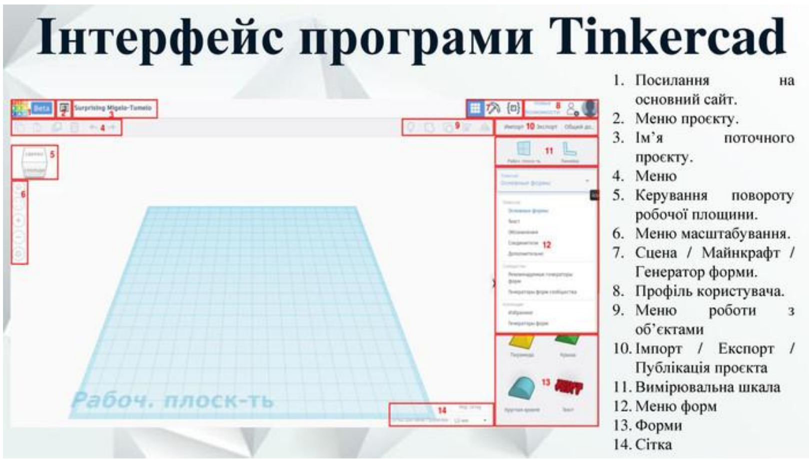


Рис. 8. Інтерфейс Tinkercad для онлайн-моделювання

Інтеграція AI та VR/AR технологій у програмах-симуляторах електричних схем для навчального процесу

У сучасному освітньому процесі програми-симулятори електричних схем активно розвиваються завдяки впровадженню технологій штучного інтелекту та віртуальної реальності. Ця інтеграція відкриває нові можливості для покращення якості навчання та розуміння електричних процесів студентами.

Штучний інтелект у програмах-симуляторах дозволяє реалізувати низку важливих функцій. Наприклад, AI-алгоритми здатні аналізувати схеми, які зібрали студенти, та надавати персоналізовані рекомендації щодо їх оптимізації. Системи машинного навчання також допомагають передбачати потенційні проблеми в схемах та пропонують варіанти їх вирішення, що особливо важливо на етапі навчання.

Віртуальна та доповнена реальність суттєво розширюють можливості традиційних симуляторів. У VR-середовищі студенти можуть "фізично" взаємодіяти з компонентами, спостерігати за роботою схеми в тривимірному просторі та візуалізувати електричні процеси, які неможливо побачити в реальному світі. AR-технології дозволяють накладати віртуальні елементи на реальні схеми, що допомагає краще розуміти принципи їх роботи. У роботі [15] показано п’ять запропонованих концептуальних моделей, що інтегрують адаптивні методики в освітні системи AR/VR. Це дає можливість визначити їх основні компоненти та можливості. Синергія цих технологій створює унікальне навчальне середовище. Наприклад, коли студент працює з віртуальною схемою, AI-система може в реальному часі аналізувати його дії та надавати підказки через VR-інтерфейс. Це створює інтерактивний процес навчання, де теорія одразу підкріплюється практикою.

Важливою перевагою такого підходу є можливість створення адаптивних навчальних сценаріїв. Штучний інтелект відслідковує прогрес кожного студента та автоматично коригує складність завдань, а VR-середовище забезпечує наочну демонстрацію матеріалу в найбільш зрозумілій формі.

Перехід від традиційного аналогового моделювання до комп’ютерних програм-симуляторів значно спростив процес дослідження складних електричних систем. Однак, ранні методи електричного моделювання базувалися на використанні аналогових обчислювальних пристроїв, що вимагали складної ручної настройки та обмежували швидкість розрахунків. Декілька років розвитку технологічної інфраструктури дало змогу знайти декілька напрямів еволюції сучасних технологій.

Ключовим напрямом розвитку сучасної електротехніки є автоматизація процесів комп’ютерного моделювання електричних схем. Використання алгоритмів машинного навчання, хмарних обчислень, квантових симуляцій та інших передових технологій дозволяє значно підвищити ефективність розробки та аналізу електричних систем.

Одним з найперспективніших інструментів є автоматизація на основі штучного інтелекту. Сучасні AI-алгоритми здатні ретельно аналізувати електричні схеми, прогнозувати їх поведінку з похибкою менше відсотка та оптимізувати параметри цих компонентів. До методів застосування AI можна віднести: Генетичні алгоритми – використовуються для автоматичного налаштування параметрів схем, підбору елементів та мінімізації енергоспоживання; Нейронні мережі – здатні аналізувати великі масиви даних, що дозволяє знаходити оптимальні рішення для складних електротехнічних задач; Машинне навчання – використовується для аналізу історичних даних, прогнозування несправностей та покращення точності симуляцій.

Використання віртуальних лабораторій дозволяє зробити навчання більш простим допомагає студентам швидше та безпечніше освоювати електричне моделювання. А правильно сплановані симуляційні вправи розвивають критичне мислення, здатність приймати рішення, впевненість у своїх силах та розвивають навички взаємодії у роботі студентів та викладача. Програми-симулятори дозволяють моделювати складні системи, наприклад, IoT-пристрої, автономні транспортні засоби та інші складні системи.

Використання хмарних технологій завдяки віддаленому доступу до обчислювальних ресурсів дає можливість працювати зі складними симуляціями без якої-небудь необхідності у потужному апаратному забезпеченні. Перевагами хмарного моделювання є: підвищена швидкодія – розподіл обчислювального навантаження між серверами дозволяє значно скоротити час симуляцій; доступність – користувачі можуть запускати моделі з будь-якого пристрою, що підтримує підключення до Інтернету; колаборація – можливість одночасної роботи над проєктами кількома дослідниками в реальному часі.

Вершину нових горизонтів у сфері електротехнічного моделювання відкривають квантові комп'ютери (рис. 9), які дають змогу швидко розраховувати складні електромагнітні процеси, що важко піддаються класичним методам аналізу. Основними перевагами квантових симуляцій можна назвати: експоненційне прискорення розрахунків – обробка даних відбувається значно швидше, ніж на традиційних цифрових процесорах; висока точність – квантові алгоритми дозволяють зменшити похибку при симуляції складних систем; моделювання нових матеріалів – можливість прогнозувати електричні характеристики нових матеріалів та напівпровідників.

Як можемо побачити, автоматизація комп'ютерного моделювання електричних схем є важливим напрямом розвитку електротехніки. Використання AI, хмарних технологій, квантових обчислень та інших сучасних методів дозволяє значно підвищити ефективність аналізу та проєктування складних електротехнічних систем. Подальший розвиток цієї сфери сприятиме покращенню якості інженерних рішень та скороченню часу розробки електронних пристроїв.

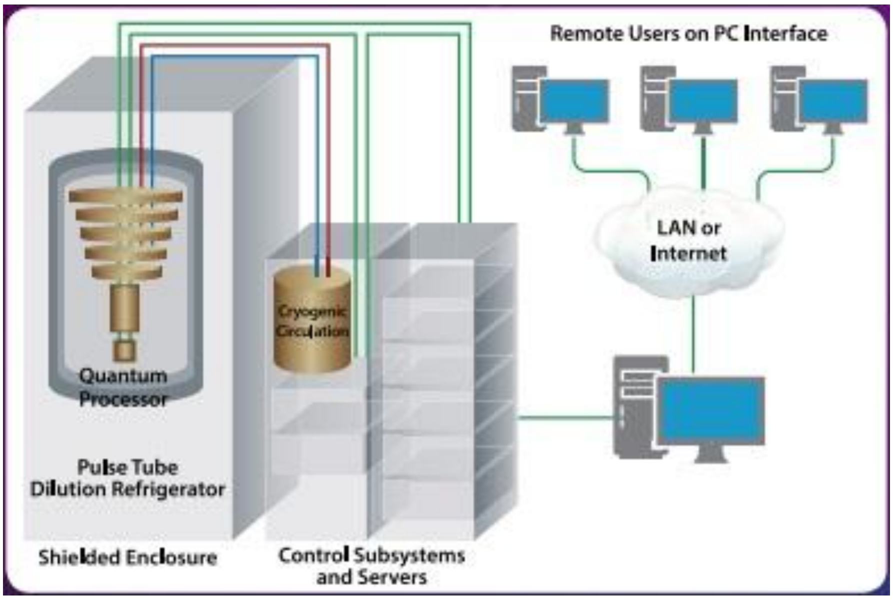


Рис. 9. Будова квантового комп'ютера [16]

Результатами наведеного дослідження підтверджується ефективність використання автоматизованих методів у комп'ютерному моделюванні електричних схем. Інтеграція сучасних технологій дозволяє не лише підвищити точність розрахунків, а й спрощує процес навчання студентів як електротехнічних дисциплін, так інших дисциплін, забезпечуючи більш наочне та інтерактивне освоєння матеріалу.

Проте варто зазначити, що впровадження таких технологій у навчальний процес вимагає відповідної підготовки як технічної бази, так і викладацького складу. Необхідно розробляти нові методичні матеріали та підходи до оцінювання знань студентів, враховуючи особливості роботи з AI та VR/AR системами.

Перспективи розвитку цього напрямку включають створення повністю інтегрованих навчальних платформ, де симуляція електричних схем буде лише частиною комплексного підходу до вивчення електроніки. Такі системи зможуть забезпечити більш глибоке розуміння предмету та підготувати студентів до роботи з сучасними технологіями.

Таким чином, інтеграція AI та VR/AR технологій у програми-симулятори електричних схем значно розширює можливості навчального процесу, роблячи його більш ефективним та захоплюючим для студентів. Це важливий крок у розвитку технічної освіти, який відповідає вимогам сучасного цифрового світу.

Висновки. У статті розглянуто сучасні підходи до комп’ютерного моделювання складних об'єктів і систем з використанням комп'ютерних програм-симуляторів: сучасні програми, такі як LTspice, KiCad, а також хмарні платформи CircuitLab, Tinkercad, значно спрощують процес електричного моделювання. Вони дозволяють швидко та точно досліджувати складні системи, такі як IoT-пристрої, автономні транспортні засоби та смарт-мережі; впровадження штучного інтелекту, віртуальної та доповненої реальності у навчальний процес значно підвищує ефективність навчання. Ці технології дозволяють студентам працювати з віртуальними лабораторіями, що робить процес навчання більш інтерактивним та безпечним. Використання AI, хмарних технологій та квантових обчислень дозволяє автоматизувати процеси проектування та оптимізації електричних схем. Це значно скорочує час розробки та підвищує точність результатів; інтеграція сучасних технологій у навчальний процес відкриває нові можливості для підготовки студентів до роботи з інноваційними системами, що включає використання AI для оптимізації схем, VR/AR для створення інтерактивних лабораторій та хмарних платформ і для дистанційного навчання; середовище програми-симулятора є простим і доступним інструмент для проведення експериментальних досліджень широкого класу електричних, електронних схем та схем комп’ютерної схемотехніки; всі прилади зображуються у вигляді, максимально наближеному до реального, тому працювати з ними просто і зручно. Результати моделювання можна вивести на принтер або імпортувати в текстовий або графічний редактор для їх подальшої обробки і створення презентаційних звітів з виконання лабораторних робіт; студент застрахований від випадкового ураження струмом, а прилади не вийдуть з ладу через неправильно зібрану схему. Отже, знімаються всі проблеми, пов’язані з можливістю некоректних дій.

Такий підхід передбачає індивідуалізацію процесу навчання і вихід його за межі звичних учбових лабораторій. За умови доступу до комп’ютера користувач може навчатися в будь-якому місці і у будь-який час, що дає можливість впровадити загальнодоступні програми-симулятори у навчальний процес і дистанційного навчання.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Використання інтерактивних симуляцій PhET на лекціях. URL: https://62491cfd-b2d0-40e6-b976-32131a41d75c.filesusr.com/ugd/cb7598_a6006bd8e84b4df5a91dafdd49d75636.pdf
2. Козак О.В., Михайлова Л.М., Семенишина І.В. Інструменти моделювання та симуляції для вивчення комп’ютерних мереж: огляд і практичний досвід. *Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2025. № 58. С. 70–79. DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2025-58-09
3. Квятковська А.О., Сустрєтов А.С. Роль програм симуляторів в дистанційному навчанні студентів фахових закладів. *Інноваційна педагогіка*. 2022. Випуск 48. Т.1. С. 201–204. DOI: https://doi.org/10.32843/2663-6085/2022/48.1.42
4. Щерба А.А., Петренко І.А Електротехніка. Лінійні кола : лаборат. практ. Київ: Вид-во НТУ України "КПІ", 2007. 140 с.
5. Гордієнко В.В. Застосування комп'ютерних симуляцій на уроках фізики під час дистанційного навчання. 2022. URL: https://naurok.com.ua/zastosuvannya-komp-yuternih-simulyaciy-na-urokah-fiziki-pid-chas-distanciynogo
6. Математична модель. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Математична_модель
7. Фізика – задачі. URL: https://driverivan.blogspot.com/2021/04/blog-post_21.html

8. Вольт-амперна характеристика. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Вольт-амперна_характеристика
9. Нелінійна система. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Нелінійна_система
10. RC-коло. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/RC-коло
11. Сердюк О.О. Сучасні методи дослідження нелінійних динамічних систем: Посіб. для студ. Краматорськ: ДДМА, 2018. 120 с.
12. LTspice. URL: https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html
13. KiCad EDA. Open Source EDA Suite. URL: https://www.kicad.org
14. Tinkercad. Online 3D Design & Circuit Simulator. URL: https://www.tinkercad.com
15. Круглик В. Інтеграція технологій доповненої та віртуальної реальності з адаптивними системами навчання: аналіз концептуальних моделей. *Освітологічний дискурс*. 2023. Том 43, № 4. С. 69 – 82. DOI: https://doi.org/10.28925/2312-5829.2023.44
16. Квантові комп'ютери: мрія чи реальність? URL: https://phm.cuspu.edu.ua/nauka/naukovo-populiarni-publikatsii/1026-kvantovi-kompyutery-mriya-chy-realnist.html

UDC 378.147.001.76

Application of computer programs-simulation for modeling electrical circuits in the educational process

Oleksandr Mozghovyi, Anatoliy Vidmachenko, Valentyna Subotina, Oleg Palchik

Abstract. The article deals with modern approaches to modeling of electronic complex objects and systems using computer simulation programs. Particular attention is paid to the integration of the latest technologies, such as cloud simulators, artificial intelligence, virtual and augmented reality, which can expand the possibilities of the educational process.

Keywords: computer modeling, computer simulation programs, cloud platforms.

References

1. *The use of PhET interactive simulations in lectures*. [in Ukranian]. https://62491cfd-b2d0-40e6-b976-32131a41d75c.filesusr.com/ugd/cb7598_a6006bd8e84b4df5a91dafdd49d75636.pdf
2. Kozak, O.V., Mykhaylova, L.M., Semenyshyna, I.V. (2025). *Modeling and simulation tools for studying computer networks: review and practical experiences*, Computer-integrated technologies: education, science, production, **58**, 70–79. [in Ukranian]. https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2025-58-09
3. Kvyatkovskaya, A.O., Sustretov, A.S. (2022). *The role of simulation programs in distance learning of students of professional institutions*, Innovative pedagogy, **48** (1), 201–204. [in Ukranian]. https://doi.org/10.32843/2663- 6085/2022/48.1.42
4. Shcherba, A.A., Petrenko, I.A. (2007). *Electrical engineering. Linear circuits*: laboratory practice, NTUU "KPI", Kyiv. [in Ukranian]
5. Gordienko, V.V. (2022). *Application of computer simulations in physics lessons during distance learning*. [in Ukranian]. https://naurok.com.ua/zastosuvannya-komp-yuternih-simulyaciy-na-urokah-fiziki-pid-chas-distanciynogo-navchannya-292037.html
6. *Mathematical model*. [in Ukranian]. https://uk.wikipedia.org/wiki/Математична_модель
7. *Physics - problems*. [in Ukranian]. https://driverivan.blogspot.com/2021/04/blog-post_21.html
8. *Volt-ampere characteristic*. [in Ukranian]. https://uk.wikipedia.org/wiki/Вольт-амперна_характеристика
9. *Nonlinear system*. [in Ukranian]. https://uk.wikipedia.org/wiki/Нелінійна_система
10. RC-circuit. [in Ukranian]. https://uk.wikipedia.org/wiki/RC-коло
11. Serdyuk, O.O. (2018). *Modern methods of studying nonlinear dynamic systems*: Study guide for students, DGMA, Kramatorsk. [in Ukranian]
12. *LTspice*. https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html
13. *KiCad EDA*, Open Source EDA Suite. https://www.kicad.org
14. *Tinkercad. Online 3D Design & Circuit Simulator*. https://www.tinkercad.com
15. Kruglyk, V. (2023). *Integration of augmented and virtual reality technologies with adaptive learning systems: analysis of conceptual models*, *Educological discourse*, **43** (4), 69–82. https://doi.org/10.28925/2312-5829.2023.44

16. *Quantum computers: a dream or a reality?* https://phm.cuspu.edu.ua/nauka/naukovo-populiarni-publikatsii/1026-kvantovi-kompyutery-mriya-chy-realnist.html

Про авторів / About the authors

Олександр Мозговий, кандидат технічних наук, доцент, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, Національний транспортний університет, вул. М. Бойчука, 42, м. Київ, 01103, Україна;

Oleksandr Mozghovyi, Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, National Transport University, 42, M. Boychuk str., Kyiv 01103, Ukraine;

Анатолій Відьмаченко, доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України, професор кафедри фізики Національного університету біоресурсів і природокористування України, головний науковий співробітник відділу фізики субзоряних і планетних систем Головної астрономічної обсерваторії НАН України; вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна;

Anatoliy Vidmachenko, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine, Professor of the Department of Physics of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Chief Researcher of the Department of Physics of Substellar and Planetary Systems of the Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, 15 Heroiv Oborony Str., Kyiv, 03041, Ukraine;

Валентина Суботіна, старший викладач, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, Національний транспортний університет, вул. М. Бойчука, 42, м. Київ, 01103, Україна;

Valentyna Subotina, Senior Teacher, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, National Transport University, 42, M. Boychuk str., Kyiv 01103, Ukraine;

Олег Пальчик, старший викладач, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, Національний транспортний університет, вул. М. Бойчука, 42, м. Київ, 01103, Україна;

Oleg Palchik, Senior Teacher, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, National Transport University, 42, M. Boychuk str., Kyiv 01103, Ukraine.

Отримано / Received 13.08.2025
Прийнято до друку / Accepted 23.10.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 338–348.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 338–348.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.9:51-7:004.42:378

Метод Ейлера з подвоєним кроком у навчанні чисельного розв'язання диференціальних рівнянь: програмування, обчислення, візуалізація

Олена Семеніхіна[1], Артем Юрченко[2], Юрій Хворостіна[3], Ігор Горовий[4], Володимир Шамоня[5]

[1]Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, кафедра інформатики, м. Суми, Україна
e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-3896-8151

[2]Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, кафедра інформатики, м. Суми, Україна
a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-6770-186X

[3]Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, кафедра математики, фізики та методик їх навчання, м. Суми, Україна
y-y-y@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-8354-944X

[4]Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, кафедра інформатики, м. Суми, Україна
i.gorovoy@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0009-0006-9239-7712

[5]Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, кафедра інформатики, м. Суми, Україна
shamonawg@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3201-4090

Анотація. У статті представлено результати дослідження, спрямованого на розробку та апробацію методики формування обчислювального мислення студентів педагогічних спеціальностей через інтегроване використання програмування, чисельного аналізу та візуалізації. Центральним компонентом дослідження виступає реалізація методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple як засобу вивчення задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Методика включає розрахунок наближеного розв'язку з двома різними кроками, побудову графіків, оцінку похибки за правилом Річардсона та порівняння з еталонним значенням. Завдяки вбудованій мові програмування та можливостям візуалізації Maple, студенти реалізовували алгоритм, інтерпретували результати і будували графічні об'єкти, що відображають динаміку наближеного розв'язку та його точність.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-17

Результати дослідження свідчать про те, що така форма організації навчання сприяє формуванню гнучких обчислювальних навичок, здатності до програмного моделювання та критичного аналізу похибок. Аналіз типових помилок студентів дозволив виокремити ключові труднощі, пов'язані з оперуванням масивами, коректною індексацією та тлумаченням залишкових членів. Обговорення результатів виконано у порівнянні з сучасними міжнародними підходами, зокрема з дослідженнями, що підкреслюють значущість візуалізації, алгоритмічного мислення і автономної реалізації методів обчислення в навчанні програмуванню. Методика має потенціал до масштабування в освітніх програмах, орієнтованих на підготовку фахівців у STEM-галузях, та демонструє ефективність інтеграції систем комп'ютерної математики в курси математичної інформатики.

Ключові слова: метод Ейлера, Maple, чисельне інтегрування, задача Коші, інформатика, програмування, обчислення, обчислювальне мислення, візуалізація, вчитель, інформатика.

1. Постановка проблеми

У підготовці майбутніх учителів інформатики й математики важливо формувати не лише знання з окремих навчальних дисциплін, а й забезпечити розвиток здатності до їх узгодженого застосування в умовах розв'язування прикладних задач. Особливої актуальності це набуває у сфері чисельного моделювання, яке потребує одночасного володіння математичними методами, навичками програмної реалізації алгоритмів та вміння візуалізувати результати для глибшого розуміння змісту обчислень. Такий міждисциплінарний підхід сприяє не лише професійній підготовці здобувачів освіти, але й створює умови для усвідомлення ними прикладного потенціалу теоретичних знань.

Одним із базових напрямів такого навчання є чисельне розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), що часто зустрічаються у прикладних задачах з фізики, біології, інформатики, економіки. Методи Ейлера, Рунге-Кутта, Адамса тощо не лише демонструють ефективні алгоритми наближеного інтегрування, а й формують у студентів уявлення про роль похибки, стійкість алгоритмів і важливість аналітичної інтерпретації результатів. Разом із тим, класичне вивчення цих методів без належного програмного супроводу, як правило, зводиться до ручних обчислень і статичних прикладів, що обмежує розвиток обчислювального мислення, не сприяє формуванню гнучких навичок застосування знань до нових задач і не дозволяє розвинути вміння бачити за аналітичними формулами динаміку розв'язку.

У зв'язку з цим особливе значення мають програмні середовища, що забезпечують комплексну підтримку моделювання: символьні й чисельні обчислення, візуалізацію та можливість створення власних алгоритмів засобами вбудованої мови програмування. До таких систем належить Maple [3], яка поєднує функціонал комп'ютерної алгебри з можливістю реалізації авторських методів та побудови графіків, що є особливо цінним у навчанні майбутніх учителів. Реалізація методів наближеного інтегрування в Maple дозволяє не лише ілюструвати принцип роботи алгоритмів, а й проводити гнучкий аналіз похибки, порівнювати методи, модифікувати їх для різних задач, поєднуючи програмування, чисельне моделювання та візуалізацію.

Таким чином, проблема дослідження полягає в обґрунтуванні та реалізації дидактичної моделі вивчення чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що ґрунтується на використанні методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple. Такий підхід має на меті формування в студентів інтегрованих професійних знань і вмінь, необхідних для ефективного викладання математики й інформатики в умовах цифрової трансформації освіти.

2. Аналіз актуальних досліджень

Сучасна освітня парадигма, орієнтована на інтеграцію теоретичних знань і прикладних навичок, висуває нові вимоги до викладання математичних і інформатичних дисциплін. Одним із ефективних засобів реалізації таких вимог є використання систем комп’ютерної математики (СКМ), які забезпечують широкий інструментарій для моделювання, обчислення та візуалізації. Згідно з низкою досліджень [2; 9], застосування таких систем як Maple, Mathematica, MATLAB не лише оптимізує обчислювальні процеси, а й сприяє розвитку логіко-аналітичного мислення, дозволяючи студентам бачити зв’язок між математичною моделлю, програмним кодом та її графічним представленням.

СКМ мають низку переваг, що роблять їх незамінними у навчанні методів чисельного інтегрування. По-перше, вони підтримують широкий спектр математичних задач: від розв’язання алгебраїчних рівнянь до обробки систем диференціальних рівнянь та векторного аналізу. Це забезпечує безперервність і взаємозв’язок навчального матеріалу в межах кількох дисциплін. По-друге, такі системи містять вбудовані мови програмування, що дає змогу реалізовувати авторські алгоритми або модифікувати класичні, як-от метод Ейлера чи метод Рунге–Кутта, що є основою для формування гнучких алгоритмічних навичок. Зокрема, Maple дозволяє одночасно працювати з процедурним і функціональним стилем програмування, що сприяє глибшому розумінню структури обчислювального процесу [7].

По-третє, важливу роль відіграє можливість візуалізації, яка значною мірою впливає на глибину засвоєння матеріалу. Візуальне подання результатів чисельного інтегрування у вигляді ламаних, точкових графіків, кривих розв’язку чи геометричних моделей дозволяє студентам не лише простежити динаміку наближеного розв’язку, а й зіставити його з еталонним. Такі можливості особливо важливі для формування уявлень про похибку чисельного методу, порядок точності та стабільність алгоритму. У роботах [1; 4] наголошується, що саме візуальна інтерпретація чисельних методів виступає основою для розвитку інженерного та обчислювального мислення в студентів.

Для майбутніх учителів математики та інформатики використання СКМ у навчальному процесі має особливе значення. Це дає змогу майбутнім педагогам не лише оволодіти ефективними інструментами для власного професійного застосування, а й зрозуміти принципи їх дидактичного впровадження у шкільну практику. Як зазначають Т. Кобильник, У. Когут і В. Жидик [8], формування алгоритмічної культури майбутніх учителів можливе лише за умови цілісного охоплення змістових, інструментальних та візуально-аналітичних компонентів, чого і можна досягти через використання інтегрованих підходів на основі СКМ.

Таким чином, сучасні дослідження підтверджують, що системи комп’ютерної математики є не лише інструментами розв’язання задач, а й потужним засобом навчання. Їх застосування в контексті чисельного розв’язування диференціальних рівнянь сприяє розвитку обчислювального мислення, гнучкості програмного моделювання та вміння візуально осмислювати результати. У поєднанні ці чинники створюють сприятливе середовище для підготовки кваліфікованих учителів нової генерації, здатних ефективно впроваджувати цифрові методи в освітній процес.

Метою дослідження є обґрунтування та перевірка ефективності використання методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple як засобу інтегрованого навчання майбутніх учителів інформатики та математики. Такий підхід передбачає поєднання програмування, чисельного обчислення й візуалізації результатів у рамках реалізації алгоритмів розв’язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Реалізація цієї мети передбачає формування у студентів здатності до створення власних програмних реалізацій відомих методів, інтерпретації отриманих результатів і критичного аналізу похибки.

3. Методи дослідження

Дослідження базується на ідеї, що вивчення чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь має супроводжуватися не лише демонстрацією формул і правил, а й активним залученням студентів до побудови алгоритмів, графічної інтерпретації наближених розв'язків і дослідження впливу кроку інтегрування на точність результату. Саме така діяльність дозволяє досягти міждисциплінарної інтеграції та забезпечити розвиток обчислювального мислення, аналітичних навичок і компетентностей, пов'язаних із програмуванням.

У рамках дослідження було реалізовано навчальну лабораторну роботу, що містить алгоритмічну реалізацію класичного методу Ейлера для розв'язування задачі Коші з фіксованим кроком *h=0,1* та зменшеним кроком *h/2=0,05*. Студенти реалізовували обчислення у середовищі Maple з використанням його вбудованої мови та інструментів для побудови графіків. Особливу увагу було приділено побудові ламаних, що відображають наближений розв'язок, точок, які відображають послідовність інтегрування, та вертикальних ліній, які репрезентують похибки у кожній точці.

У дослідженні застосовувалася методика подвійного перерахунку із подальшим використанням правила Річардсона для наближеного оцінювання похибки. Такий підхід дає змогу обчислювати правильні значущі цифри у наближеному розв'язку та зіставляти його з еталонним, отриманим за допомогою високоточних методів (наприклад, Runge–Kutta порядку 4 або RKF45). Додатково студенти проводили аналітичний супровід обчислень: вивчали вплив кроку на точність, інтерпретували залишковий член та аналізували порядок методу.

Методологія дослідження поєднує елементи якісного й кількісного аналізу. Здійснювалося педагогічне спостереження за ходом виконання роботи, аналіз змісту звітів, побудованих графіків та коментарів студентів. Збір емпіричних даних дозволив оцінити сформованість навичок програмування, обґрунтування чисельних процедур, здатність візуально інтерпретувати результати і рефлексувати над точністю обчислень.

Таким чином, у дослідженні використовувалися як інструменти Maple для обчислення та графіки, так і педагогічні засоби організації інтерактивної діяльності, спрямованої на розвиток складних професійних умінь у майбутніх педагогів. Це дозволило забезпечити повну реалізацію поставленої мети та закласти основу для аналізу ефективності подібних інтегрованих методик.

4. Основні результати

Проведене дослідження ґрунтувалося на аналізі виконання студентами лабораторної роботи, що передбачала реалізацію методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple для чисельного розв'язання задачі Коші. Усі студенти працювали з власними варіантами рівняння у формі *y'(x)=f(x,y)* із заданими початковими умовами та кроками *h=0,1* і *h/2=0,05*. Вони здійснювали два незалежні розрахунки: перший – методом Ейлера на грубішому розбитті, другий – на уточненому, із подальшим визначенням похибки за правилом Річардсона. Результати наближених розрахунків зіставлялися з еталонними значеннями, обчисленими вбудованими чисельними методами Maple (RKF45).

Наведемо розв'язання ДР $y' = e^{-x-y} + \frac{1}{2y^2}$ з використанням Maple.

> *with(plots): ur:=exp (-x-y)+0.5*y^(-2):* права частина рівняння

> *ur1:=subs(y=y(x),ur): eq:=diff(y(x),x)=ur1;* диференціальне рівняння

$$eq := \frac{d}{dx}\,y(x) = e^{(-x - y(x))} + \frac{0.5}{y(x)^2}$$

> *x0:=0: y0:=0.2:* початкові умови

> *u:=y(x0)=y0:*

> *r:=dsolve({eq,u},y(x),type=numeric);* розв’язання методом RKF45.

> *kd:=odeplot(r,[x,y(x)],0..1,color=pink,thickness=5):* рожева крива - розв’язок задачі Коші ДР для майбутньої побудови

> *r_i := dsolve({eq,u}, type=numeric, output=array([0,.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9,1]));* Результатом буде масив даних на 10 точок розбиття (еталонні значення).

> *a:=0: b:=1: n:=10;* задання кінців відрізка та кількості точок розбиття

> *xx:=array(0..n): xx2:=array(0..2*n): yy:=array(0..n): yy2:=array(0..2*n):*

> *t:=array(0..n): t2:=array(0..2*n):*

> *xx[0]:=x0: xx2[0]:=x0: yy[0]:=y0: yy2[0]:=y0:*

> *h:=(b-a)/n:* крок

> *h2:=h/2:* подвійний крок

> *f:=unapply(ur,x,y):*

одинарний обрахунок

> *for i from 1 to n do xx[i]:=xx[i-1]+h: yy[i]:=yy[i-1]+h*f(xx[i-1],yy[i-1]) od:*

> *for i from 0 to n do t[i]:=[xx[i],yy[i]] od: tt:=convert(t,list):* створення масиву точок кривої Ейлера

> *ke:=listplot(tt,color=black): te:=pointplot(tt,color=red):* побудова чорної ламаної та червоних точок кривої Ейлера

> *lom_ejler:=display(ke,te):*

> *for i from 1 to 2*n do xx2[i]:=xx2[i-1]+h2: yy2[i]:=yy2[i-1]+h2*f(xx2[i-1],yy2[i-1]) od:* подвійний перерахунок

> *for i from 0 to 2*n do*
t2[i]:=[xx2[i],yy2[i]] od: tt2:=convert(t2,list):

> *ke2:=listplot(tt2,color=blue):* ламана Ейлера для подвійного перерахунку

> *for i from 1 to n do*
*t3[i]:=[xx2[2*i-1],yy2[2*i-1]] od: tt2:=convert(t3,list):*

> *te2n:=pointplot(tt2,color=green):* побудова зелених точок кривої Ейлера другого перерахунку

> *for i from 1 to n do*
*t4[i]:=[xx2[2*i],yy2[2*i]] od: tt2:=convert(t4,list):*

> *te2c:=pointplot(tt2,color=red):* точки кривої Ейлера другого перерахунку

> *lom_ejler2:=display(ke2,te2n,te2c):*

> *v:=array(1..n):* вертикалі першого обрахунку

> *for i from 1 to n do*
v[i]:=implicitplot(x=xx[i],x=0..1, y=y0..rhs(r(xx[i])[2]),linestyle=DOT, color=green) od:

> *ve:=convert(v,list): v2:=array(1..2*n):* жовті вертикалі подвійного перерахунку

> *for i from 1 to 2*n do v2[i]:=implicitplot(x=xx2[i],x=0..1, y=y0..yy2[i],linestyle=DOT,color=gold) od:*

> *ve2:=convert(v2,list):*

> *vo:=array(1..n):* вертикалі похибок першого обрахунку

> *for i from 1 to n do*
vo[i]:=implicitplot(x=xx[i],x=0..1, y=rhs(r(xx[i])[2])..yy[i],color=red) od:

> *veo:=convert(vo,list):*

> *op(yy);op(yy2);* вивід таблиць значень шуканої функції для одинарного і подвійного перерахунків.

array(0 .. 10, [
(0) = 0.2
(1) = 1.531873075
(2) = 1.572736472
(3) = 1.609937495
(4) = 1.644037336
(5) = 1.675486748
(6) = 1.704653023
(7) = 1.731839082
(8) = 1.757297332
(9) = 1.781239945
(10) = 1.803846637
])

array(0 .. 20, [
(0) = 0.2
(1) = 0.8659365375
(2) = 0.9192837980
(3) = 0.9669093661
(4) = 1.010014290
(5) = 1.049430649
(6) = 1.085765348
(7) = 1.119478416
(8) = 1.150929111
(9) = 1.180404738
(10) = 1.208139553
(11) = 1.234327649
(12) = 1.259132031
(13) = 1.282691179
(14) = 1.305123912
(15) = 1.326533066
(16) = 1.347008318
(17) = 1.366628397
(18) = 1.385462832

> *display(lom_ejler,lom_ejler2,ve,ve2,veo,kd);*

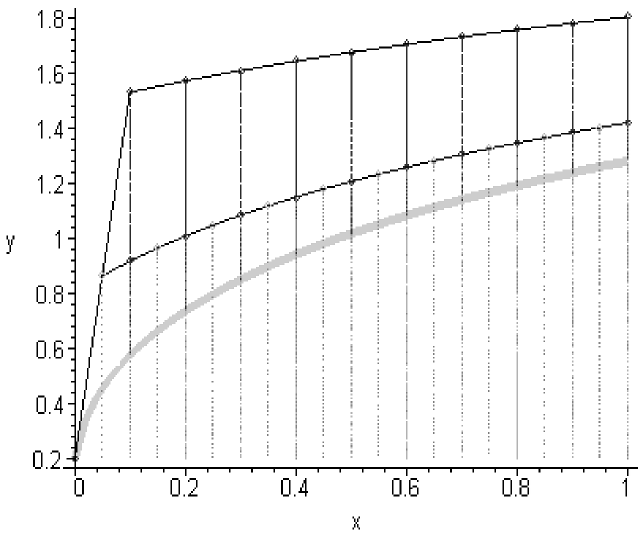


Рис. 1. Результати візуалізації за набором команд

Ключовим елементом роботи було програмування власного алгоритму чисельного інтегрування. Студенти створювали масиви значень аргументу та функції, реалізовували цикл послідовного обчислення значень функції, будували ламані лінії, що описують наближене розв'язання, а також зображали точки та вертикалі, які репрезентують залишкові похибки. Візуальний супровід забезпечував глибше осмислення результатів, дозволяючи спостерігати зменшення відхилення наближеного розв'язку при зменшенні кроку інтегрування. Така динамічна візуалізація сприяла емпіричному усвідомленню порядку точності методу Ейлера. Завдяки візуальному супроводу результати набували не лише числового, але й графічного значення, що сприяло осмисленню динаміки наближеного процесу інтегрування. Зокрема, студенти спостерігали, як із зменшенням кроку інтегрування зменшується відхилення наближеного розв'язку від еталонного, що дозволяло емпірично підтвердити порядок точності методу Ейлера.

У результаті аналізу студентських звітів було виявлено, що більшість учасників експерименту правильно реалізували як числову частину алгоритму, так і графічну інтерпретацію. Значна частина студентів виявила здатність самостійно модифікувати код: змінювати кроки, створювати нові масиви, додавати вертикальні оцінки похибок, використовувати вбудовані процедури для аналітичного розв'язання, зберігаючи при цьому логіку побудови алгоритму. Це засвідчило сформованість обчислювального мислення, уміння застосовувати програмування у розв'язанні математичних задач та здатність до узгодженого аналізу числових і графічних результатів.

Особливо важливим є те, що у процесі роботи студенти здійснювали порівняння результатів, інтерпретували залишкові члени похибок, встановлювали, скільки правильних значущих цифр міститься у наближеному розв’язку на кожному кроці. Це сприяло розвитку критичного мислення та вміння оцінювати якість отриманого результату. Завдяки вбудованій підтримці Maple для побудови графіків, учасники проєкту змогли створити багатокомпонентні візуалізації, що одночасно демонстрували кілька аспектів розв’язання: ламані Ейлера першого й другого порядку, вертикалі похибок, еталонну інтегральну криву, кольорове маркування точок, відповідно до способу обчислення.

Однак, у процесі виконання роботи було зафіксовано й низку типових помилок, що мають методичне значення. Найпоширенішою проблемою було змішування індексації в масивах: деякі студенти некоректно задавали початкові значення, що призводило до зсуву результатів у послідовності. Також траплялися труднощі з узгодженням типів даних при побудові точок та ламаних, зокрема при переході між масивами й списками, що вимагало додаткових пояснень щодо структур даних у Maple.

Інша помилка полягала у спробі безпосереднього обчислення похибки як різниці двох значень без врахування масштабу кроку або залишкового члена Річардсона, що свідчить про недостатнє розуміння змісту поняття «оцінка точності». У деяких випадках спостерігалося невірне формулювання аналітичного розв’язку або використання невідповідного методу для порівняння результатів (наприклад, Runge–Kutta 2-го порядку замість RKF45), що потребувало індивідуальних консультацій.

Попри зазначені труднощі, студенти виявили високий рівень зацікавленості в аналізі результатів і особливо позитивно сприйняли візуальне представлення похибок у вигляді вертикальних ліній. Така форма візуалізації сприяла усвідомленню того, як навіть незначна зміна кроку може впливати на точність обчислень, а також дала змогу відчути метод у дії, а не як абстрактну формулу.

У підсумку, результати виконання завдання засвідчили доцільність запропонованого підходу: студенти не лише опанували алгоритм чисельного інтегрування, але й отримали досвід роботи з мовою програмування Maple, навчилися аналізувати похибку, будувати наочні моделі результатів та формулювати висновки на основі візуальних і числових даних. Запропонована методика сприяла інтегрованому розвитку математичних, програмних і візуально-аналітичних компетентностей, що має вирішальне значення у професійній підготовці майбутніх педагогів у галузі STEM. Загальний аналіз виконаних робіт показав, що розроблена методика сприяє формуванню навичок застосування математичних знань у програмному середовищі, розвитку здатності будувати алгоритми та критично оцінювати наближені результати. Усі учасники продемонстрували базову або вищу здатність до реалізації обчислювального алгоритму у Maple, що свідчить про ефективність поєднання програмування, чисельних обчислень і візуалізації в підготовці майбутніх учителів математики та інформатики.

5. Обговорення

Аналіз результатів виконання лабораторної роботи свідчить про високу ефективність використання методу Ейлера з подвоєним кроком у навчанні майбутніх учителів математики та інформатики. Така методика дозволяє поєднати математичну строгість чисельного інтегрування з алгоритмічною гнучкістю програмної реалізації, створюючи умови для формування обчислювального мислення та прикладного розуміння математичних методів. Практичне засвоєння методу через самостійну побудову обчислювального алгоритму і його реалізацію у Maple забезпечує інтеграцію кількох змістових доменів: чисельного аналізу, програмування та візуалізації даних.

Системи комп'ютерної математики, зокрема Maple, дозволяють не лише реалізовувати чисельні алгоритми, а й сприяють глибшому засвоєнню принципів моделювання. Подібні підходи отримують дедалі ширше визнання у міжнародному освітньому контексті. Так, згідно з дослідженням Q. Ou та інших [4], ефективне навчання програмуванню у школах і ЗВО Китаю значною мірою залежить від візуального представлення процесу обчислення, особливо при вивченні алгоритмів, що потребують ітераційної побудови, як-от метод Ейлера. Аналогічно, I. Sanusi, E. Cudjoe та інші [5] наголошують, що ключовою умовою формування програмної компетентності є осмислення обчислювальної логіки через моделювання процесів, а не лише шляхом синтаксичного відтворення коду.

Важливість візуалізації у вивченні чисельних методів підкреслюється й у роботі [1], де зазначено, що навіть на початковому рівні студенти краще опановують алгоритми, коли результати розв'язку представлені не тільки числово, а й графічно. У цьому сенсі інтеграція візуального з програмним та математичним шаром у Maple забезпечує синергетичний ефект, який в умовах україномовної вищої школи лише починає впроваджуватись системно. Відмінність запропонованого підходу полягає у залученні студента до повного циклу роботи з математичною задачею: від постановки й формулювання моделі до її чисельного розв'язання, верифікації, візуального супроводу та аналізу похибок.

Порівняльний аналіз також виявляє суттєві переваги роботи у Maple над іншими підходами. У багатьох країнах, зокрема США та Канаді, популяризуються середовища з фокусом на графічний інтерфейс і готові об'єкти (наприклад, GeoGebra, MATLAB GUI), однак це часто зменшує залучення до розуміння алгоритму. У нашому підході акцент зроблено саме на поєднання формального алгоритмічного мислення та візуалізації, що відповідає рекомендаціям дослідження [6], де підкреслено важливість контролю над процесом розв'язання як передумови успішного оволодіння програмуванням. Автор зазначає, що нові інструменти штучного інтелекту, як-от ChatGPT, не повинні витісняти традиційного моделювання, а мають доповнювати його, зберігаючи аналітичний компонент у навчальному процесі.

Нарешті, важливо зазначити, що за кордоном чисельне моделювання у педагогічних ЗВО ще не завжди розглядається як частина підготовки вчителів, тоді як в українському контексті така інтеграція (як у представленій роботі) дає змогу підготувати педагогів, здатних не лише викладати інформатику чи математику, а й пояснювати учням прикладну цінність формул, розкривати структуру обчислення та заохочувати до побудови власних цифрових моделей. Запропонована методика може бути адаптована до різних рівнів складності, що дозволяє її масштабувати відповідно до цілей шкільної чи вищої освіти в контексті STEM.

Таким чином, результати обговорення підтверджують значущість розробленого підходу як сучасного засобу формування цілісної математико-інформатичної компетентності з опорою на міжнародний досвід. Синтез чисельного обчислення, алгоритмічного мислення й візуального аналізу формує не лише фахові вміння, але й педагогічну готовність застосовувати ці методи у власній навчальній практиці.

Висновки. Проведене дослідження засвідчило ефективність використання методу Ейлера з подвоєним кроком у навчанні чисельного розв'язання диференціальних рівнянь як засобу інтеграції математичних, програмних і візуально-аналітичних компонентів професійної підготовки майбутніх учителів інформатики та математики. Реалізація навчального завдання в середовищі Maple створила умови для формування обчислювального мислення, розвитку алгоритмічних навичок, осмислення поняття похибки та її впливу на точність чисельного розв'язку. Студенти пройшли повний цикл роботи з математичною задачею: від формулювання математичної моделі до побудови візуального представлення результатів із подальшим аналізом точності й коректності наближеного розв'язку.

Важливою перевагою запропонованого підходу стало залучення студентів до самостійної розробки алгоритму та реалізації чисельної процедури засобами мови програмування Maple. Це дозволило не лише поглибити розуміння структури методу Ейлера, але й сформувати вміння використовувати програмне середовище як інструмент моделювання, візуалізації та аналітичного дослідження. Візуальна підтримка у вигляді побудови ламаних кривих, маркування точок, вертикалей похибок і порівняння з еталонними значеннями відіграла ключову роль у закріпленні понять, пов'язаних із наближенням, точністю та порядком методу.

Аналіз типових помилок, допущених студентами у процесі виконання завдання, виявив зони труднощів, пов'язані із застосуванням принципів індексації, розумінням структури масивів і правильним тлумаченням правила Річардсона. Ці труднощі мають не лише технічний, але й методичний характер, і можуть бути використані для вдосконалення навчального процесу через введення проміжних пояснювальних етапів і підтримки з боку викладача у момент формування критичних точок розуміння.

Порівняння з міжнародними підходами до навчання чисельного моделювання підтверджує відповідність обраної методики сучасним трендам STEM-освіти. Використання систем комп'ютерної математики, які підтримують одночасно обчислення, програмування і візуалізацію, дедалі частіше трактується як необхідна умова для підготовки педагогів нового покоління, здатних працювати в умовах цифрової трансформації освіти. Запропонований формат лабораторної роботи у Maple уможливлює диференціацію навчання, підтримку індивідуальних темпів роботи та створення навчального середовища, орієнтованого на формування рефлексивного, критичного і продуктивного ставлення до обчислювального процесу.

Таким чином, результати дослідження підтверджують доцільність інтеграції програмування, обчислення і візуалізації в курсах підготовки майбутніх учителів математики та інформатики. Метод Ейлера з подвоєним кроком, реалізований у середовищі Maple, може виступати не лише навчальним об'єктом, а й дидактичним інструментом формування професійних компетентностей. У подальших дослідженнях доцільно розширити спектр завдань, включити системи з автоматичним оцінюванням результатів та здійснити порівняльний аналіз ефективності різних середовищ комп'ютерної математики у формуванні обчислювальних і педагогічних навичок.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Coşkunserçe O. Comparing the use of block-based and robot programming in introductory programming education: Effects on perceptions of programming self-efficacy. *Computer Applications in Engineering Education*. 2023. Vol. 31 (5). P. 1234–1255. DOI: https://doi.org/10.1002/cae.22637
2. Khvorostina Yu., Shamonia V., Semenikhina O. The connection between the study of mathematics and programming through the prism of scientific and pedagogical research. *Вісник науки та освіти*. 2025. Т. 4, №34. С. 932–945. DOI: https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4(34)-932-945
3. Maplesoft. *Maple – Technical Computing Software for Engineers, Mathematicians, and Scientists*. Waterloo Maple Inc. URL: https://www.maplesoft.com/products/maple/
4. Ou Q., Liang W., He Z., Liu X., Yang R., Wu X. Investigation and analysis of the current situation of programming education in primary and secondary schools. *Heliyon*. 2023. Vol. 9 (4). Artical e15530. DOI: https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15530

5. Sanusi I. T., Cudjoe E. S., Ayanwale M. A., Adepoju B. Pre-Service Teachers' Perception of Programming Education. *SAGE Open*. 2025. Vol. 15 (1). DOI: https://doi.org/10.1177/21582440251327019
6. Yang T.-C. The Era of Learning Programming Through Program: Challenges and Potential of ChatGPT in Revolutionizing High School Programming Education. In A. Kashihara, B. Jiang, M. M. Rodrigo, & J. O. Sugay (Eds.). *32nd International Conference on Computers in Education Conference Proceedings. Asia Pacific Soc Computers in Education*. ICCE 2024. Vol II. P. 572–577. URL: https://icce2024.org
7. Дємєнтьєв Є., Шамоня В., Семеніхіна О. Підготовка ІТ-фахівців до створення мобільних додатків: огляд актуальних досліджень. *Освіта. Інноватика. Практика*. 2025. Т. 13, № 1. С. 7–14. DOI: https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i1-001
8. Кобильник Т., Когут У., Жидик В. Методичні аспекти вивчення основ алгоритмізації і програмування мовою Python у шкільному курсі інформатики у старших класах. *Фізико-математична освіта*. 2021. Т. 31, №5. С. 36–44. DOI: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-006
9. Пенко В., Пенко О. Використання візуалізації на різних етапах вивчення дисципліни «Програмування». *Освіта. Інноватика. Практика*. 2023. Т. 11, № 2. С. 31–39. DOI: https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i2-005

UDC 517.9:51-7:004.42:378

Euler's Method with a double step in teaching the numerical solution of differential equations: programming, computation, visualization

Olena Semenikhina, Artem Yurchenko, Yurii Khvorostina, Ihor Gorovyi, Volodymyr Shamonia

Abstract. The article presents the results of a study aimed at developing and testing a methodology for fostering computational thinking in students of pedagogical specialties through the integrated use of programming, numerical analysis, and visualization. The central component of the research is the implementation of Euler's method with a double step in the Maple environment as a means of studying the Cauchy problem for an ordinary differential equation. The methodology involves calculating an approximate solution with two different step sizes, constructing graphs, estimating the error using Richardson's rule, and comparing the results with a reference value. Leveraging Maple's built-in programming language and visualization capabilities, students implemented the algorithm, interpreted the results, and created graphical objects illustrating the dynamics of the approximate solution and its accuracy. The findings indicate that this form of learning organization fosters the development of flexible computational skills, the ability to perform program-based modeling, and the capacity for critical error analysis. An analysis of typical student errors identified key difficulties related to array handling, correct indexing, and interpretation of residual terms. The discussion of results is carried out in comparison with contemporary international approaches, particularly with studies emphasizing the importance of visualization, algorithmic thinking, and independent implementation of computational methods in programming education. The methodology shows potential for scaling within educational programs aimed at preparing specialists in STEM fields and demonstrates the effectiveness of integrating computer algebra systems into courses on mathematical informatics.

Keywords: Euler's method, Maple, numerical integration, Cauchy problem, informatics, programming, computation, computational thinking, visualization, teacher, computer science.

References

1. Coşkunserçe, O. (2023). *Comparing the use of block-based and robot programming in introductory programming education: Effects on perceptions of programming self-efficacy*, Computer Applications in Engineering Education, **31** (5), 1234–1255. https://doi.org/10.1002/cae.22637
2. Khvorostina, Yu., Shamonia, V., Semenikhina, O. (2025). *The connection between the study of mathematics and programming through the prism of scientific and pedagogical research*, Visnyk nauky ta osvity – Bulletin of Science and Education, **4** (34), 932–945. https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4(34)-932-945
3. Maplesoft. (2024). *Maple – Technical Computing Software for Engineers, Mathematicians, and Scientists*. Waterloo Maple Inc. https://www.maplesoft.com/products/maple/
4. Ou, Q., Liang, W., He, Z., Liu, X., Yang, R., Wu, X. (2023). *Investigation and analysis of the current situation of programming education in primary and secondary schools*, Heliyon, **9** (4), e15530. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15530
5. Sanusi, I. T., Cudjoe, E. S., Ayanwale, M. A., Adepoju, B. (2025). Pre-Service Teachers' Perception of Programming Education, *SAGE Open*, **15** (1). https://doi.org/10.1177/21582440251327019

6. Yang, T.-C. (2024). *The Era of Learning Programming Through Program: Challenges and Potential of ChatGPT in Revolutionizing High School Programming Education,* In A. Kashihara, B. Jiang, M. M. Rodrigo, & J. O. Sugay (Eds.), *32nd International Conference on Computers in Education Conference Proceedings*, Asia Pacific Soc Computers in Education, ICCE 2024, **II**, 572–577. https://icce2024.org
7. Diemientiev, Ye., Shamonia, V., Semenikhina, O. (2025). *Preparing IT specialists for mobile application creating: a review of current research*, Education. Innovation. Practice, **13** (1), 7–14. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i1-001
8. Kobylnyk, T., Kohut, U., Zhydyk, V. (2021). *Methodical aspects of studying the fundamentals of algorithmization and programming language Python school course in informatics in high school*, Physical and Mathematical Education, **5** (31), 36-44. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-006
9. Penko, V., Penko, O. (2023). *Using visualization at different stages of studying the discipline "Programming"*, Education. Innovation. Practice, **11** (2), 31–39. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i2-005

Про авторів / About the authors

Олена Семеніхіна, доктор педагогічних наук, професор, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

Olena Semenikhina, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

Артем Юрченко, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

Artem Yurchenko, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

Юрій Хворостіна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики, фізики та методик їх навчання, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

Yurii Khvorostina, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Physics and Methods of Their Teaching, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

Ігор Горовий, аспірант, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

Ihor Gorovyi, Postgraduate student, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

Володимир Шамоня, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

Volodymyr Shamonia, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine.

Отримано / Received 15.08.2025

Прийнято до друку / Accepted 04.11.2025

Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 349–360.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 349–360.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 37.011.3-057.87:[37.041:53]

Моделювання інформального освітнього середовища для формування мотивації до самоосвіти у майбутніх учителів фізики

Анатолій Сільвейстр [1], Микола Моклюк [2], Анатолій Слободяник [3]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна
silveystram@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3633-3910

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна
mokljuk@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8717-5940

[3]Вінницький національний аграрний університет,
кафедра математики, фізики та комп’ютерних технологій, м. Вінниця, Україна
slobodaniktola7@gmail.com
https://orcid.org/0009-0006-2157-8188

Анотація. У статті досліджено модель реалізації інформальної освіти як суттєвого фактору формування мотивації до самоосвіти у майбутніх учителів фізики. Підкреслено, що сучасна освіта, зокрема, педагогічна потребує поєднання формальної, неформальної та інформальної складових, які забезпечують цілісність професійного становлення майбутнього вчителя. Проведено аналіз наукових підходів вітчизняних і зарубіжних дослідників (Д. Лівінгстона, М. Ераута, П. Веркіна, О. Аніщенко, С. Прийми, Л. Ващенко, Н. Гущиної та ін.) до розуміння змісту інформальної освіти, її значеня та функцій для реалізації навчання впродовж життя. З’ясовано, що інформальна освіта сприяє розвитку внутрішньої мотивації, пізнавальної активності, предметних та професійних компетентностей. Вона забезпечує можливість самостійного набуття новими знаннями в гнучких, доступних та особистісно орієнтованих умовах.

У межах дослідження визначено основні моделі реалізації інформальної освіти під час професійної підготовки здобувачів освіти - майбутніх учителів фізики: створення відеоблогів і подкастів для популяризації фізичних знань, участь у науково-популярних заходах, STEM-хакатонах, конкурсах і фестивалях науки, а також використання та освоєння цифрових технологій та онлайн-платформ (PhET, Tinkercad Circuits, GeoGebra тощо). Зазначено, що така діяльність не лише сприяє розвитку інформаційної та комунікативної компетентності, але й стимулює активність до самоосвіти та професійну самореалізацію здобувачів освіти. Показано, що інформальна освіта сприяє формуванню внутрішньої мотивації до навчання шляхом творчій самореалізації, саморозвитку і залучення до професійних спільнот.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-18

Зроблено висновок, що впровадження моделі інформальної освіти до підготовки майбутніх учителів фізики є ефективним засобом розвитку їхньої самоосвітньої компетентності, підвищення якості професійної підготовки та забезпечення неперервності педагогічної освіти. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розробку методичних моделей поєднання формальної, неформальної та інформальної освіти в системі підготовки педагогічних кадрів.

Ключові слова: інформальна освіта, моделювання, модель, самоосвіта, мотивація, майбутні вчителі фізики, професійний розвиток, цифрові технології, неперервна освіта.

1. Вступ

Сучасна система освіти вимагає від педагога постійного професійного розвитку. Це пов'язано з тим, що освітнє середовище швидко змінюється під впливом технологій та нових підходів до навчання. В сучасних умовах моделювання інформального освітнього середовища та його реалізація стає одним із ключових підходів у становленні майбутнього педагога. Інформальна освіта відкриває нові можливості для його самореалізації та вдосконалення професійної компетентності. Вона дає змогу здобувати нові знання у зручний спосіб, брати участь у вебінарах, тренінгах, освітніх спільнотах. Завдяки цьому педагог стає більш гнучким, інноваційним і здатним ефективно реагувати на виклики сучасної освіти.

Питання професійного розвитку вчителя та ролі інформальної освіти в сучасних умовах досліджувалися як українськими (О. Аніщенко, І. Бех, Л. Ващенко, І. Зязюн, В. Кухаренко, Л. Лук'янова, Ю. Мельничук, Л. Ніколаєнко, Н. Павлик, І. Примаченко, О. Савченко, С. Сисоєва та ін.), так і зарубіжними науковцями (В. Амендоланьє, Д. Еліс, М. Ераут, М. Кіннула, Н. Клокар, П. Кумбс, А. Манзур, А. Маселено, М. Пієнімякі, З. Санікідзе, Г. Сторсве, П. Федерігі та ін.). У їх працях простежується те, що безперервна освіта педагога є основою його професійного становлення, самореалізації та адаптації до змін у системі освіти.

Так Д. Колардін та Й. Бйорнаволд [19] підкреслюють важливість здатності здобувачів до навчання протягом усього життя і описують низку заходів, які можуть цьому сприяти. У Меморандумі «Навчання протягом усього життя» [20] міжнародними організаціями (Рада Європи, ЮНЕСКО та ОЕСР) вказується на важливість реалізації концепції навчання впродовж життя як загального принципу організації та перепрофілювання освіти.

Д. Лівінгстон у своїй праці [24] підтримує ідею неперервного навчання. На його думку навчання розглядається як одна з визначальних рис людства. У роботі наголошується, що форми навчання відрізняються за ступенем контролю - від домінування вчителя до самостійного навчання учнів. Вони охоплюють різні підходи до реалізації освітньої діяльності, зокрема раціональну (наукову) та когнітивну.

З погляду М. Ераута як знання, так і навчання можна розглядати з двох точок зору, а саме: індивідуальної та соціальної. Їх можна трактувати як аналогію корпускулярної та хвильової теорій світла. Індивідуальна перспектива на знання та навчання дозволяє нам досліджувати як відмінності в тому, що і як люди навчаються, так і відмінності в тому, як вони інтерпретують те, що вони навчаються. Соціальна перспектива звертає увагу на соціальне конструювання знань та контекстів навчання, а також на широкий спектр культурних практик та продуктів, які забезпечують знаннєві ресурси для навчання.

М. Ераут [21] вважає, що знання і навчання можна розглядати на основі двох підходів - індивідуального та соціального. Це схоже на двоїсту природу світла, яке має хвильові і корпускулярні властивості. Індивідуальний підхід дає можливість зрозуміти, що саме здобувачі вивчають, як вони це роблять і як тлумачать отримані знання. Соціальний підхід показує, що навчання залежить від суспільства, у якому людина живе і працює. Знання здобуваються разом з іншими людьми, через спілкування, культуру та спільну діяльність.

У звіті П. Веркіна [25] також підтримується підхід щодо перспективності навчання протягом усього життя. Зазначається, що визнання компетентностей, набутих людьми через неформальне та інформальне навчання, базується на результатах навчання і є сходинкою до подальшої формальної освіти або набуття кваліфікацій, що мають цінність на ринку праці. Надання можливості здобувачам прискорити проходження формальної освіти за рахунок максимального використання їхнього неформального та інформального навчання також може сприяти досягненню позитивних результатів у підготовці до майбутньої професії.

Інформальна освіта розглядається як важливий компонент неперервного навчання, яка доповнює підготовку у закладах освіти і сприяє розвитку цифрових, комунікативних та інноваційних компетентностей здобувачів.

Разом із тим, зазначена проблема потребує подальшого вивчення. Перш за все щодо ефективності різних моделей інформальної освіти, мотивації педагогів до участі в ній та її впливу на якість освітнього процесу. Про що свідчать дослідження М. Головка, Т. Засєкіної, О. Іваницького, М. Садового, В. Сергієнка та інших. Вони акцентують увагу на необхідності безперервного навчання, формуванні цифрових, комунікативних та інноваційних компетентностей майбутніх учителів фізики та астрономії. Для реалізації інформальної освіти особлива увага приділяється використанню цифрових технологій, віртуальних лабораторій, науково-дослідницької та проєктної діяльності як ефективних засобів інформальної освіти.

2. Постановка проблеми

Попри значну кількість досліджень, питання моделювання інформального освітнього середовища у професійному розвитку вчителя залишається недостатньо розкритим. Замало дослідженими є питання інтеграції результатів неформального та інформального навчання в системі підвищення кваліфікації педагогів. Разом з тим потребують уточнення критерії ефективності зазначених форм освіти і механізми їх визнання на офіційному рівні. Мало досліджено вплив реалізації моделей інформальної освіти на формування цифрової, інноваційної та рефлексивної компетентностей сучасного вчителя, зокрема вчителя фізики та астрономії. Подальших вивчення вимагає й питання створення мотиваційного середовища, що стимулює педагогів до активної участі в інформальних освітніх практиках.

Мета статті – теоретично обґрунтувати та практично розробити модель інформального освітнього середовища, спрямованого на ефективне формування та підвищення стійкої мотивації майбутніх учителів фізики до самоосвіти.

3. Основні результати

Спираючись на визначення ЮНЕСКО [22], автор праці [8] звертає увагу на такі основні форми неперервної освіти: формальна, неформальна, інформальна. Формальна освіта належить до системи інституційних навчальних закладів, які забезпечують комплекс взаємопов’язаних навчальних програм як основного заняття для дітей і молоді. Ця освіта завершується видачею дипломів державного зразка. До неформальної освіти належить будь-яка організована та тривала навчальна діяльність, що не підпадає під визначення формальної освіти. Вона може відбуватися у закладах освіти і поза ними для осіб незалежно від їхнього віку.

Л. Ващенко [5] описує неформальну освіту дорослих як якісно нове явище в соціальній та освітній сферах України, орієнтовану на практичне застосування знань і навичок.

Н. Гущина [6], досліджуючи неформальну освіту дорослих, визначила основні її принципи - міждисциплінарний, культурологічний, середовищний і ситуаційний. Дослідниця також зазначає, що мета та зміст неформальної освіти формуються на основі поєднання задоволення індивідуальних освітніх потреб особистості з урахуванням інтересів і вимог різних соціальних груп та верств населення.

З поняттям самоосвіти пов'язана також інформальна освіта. На думку автора праці [8], вона є найінноваційнішою з погляду класичної теорії та містить усі види навчальної діяльності, які не підпадають під визначення формальної та неформальної освіти. За твердженням науковця, дана форма освіти відрізняється зазвичай відсутністю організації та може здійснюватися як на індивідуальному рівні (наприклад, самоосвіта), так і на груповому (наприклад, на робочому місці, в сім'ї чи на дозвіллі). Інформальна освіта найефективніше змінює моделі поведінки людей у повсякденному житті.

М. Джонсон та Д. Маєвська у праці [23] звертають увагу на характеристики, переваги та недоліки формального, неформального та інформального навчання. Вони роблять акцент на тому, що існує певний консенсус щодо значень формального та інформального навчання. Формальне навчання в широкому розумінні відповідає організованим, інституціоналізованим моделям навчання (таким як навчання в школах), тоді як інформальне навчання описує повсякденне навчання, яке люди здійснюють протягом усього життя і яке може легко залишитися непоміченим.

Аналіз педагогічної теорії та практики свідчить, що диференціація двох вище окреслених концепцій освіти (формальної та неформальної) у поєднанні із задекларованою багатьма світовими освітніми меморандумами концепцією навчання протягом усього життя призвела до виокремлення ще одного виду освіти - інформальної. Вона ґрунтується на вихідних положеннях екзистенціалізму про розвиток людини під час її існування завдяки вирішенню постійно виникаючих завдань [18].

Інформальна освіта - це освіта, яка передбачає самоорганізоване набуття особою певних компетентностей, зокрема під час повсякденної діяльності, пов'язаної з професійною, громадською, волонтерською або іншою діяльністю, родиною чи дозвіллям [9].

У розумінні В. Бахрушина, автора праці [3] інформальна освіта – це форми здобуття освіти, які є навмисними або свідомими, але не інституціолізованими. Вони менш організовані та структуровані, ніж формальна та неформальна освіта. Інформальна освіта може охоплювати освітню діяльність, що відбувається в сім'ї, на робочому місці, у локальній спільноті та повсякденному житті на самостійно, сімейно або соціально спрямованій основі.

Під інформальною освітою О. Аніщенко та С. Прийма [11] розуміють вид освіти, яка передбачає самоорганізоване здобуття людиною певних компетентностей під час повсякденної діяльності, пов'язаної з громадською, професійною або/та іншими активностями, родиною, дозвіллям тощо.

Інформальна освіта не охоплюється сферою застосування Міжнародної стандартної класифікації освіти (МСКО) під час з'ясування її задіяності в освітньому процесі. Проте кваліфікації, здобуті в результаті інформального навчання, визнаються та можуть бути враховані під час визначення рівня навчальних досягнень здобувачів. Цей вид навчання характеризується як цілеспрямована або свідома діяльність, що відбувається поза межами інституційних освітніх структур. Він має нижчий ступінь організованості та структурованості порівняно з формальною чи неформальною освітою. Як уже зазначалося, інформальне навчання може реалізовуватися у різних соціальних контекстах - у сім’ї, на робочому місці, у громаді чи в повсякденному житті. На відміну від випадкового або спонтанного навчання, інформальне має певну мету та усвідомлений характер, що робить його важливим компонентом системи безперервної освіти [22, с. 12].

Навчання протягом усього життя, формальна, неформальна, інформальна освіта відіграють все більшу роль у набутті умінь і навичок, компетентностей, необхідних для забезпечення соціальної та економічної активності [6].

На думку науковців [2] у цьому контексті важливо не ототожнювати інформальну і неформальну освіту, хоча форми здобуття цих видів освіти подібні. Проте, визначальною ознакою неформальної освіти є її альтернативність та доповнюваність до формальної (короткострокові або низько інтенсивні програми, що надаються у вигляді коротких курсів, семінарів або майстер класів). А інформальна освіта є добровільною, за бажанням самостійно організованою діяльністю, в зручний час, в зручному місці; має на меті удосконалення особистістю власних комптентностей та здобуття додаткових навичок, умінь, розширення кругозору [1].

Сучасні доробки науковців [11] доповнюють тлумачення «інформальна освіта». Під нею вони розуміють індивідуальну пізнавальна діяльність людини в культурно-освітньому середовищі протягом усього життя, яка не обмежується віком, професією чи рівнем інтелекту. Вона охоплює навчання в різних життєвих контекстах - на роботі, у громаді, за місцем проживання або в повсякденних ситуаціях, а її зміст і напрям визначаються самою особистістю, родиною чи соціальним оточенням. Інформальна освіта характеризується меншою організованістю та структурованістю порівняно з формальною й неформальною, виступаючи додатковою або альтернативною формою навчання впродовж життя. За потреби результати такого навчання можуть бути визнані та засвідчені у встановленому законодавством порядку. Її часто називають «навчанням через досвід» і розглядають як різновид самоосвіти чи спонтанного, несистемного засвоєння знань.

Вартим уваги, на наш погляд, є думка О. Самойленко, що інформальна освіта – це освіта самостійного навчання; більш автономна, незалежна від зовнішніх дій; гнучка у проявах (за часом, місцем, формами та методами, змістом навчання); цікава і, одночасно, відповідальна для майбутнього педагога. Саме різні курси, гуртки за інтересами, заняття в громадських об’єднаннях із метою збагачення знань, самонавчання є видами інформальної освіти [13].

Ґрунтуючись на праці О. Самойленко, дослідники (О. Бартків, Є. Дурманенко, О. Дурманенко) виділяють функції інформальної освіти [1]: цілеутворення; мотиваційно-аксіологічна; пізнавально-розвивальна; компенсаційно-коригувальна; активнісно-рефлексивна. Вони звертають увагу на те, що вказані функції взаємопов’язані та взаємодоповнюють одна одну в процесі інформальної освіти.

Серед форм інформальної освіти автор праці [8] відзначає: участь у спеціалізованих заходах, фестивалях, виставках, тренінгових програмах, пов’язаних із професійною діяльністю. Науковець відображає широкий спектр індивідуальних, групових і соціокультурних форм інформальної освіти, які охоплюють як пізнавальний, так і духовно-культурний розвиток особистості.

Надзвичайно важлива інформальна освіта (самоосвіта), яка передбачає самоорганізацію здобуття педагогом певних компетенцій, зокрема під час повсякденної діяльності, пов’язаної з професійною, громадською або іншою діяльністю, родиною чи дозвіллям. Можна стверджувати, що інформальна освіта - неорганізований, не завжди усвідомлений але цілеспрямований процес, що триває протягом усього життя людини. Фактично, це набуття необхідних знань, умінь і навичок у формі життєвого досвіду.

Певною мірою інформальна освіта ототожнюється з соціалізацією, оскільки має всі засоби впливу на особистість (соціальне середовище, ЗМІ, Інтернет, культурно-просвітницькі й розважальні заклади). Її результатом є ознайомлення з культурними нормами, передача знань і набуття навичок. Інформальна освіта слабко піддається зовнішньому регулюванню адже може відбуватися навіть мимовільно, без певної мети [10].

Автори праці [11] виділяють основні характеристики інформальної освіти: позаінституційна; цілеспрямована; визначена довільним вибором та зміною інтересів; необов’язково систематична; переважно спланована; не обмежена формальними, змістовими, часовими параметрами.

У праці [25] підкреслено, що в умовах постійних змін сучасного робочого середовища особливої уваги набуває неперервне навчання. Автори застерігають про недостатнє приділення уваги до неформального та інформального навчання, що може призводити до ряду проблем у підготовці фахівців. Вони наголошують на необхідності розроблення ефективних стратегій щодо їх вдосконалення та подальшої реалізації.

Варто звернути увагу на основний недолік інформальної освіти, який виділяє автор праці [18]. Зміст якого полягає в її ексцесуальності, коли знання й уміння здобуваються переважно під тиском нагальної потреби, за умови, що їхня відсутність стає особливо помітною та критично важливою. Крім того, інформальна освіта має ще кілька негативних особливостей. По-перше, нестача знань, отриманих у межах формальної та неформальної освіти, позбавляє професійну діяльність фахівця фундаментальності, наукової обґрунтованості й передбачуваності, змушуючи діяти методом «спроб і помилок». Це підвищує ризик помилок і знижує ефективність освітнього процесу, негативно впливаючи на якість підготовки здобувачів. По-друге, ексцесуальний характер інформальної освіти показує, що її здобувач не вміє заздалегідь запобігати професійним проблемам. Постійне реагування на раптові ситуації суперечить потребі викладача діяти стратегічно та бути прикладом для студентів, адже відсутність системності знижує ефективність його педагогічного впливу.

Також у дослідженні [17] зазначається, що попри численні переваги інформальна освіта має певні обмеження. Основним з недоліків є ризик дезінформації через відсутність належного нормативного контролю. Не завжди використовується перевірена й достовірна інформація, що може спричинити викривлення знань і поширення недостовірних відомостей. Брак фахового нагляду підвищує ймовірність формування у здобувачів міфів, стереотипів або хибних уявлень про навколишній світ, професійну діяльність. Тому важливо забезпечувати перевірку джерел інформації, а також цілеспрямовано розвивати у здобувачів критичне мислення як засіб протидії дезінформації.

У сучасних умовах розвитку освіти особливої актуальності набуває проблема формування мотивації до самоосвіти у майбутніх учителів фізики. Від рівня їхньої готовності до безперервного професійного зростання залежить якість навчання та здатність адаптуватися до інновацій у науці й педагогіці. Важливу роль у цьому процесі відіграє інформальна освіта, яка створює можливості для самостійного пізнання, участі в наукових заходах, професійних спільнотах і творчих проєктах. Саме завдяки інформальним формам навчання формується внутрішня мотивація до саморозвитку, що сприяє становленню компетентного, науково мислячого та педагогічно гнучкого вчителя фізики та астрономії.

Серед освітніх ресурсів для майбутніх учителів фізики та астрономії для реалізації інформальної освіти можуть бути використані: науково-популярні відео (YouTube, лекції TED, Khan Academy); онлайн-спільноти педагогів (EdCamp, Facebookгрупи, форуми); відкриті освітні ресурси (PhET, Coursera, Prometheus, EdEra); участь у наукових проєктах, конкурсах, хакатонах, фестивалях науки тощо.

А тепер розглянемо реалізацію моделювання інформального освітнього середовища для його подальшого використання під час підготовки майбутніх учителів фізики. Дана модель являє собою систему добровільного навчання, що реалізується поза заняттями і сприяє формуванню та розвитку мотивації до самоосвіти у здобувачів освіти. Простими словами, даний підхід дає можливість перетворити у навчанні нудне «потрібно» на цікаве «хочу».

Побудова моделі такого освітнього середовища ґрунтується на трьох простих принципах:

1. Здобувачі освіти самі обирають, що вчити: ніхто не змушує їх до самоосвіти. Вони вирішують, який подкаст робити, в якому конкурсі брати участь, і яку програму опановувати. В цьому і полягає «Свобода вибору».

2. Студенти під час самоосвіти завжди щось створюють: навчання відбувається через дію. Здобувачі не просто опановують матеріал, а створюють його: знімають відео, пишуть код для організації та реалізації віртуального експерименту, організовують та проводять квести тощо. Це дає відчуття «Я можу».

3. Використовують у навчанні сучасні інструменти: YouTube, освітні платформи (PhET), соціальні мережі тощо. Це робить знання «актуальними» для майбутньої роботи вчителем в сучасних умовах.

Модель інформального освітнього середовища для підготовки майбутніх учителів фізики характеризується наявністю наступних «майданчиків» (табл. 1).

Таблиця 1.

Структура моделі інформального освітнього середовища для підготовки майбутніх учителів фізики

Назва «Майданчика»	Що там відбувається?	Як це допомагає?	Приклади
1. Творча Майстерня	Здобувач сам створює навчальні матеріали, пояснює складне просто.	Розвиваються вміння пояснювати (комунікація) та шукати правдиву інформацію.	Зйомка відеоблогу «Фізика навколо нас» або запис подкасту.
2. Клуб Однодумців	Студент спілкується з іншими вчителями та науковцями, бере участь у спільних подіях.	Формується відчуття «Я частина професії» і підвищується інтерес до нових відкриттів у фізиці.	Участь у наукових фестивалях, «Фізичних квестах» та конкурсах.
3. Цифрова Лабораторія	Студент опановує нові комп'ютерні програми, сервіси та симулятори.	Розвивається самостійність у навчанні та реалізується осучаснення майбутніх уроків.	Створення віртуальних експериментів у ресурсах типу PhET або Tinkercad.

Нижче пропонуються конкретні приклади реалізації моделі інформального освітнього середовища в галузі методики навчання фізики, які спрямовані на формування мотивації до самоосвіти у майбутніх учителів фізики та астрономії з урахуванням ідей щодо розвитку професійної компетентності, творчого потенціалу й використання цифрових освітніх технологій.

1. Фізичний відеоблог або подкаст «Фізика навколо нас». Здобувачі створюють короткі відео або аудіоподкасти, у яких пояснюють фізичні явища з повсякденного життя (наприклад, «Чому небо синє?», «Як працює мікрохвильова піч?», «Фізика смартфона»). Ці проєкти реалізуються поза межами формальних занять - у вигляді самостійної діяльності, творчих ініціатив або студентських клубів.

Такі види діяльності:

– формують пізнавальний інтерес і навички наукової комунікації;
– стимулюють до самостійного пошуку достовірних джерел інформації;
– сприяють розвитку цифрової компетентності.

Згідно з цими ідеями, така діяльність сприяє формуванню «внутрішньої мотивації до навчання через самоактуалізацію особистості студента у творчій діяльності» [16].

2. Участь у відкритих науково-популярних заходах і конкурсах. Здобувачі беруть участь у наукових фестивалях, конкурсах, конференціях, інтерактивних лекціях, STEM-хакатонах, «Фізичних квестах», що проводяться поза межами університету (наприклад, у рамках тижня науки або всеукраїнських конкурсів учнівських експериментів). Такі події об'єднують академічне навчання з неформальним досвідом, сприяючи професійній соціалізації майбутніх педагогів. У цьому випадку:

– формується відчуття належності до професійної спільноти;
– підвищується інтерес до сучасних напрямів розвитку фізики;
– стимулюється самоосвіта як засіб підготовки до виступів чи демонстрацій.

Ідеї, що відображені у праці [14] підкреслюють значення діяльнісного підходу та освітньої інтеграції формального й неформального середовища у професійному становленні вчителя фізики.

3. Онлайн-курс або самоосвітній мініпроєкт «Сучасні цифрові технології у фізичному експерименті». Майбутні вчителі опановують онлайн-платформи (PhET, Tinkercad Circuits, Algodoo, GeoGebra), створюють власні віртуальні або відеоексперименти й презентують результати на сторінці кафедри. Освітня діяльність відбувається поза межами навчальної програми - у вигляді самоосвітнього або групового ініціативного проєкту. Цей підхід:

– сприяє розвитку умінь самостійно здобувати нові знання;
– забезпечує підвищення інтересу до дослідницької діяльності;
– стимулює рефлексію власного освітнього поступу.

У праці [4] підкреслюється роль цифрових інструментів у формуванні пізнавальної активності та самоосвітньої компетентності, а в дослідженні [15] - значення самоорганізації та саморозвитку як базових компонентів інформальної освіти.

Описана модель, по суті, є системою сучасних позаурочних занять для майбутніх учителів фізики. Вона сприятиме формуванню у студентів мотивів навчатися самим, адже вони можуть самі обирати, що вивчати, створювати щось корисне (відео, експерименти) і брати участь у реальних подіях.

Запропоновані приклади показують, що модель інформальної освіти під час підготовки вчителя фізики та астрономії може стати потужним чинником розвитку мотивації до самоосвіти, поєднуючи творчість, цифрову активність і професійну самореалізацію.

Висновки. Проведене дослідження підтвердило, що інформальна освіта виступає важливим чинником формування мотивації до самоосвіти у майбутніх учителів фізики. Її гнучкість, доступність та орієнтація на індивідуальні потреби здобувачів сприяють розвитку внутрішньої потреби в неперервному професійному зростанні, стимулюють активність, самостійність і творче мислення.

Встановлено, що використання ресурсів інформальної освіти - онлайн-платформ, науково-популярних заходів, професійних спільнот - не лише розширює спектр знань, але й підсилює пізнавальний інтерес здобувачів, створює умови для їхнього самостійного пошуку інформації та критичного аналізу. Це безпосередньо впливає на готовність до самоосвіти як невід’ємної складової педагогічної діяльності.

Важливим є те, що інтеграція моделей інформальної освіти у процес професійної підготовки майбутніх учителів фізики можлива через використання проєктних форм навчання, участь у студентських наукових гуртках, застосування цифрових ресурсів та співпрацю з освітніми спільнотами. Такі підходи сприяють становленню здобувачів як активних суб’єктів власної освітньої траєкторії.

Запропонована модель реалізації інформальної освіти посилює мотивацію до самоосвіти, формує відповідальність за результати навчання та забезпечує умови для неперервного професійного розвитку вчителя. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розробку методичних моделей системного поєднання формальної, неформальної та інформальної освіти у підготовці педагогічних кадрів.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію..

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бартків О.С., Дурманенко Є.А., Дурманенко О.Л. Інформальна освіта у процесі професійної підготовки майбутніх педагогів. Інноваційна педагогіка. 2023. Вип. 55. Том 1. С. 100-104.
2. Баталова А.Б. Взаємозв’язок між формальною, неформальною та інформальною освітою при підготовці фахівців: матеріали Міжнародної наук.-практ. конф. «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця», (Суми, 5-6 грудня 2019 р.). Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2019. Ч. 2. С. 166-167.
3. Бахрушин В. Неформальна та інформальна освіта: навіщо вони нам потрібні? – Електронний ресурс. Портал громадських експертів «Освітня політика». URL: http://education-ua.org/ua/articles/872-neformalna-ta-informalna-osvitanasho-voni-nam-potribni
4. Бусел С.Ю., Моклюк М.О. Цифрові інструменти для встановлення рівня навчальних досягнень учнів. *The 3st International scientific and practical conference “Eurasian Scientific Discussions: Collaboration and Development”* (07-09 October 2024) EESF, Lviv, Ukraive. 2024. 18-25.
5. Ващенко Л.С. Інформальна та неформальна освіта як фактор професійного розвитку педагога. *Педагогічний дискурс*. 2020. №29. С. 25-31. URL: http://jnas.nbuv.gov.ua › snjasu_2018_11_12.
6. Гущина Н.І. Неформальна та інформальна освіта дорослих як невід’ємна складова освіти впродовж життя: європейський вимір. Професійний розвиток фахівців у системі освіти дорослих: історія, теорія, технології: збірник матеріалів ІІ-ї Всеукраїнської Інтернет-конференції 28 квітня 2017 р. м. Київ; редкол.: В.В. Сидоренко, М.І. Скрипник, Я.Л. Швень. Київ: ЦІППО, 2017. С. 234-239.
7. Дудус Т. Інформальна освіта – шлях до професійного та особистісного розвитку. URL: https://akim.uz.ua/img/Homin/Nad/ДУДУС%20САМООСВІТА%2003.02.23.pdf
8. Жукевич І. Інформальна освіта як фактор трансформації сучасної освіти. Збірник наукових праць Херсонського державного університету. Педагогічні науки. Вип. 79(1), 2017. С. 140-144.
9. Закон України «Про освіту» від 05.09.2017 №2145-VIII. *Поточна редакція – від 22.09.2025, підстава* – 4562-IX. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text
10. Ніколенко Л.Т. Професійний розвиток педагогів у формальній, неформальній та інформальній освіті дорослих: історико-педагогічний аспект. Імідж сучасного педагога. 2016. № 4 (163). С.25-33.
11. Прийма С.М., Аніщенко О.В. Інформальна освіта. Велика українська енциклопедія. – Електронний ресурс. 2020. URL: https://vue.gov.ua/Інформальна_освіта
12. Романишин Ю.Л., Бохонько Є.О., Мостович А.М. Неформальна та інформальна освіта дорослих в Україні. Інноваційна педагогіка. 2023. Вип. 63. Том 2. С. 153-156.
13. Самойленко О.А. Інформальна освіта в системі особистісного та професійного розвитку дорослого. Вісник Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка. 2019. Вип. 1 (157). С. 188-194.
14. Сільвейстр А.М., Моклюк М.О. Формування природничо-наукових знань в учнів на основі інтеграційних процесів. *Сучасні фізичні знання як основа інтеграції змісту шкільної природничої*

освіти : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. (Умань, 24–25 листоп. 2021 р.) / МОН України, НАПН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини [та ін.]. Умань : УДПУ імені Павла Тичини, 2021. С. 87-90.

15. Сільвейстр Анатолій, Моклюк Микола. Шляхи реалізації дуального навчання під час підготовки майбутнього вчителя фізики. (2025). Математика, інформатика, фізика: наука та освіта, 2(1), 113-123. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-13
16. Сільвейстр А.М., Моклюк М.О., Думенко В.П. Формування мотивів професійної спрямованості здобувачів середньої освіти на уроках фізики в старших класах. *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Теорія та методика навчання природничих наук.* Вінниця: ВДПУ, 2023. № 5. 23-30. DOI: https://doi.org/10.31652/2786-5754-2023-5-23-30
17. Чикурова О. Чайка В., Писарчук О. Неформальна та інформальна освіта дошкільників: суть, види та функції. Гуманітарні студії: Історія та педагогіка. 2023. №2. С. 113-124.
18. Юник І.Д. Формальна, неформальна та інформальна освіта у брендингу викладача вишу. Академічні студії. Серія «Педагогіка», 2022, №1. С. 221-228.
19. Colardyn D., Bjornavold J. Validation of Formal, Non-Formal and Informal Learning: Policy and Practices in EU Member States. *European Journal of Education*. 2004. Vol. 39, №1. P. 69-89.
20. Commission of European Communities. A Memorandum on Lifelong Learning, 2000. URL: http://tvu.acs.si/dokumenti/LLLmemorandum_Oct2000.pdf.
21. Eraut M. Informal Learning in the Workplace. Studies in Continuing Education. 2004. Vol. 26, №2. P. 247-273. https://doi.org/10.1080/158037042000225245
22. International Standard Classification of Education ISCED 2011. UNESCO *Institute for Statistics.* Canada. Montreal-Quebec, 2012. *86 p.*
23. Johnson M., Majewska D. Formal, non-formal, and informal learning: What are they, and how can we research them? Cambridge University Press & Assessment Research Report. 2022. 36 p.
24. Livingstone D. W. Informal Learning: Conceptual Distinctions and Preliminary Findings. Counterpoints. 2006. Vol. 249. P. 203-227.
25. Marsick V.J., Watkins K.E. *Informal and Incidental Learning in the Workplace*. London: Routledge, 2015. 284 p.
26. Werquin P. Recognising Non-Formal and Informal Learning: Outcomes, Policies and Practices. OECD Publishing. Paris, 2010. DOI: https://doi.org/10.1787/9789264063853-en.

UDC 37.011.3-057.87:[37.041:53]

Modeling the informal educational environment to form motivation for self-education in future physics teachers

Anatolii Silveistr, Mykola Mokliuk, Anatolii Slobodyanyk

Abstract. The article explores the model of implementation of informal education as a significant factor in the formation of motivation for self-education in future physics teachers. It is emphasized that modern education, in particular pedagogical education, requires a combination of formal, informal and informal components that ensure the integrity of the professional development of a future teacher. An analysis of the scientific approaches of domestic and foreign researchers (D. Livingston, M. Eraut, P. Verkin, O. Anishchenko, S. Pryima, L. Vashchenko, N. Gushchyna, etc.) to understanding the content of informal education, its meaning and functions for the implementation of lifelong learning is conducted. It is found that informal education contributes to the development of internal motivation, cognitive activity, subject and professional competencies. It provides the opportunity for independent acquisition of new knowledge in flexible, accessible and personally oriented conditions.

The study identified the main models of implementing informal education during the professional training of future physics teachers: creating video blogs and podcasts to popularize physical knowledge, participating in popular science events, STEM hackathons, science competitions and festivals, as well as using and mastering digital technologies and online platforms (PhET, Tinkercad Circuits, GeoGebra, etc.). It was noted that such activities not only contribute to the development of information and communicative competence, but also stimulate activity in self-education and professional self-realization of students. It was shown that informal education contributes to the formation of internal motivation for learning through creative self-realization, self-development and involvement in professional communities. It was concluded that the introduction of the informal education model into the training of future physics teachers is an effective means of developing their self-educational competence, improving the quality of professional training and ensuring the continuity of pedagogical education. Further research should be directed towards the development of methodological models for combining formal, non-formal and informal education in the system of teacher training.

Keywords: informal education, modeling, model, self-education, motivation, future physics teachers, professional development, digital technologies, continuing education.

References

1. Bartkiv, O. S., Durmanenko, Y. A., & Durmanenko, O. L. (2023). *Informal education in the process of professional training of future teachers*. Innovative Pedagogy, 55 (1), 100–104. [in Ukrainian]
2. Batalova, A. B. (2019). *The relationship between formal, non-formal and informal education in the training of specialists*. In *Scientific activity as a way of forming professional competencies of the future specialist: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference* (Sumy, December 5–6, 2019). Vol. 2, 166–167. Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko. [in Ukrainian]
3. Bakhrushyn, V. (n.d.). *Non-formal and informal education: Why do we need them?* Educational Policy Portal. [in Ukrainian]. http://education-ua.org/ua/articles/872-neformalna-ta-informalna-osvitanasho-voni-nam-potribni
4. Busel, S. Yu., & Mokliuk, M. O. (2024). *Digital tools for determining the level of students' academic achievements*. In *The 3rd International Scientific and Practical Conference "Eurasian Scientific Discussions: Collaboration and Development"* (pp. 18–25). EESF, Lviv, Ukraine. [in Ukrainian]
5. Vashchenko, L. S. (2020). *Informal and non-formal education as a factor in the professional development of a teacher*. Pedagogical Discourse, (29), 25–31. [in Ukrainian]. http://jnas.nbuv.gov.ua/snjasu_2018_11_12
6. Hushchyna, N. I. (2017). *Non-formal and informal adult education as an integral component of lifelong learning: The European dimension*. In *Professional development of specialists in the adult education system: History, theory, technologies: Proceedings of the 2nd All-Ukrainian Internet Conference* (Kyiv, April 28, 2017). Kyiv: TSIPPO. 234–239. [in Ukrainian]
7. Dudus, T. (2023). *Informal education as a path to professional and personal development*. Kyiv. [in Ukrainian]. https://akim.uz.ua/img/Homin/Nad/ДУДУС%20САМООСВІТА%2003.02.23.pdf
8. Zhukevych, I. (2017). *Informal education as a factor in the transformation of modern education*. Collection of Scientific Papers of Kherson State University. Pedagogical Sciences, 79(1), 140–144. [in Ukrainian]
9. Verkhovna Rada of Ukraine. (2017). *Law of Ukraine "On Education"* (No. 2145-VIII, September 5, 2017; current version as of September 22, 2025). [in Ukrainian]. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text
10. Nikolenko, L. T. (2016). *Professional development of teachers in formal, non-formal and informal adult education: Historical and pedagogical aspect*. Image of the Modern Teacher, 4(163), 25–33. [in Ukrainian]
11. Pryima, S. M., & Anishchenko, O. V. (2020). *Informal education*. In *Great Ukrainian Encyclopedia*. [in Ukrainian]. https://vue.gov.ua/Інформальна_освіта
12. Romanyshyn, Yu. L., Bokhonko, Ye. O., & Mostovych, A. M. (2023). *Non-formal and informal adult education in Ukraine*. Innovative Pedagogy, 63(2), 153–156. [in Ukrainian]
13. Samoilenko, O. A. (2019). *Informal education in the system of personal and professional development of adults.* Bulletin of the National University "Chernihiv Collegium" named after T. H. Shevchenko, 1(157), 188–194. [in Ukrainian]
14. Silveistr, A. M., & Mokliuk, M. O. (2021). *Formation of students' natural science knowledge based on integration processes*. In *Modern Physical Knowledge as the Basis for the Integration of the Content of School Science Education: Proceedings of the All-Ukrainian Scientific and Practical Conference* (Uman, November 24–25, 2021). Uman State Pedagogical University named after Pavlo Tychyna. 87–90. [in Ukrainian]
15. Silveistr, A., & Mokliuk, M. (2025). *Ways to implement dual education in the training of future physics teachers*. Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, 2(1), 113–123. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-13
16. Silveistr, A. M., Mokliuk, M. O., & Dumenko, V. P. (2023). *Formation of professional motivation of secondary school students in physics lessons*. *Scientific Notes of Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University. Series: Theory and Methodology of Teaching Natural Sciences*, (5), 23–30. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/2786-5754-2023-5-23-30
17. Chykurova, O., Chaika, V., & Pysarchuk, O. (2023). *Non-formal and informal education of preschoolers: Essence, types and functions*. Humanities Studies: History and Pedagogy, (2), 113–124. [in Ukrainian]
18. Yunyk, I. D. (2022). *Formal, non-formal and informal education in university teacher branding*. Academic Studies. Series "Pedagogy", (1), 221–228. [in Ukrainian]

19. Colardyn D., Bjornavold J. Validation of Formal, Non-Formal and Informal Learning: Policy and Practices in EU Member States. *European Journal of Education*. 2004. Vol. 39, №1. 69-89.
20. Commission of European Communities. A Memorandum on Lifelong Learning, 2000. URL: http://tvu.acs.si/dokumenti/LLLmemorandum_Oct2000.pdf.
21. Eraut M. Informal Learning in the Workplace. Studies in Continuing Education. 2004. Vol. 26, №2. 247-273. https://doi.org/10.1080/158037042000225245
22. International Standard Classification of Education ISCED 2011. UNESCO *Institute for Statistics.* Canada. Montreal-Quebec, 2012. *86*.
23. Johnson M., Majewska D. Formal, non-formal, and informal learning: What are they, and how can we research them? Cambridge University Press & Assessment Research Report. 2022. 36.
24. Livingstone D. W. Informal Learning: Conceptual Distinctions and Preliminary Findings. Counterpoints. 2006. Vol. 249. 203-227.
25. Marsick V.J., Watkins K.E. *Informal and Incidental Learning in the Workplace*. London: Routledge, 2015. 284.
26. Werquin P. Recognising Non-Formal and Informal Learning: Outcomes, Policies and Practices. OECD Publishing. Paris, 2010. https://doi.org/10.1787/9789264063853-en

Про авторів / About the authors

Анатолій Сільвейстр, доктор педагогічних наук, професор, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Anatolii Silveistr, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Physics and Methods of Teaching Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia, 21001, Ukraine;

Микола Моклюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mykola Mokliuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia, 21001, Ukraine;

Анатолій Слободяник, кандидат технічних наук, доцент, кафедра математики, фізики та комп'ютерних технологій, Вінницький національний аграрний університет, вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна;

Anatolii Slobodyanyk, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics, Physics and Computer Technologies, Vinnytsia National Agrarian University, 3 Sonyachna St., Vinnytsia, 21008, Ukraine.

Отримано / Received 13.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 361–369.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 361–369.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

UDC 530.1+378.147

Three Degrees of Freedom System in the Frame of Lagrangian and Hamiltonian Approaches

Oksana Shevtsova[1]

[1]National University of Kyiv-Mohyla Academy,
Department of Physical and Mathematical Sciences, Kyiv, Ukraine
o.shevtsova@ukma.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-6316-135X

Abstract. The Lagrangian and Hamiltonian approaches are key structural elements in classical mechanics courses for undergraduate students and a powerful part of the physics education culture.

The paper is created as a project for students aimed at applying the Lagrangian and Hamiltonian formalism for the description of an illustrative three degrees of freedom system, learning the peculiarities of these formalisms, identifying the conservation laws and finding the integrals/constants of motion. Students can develop using these different independent techniques and obtaining the coinciding results. In other words, this paper is an attempt to present clear interrelations of these approaches training new skills, useful for students learning classical mechanics.

Keywords: Lagrangian and Hamiltonian formalisms, Conservation laws, cyclic/ignorable coordinates, Poisson bracket, Three Degrees of Freedom system.

1. Introduction

The Lagrangian and Hamiltonian approaches are completely equivalent and it is easy to prove that each of them is indeed consistent with another. However, each formalism is beautiful and convenient and is applied behind the frame of classical mechanics [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Each technique has its own "playground" or physical space: configuration space (Lagrange mechanics) and phase space (Hamilton mechanics) and its "key players": velocities and positions, and momenta and positions, respectively.

One needs to predict the time evolution of three degrees of freedom system based on application of the conservation laws; solving the Euler-Lagrange equations and Hamilton's

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-19

equations, write the equations of motion, find the integrals of motion for this system, visualize the motion laws and the phase trajectory of the motion.

2. Lagrangian

Consider the illustrative Lagrangian of the three degrees of freedom system [7], [8]:

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x} \tag{1}$$

with the initial conditions (ICs):

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 1. \tag{2}$$

A very important feature of the Lagrangian is that conserved quantities can easily be read off from it.

The generalized momentum "canonically conjugate" to the coordinate x_i is defined by

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}.$$

If the Lagrangian does not depend on some coordinate x_i, then

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

i.e. the generalized momentum conjugate to a cyclic coordinate is a constant or a conserved quantity.

This coordinate is known as "cyclic" or "ignorable". The Lagrangian (1) has some cyclic coordinates t, y, z, and it is easy to note them as coordinates that do not appear in the Lagrangian in explicit form.

The Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

for Lagrangian (1) can be written as:

$$\begin{cases} \dfrac{2\ddot{x}}{x} - \dfrac{\dot{x}^2}{x^2} + \dfrac{\dot{y}\dot{z}}{x^2} = 0, \\ \dfrac{\dot{y}}{x} = \text{const} = C_2, \\ \dfrac{\dot{z}}{x} = \text{const} = C_1, \end{cases} \tag{4}$$

with the ICs (2). The integration constants C_1 and C_2 are easily determined from (4):

$$C_1 = \frac{\dot{z}(0)}{x(0)} = \frac{1}{1} = 1, \qquad C_2 = \frac{\dot{y}(0)}{x(0)} = \frac{1}{1} = 1. \tag{5}$$

Now we can separately rewrite the first Euler-Lagrange equation (4) taking into account the ICs (2):

$$\frac{2\ddot{x}}{x} - \frac{\dot{x}^2}{x^2} + \frac{\dot{y}\dot{z}}{xx} = 0, \qquad \frac{2\ddot{x}}{x} - \frac{\dot{x}^2}{x^2} + C_2C_1 = 0, \qquad \frac{2\ddot{x}}{x} - \frac{\dot{x}^2}{x^2} = -1. \tag{6}$$

Now we can solve this Euler-Lagrange equation by rewriting it as:

$$\frac{2\ddot{x}}{x} - \frac{2\dot{x}^2}{x^2} = -\frac{\dot{x}^2}{x^2} - 1. \tag{7}$$

Equation (7) can be written as:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{x}}{x}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2\dot{x}}{x}\right)^2 - 1. \tag{8}$$

However, the generalized momentum p_x for the Lagrangian (1) is equal to

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{x}, \tag{9}$$

so we can deal with the differential equation (8) written as

$$\frac{dp_x}{dt} + \frac{1}{4}p_x^2 = -1. \tag{10}$$

The separation of variables was used to solve the differential equation (10), yielding the solution:

$$p_x = \frac{2\cos t}{1+\sin t}. \tag{11}$$

Now we use the expression (11) and the definition of the generalized momentum (9) to find the laws of motion.

$$\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{2\cos t}{1+\sin t}. \tag{12}$$

Integration of the differential equation (12) with ICs (2) leads to the following laws of motion.

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \sin t, \\ y(t) = t - \cos t + 1. \\ z(t) = t - \cos t + 1 \end{cases} \tag{13}$$

The visualization of the results (13) is presented in Fig. 1. Point denotes the initial position of $x(0)$; red point denotes the initial position of $y(0)$ and $z(0)$.

Pictures illustrating trajectories $y(x)$, $z(x)$, and $z(y)$ are presented in Fig. 2а, Fig. 2б, Fig. 2в. Point denotes the initial position $x(0), y(0)$, $x(0), z(0)$ and $y(0), z(0)$.

Pictures illustrating trajectories $p_x(x)$, $p_y(y)$ and $p_z(z)$ are presented in Fig. 3а, Fig. 3б, and Fig. 3в. Point denotes the initial position $x(0), p_x(0)$, $y(0), p_y(0)$ and $z(0), p_z(0)$.

3. Conservation Laws and Symmetries

Noether's Theorem states: *"For each symmetry of the Lagrangian, there is a conserved quantity"* [9]. Ignorable/cyclic variables for the Lagrangian (1) are t, y, and z.

Thus, the momenta of p_y and p_z are conserved when the Lagrangian is independent of y and z. In other words, conservation of momenta p_y and p_z arises from spatial translation invariance in the y and z directions. Thus:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{z}}{x} = \text{const}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{y}}{x} = \text{const} \tag{14}$$

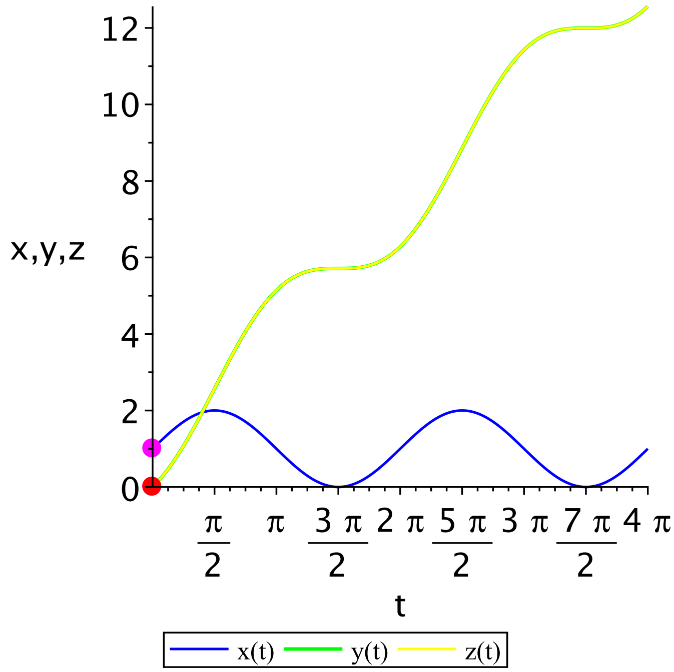
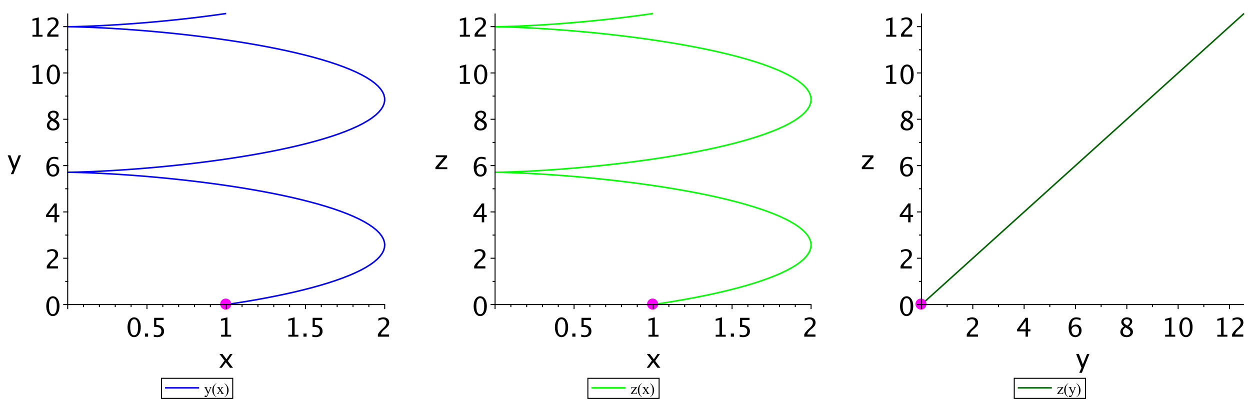


Рис. 1. The $x(t), y(t), z(t)$ dependencies.



(а) $y(x)$ dependence (б) $z(x)$ dependence (в) $z(y)$ dependence

Рис. 2. Trajectories $y(x)$, $z(x)$, and $z(y)$.

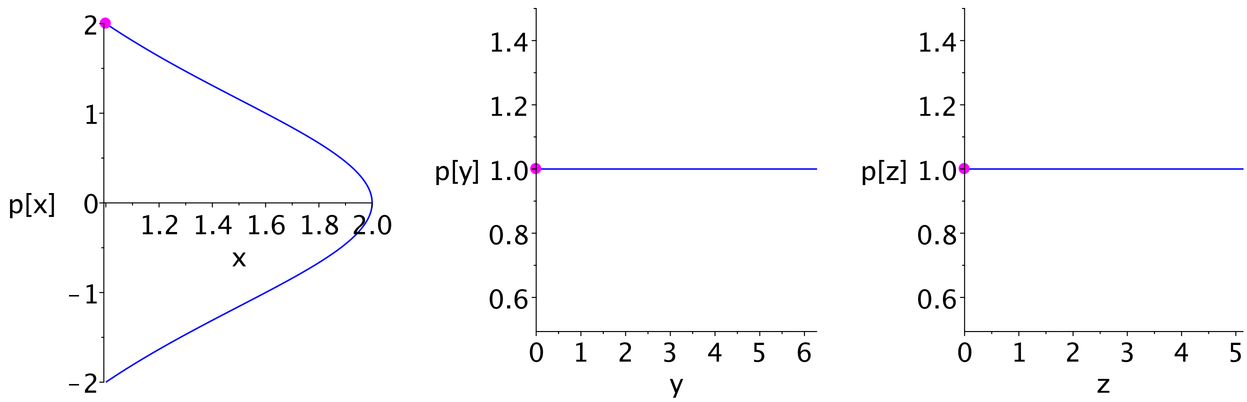
are conserved quantities.

Conservation of energy arises when the Lagrangian is independent of time, that means

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

We can write the law of conservation of energy by the definition:

$$E = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x} = \text{const}. \tag{15}$$



(А) $p_x(x)$ (Б) $p_y(y)$ (В) $p_z(z)$

Рис. 3. Phase trajectories $p_x(x)$, $p_y(y)$, and $p_z(z)$.

Thus, we have three conservation laws (three integrals of motion): E, p_y, p_z. Their values can be found at chosen ICs (2):

$$p_y = 1, \qquad p_z = 1, \qquad E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x} = \frac{(\dot{x}(0))^2 + \dot{y}(0)\dot{z}(0)}{x(0)} = 2. \tag{16}$$

Then, based on the energy conservation law, one can find the laws of motion instead of solving the Euler-Lagrange equations (4). The procedure consists in solving the first-order differential equation with separated variables.

We use the law of conservation of energy (15), (16) and the second equation of (4) to find $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2x - x^2}. \tag{17}$$

Taking into account the direction of motion, that is, knowing the value of the component x of the initial velocity ($\dot{x}(0) = 1$), one can write the first-order differential equation with separated variables.

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}. \tag{18}$$

The integration of the last equation (18) leads to $t(x)$ dependency:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int_{1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \arcsin(x - 1), \tag{19}$$

which can be rewritten as:

$$x(t) = 1 + \sin t. \tag{20}$$

Then knowing $x(t)$, one can solve the first-order differential equations (4) and find $z(t)$ and $y(t)$:

$$\frac{\dot{z}}{x} = 1 \;\Rightarrow\; z(t) = t - \cos t + 1, \qquad \frac{\dot{y}}{x} = 1 \;\Rightarrow\; y(t) = t - \cos t + 1. \tag{21}$$

Thus, applying the energy conservation law led us to the same results (see previous section).

4. Hamiltonian Formalism

The "playground" in this case is defined as the six-dimensional phase space of position and momentum components. Starting with the Lagrangian (1) one can calculate the momentum components:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{z}}{x}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{y}}{x}, \tag{22}$$

then invert these expressions to find the functions $\dot{x}(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$, $\dot{y}(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$, $\dot{z}(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ and now calculate the Hamiltonian $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ for this illustrative dynamical system by using the Legendre transformation:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \frac{1}{4}p_x^2 x + xp_y p_z. \tag{23}$$

Then we rewrite the energy in the same variables:

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x} = \frac{1}{4}p_x^2 x + xp_y p_z = H. \tag{24}$$

The energy coincides with the Hamiltonian. So, this three degrees of freedom system is conservative. Now we can prove that energy is an integral of motion, using the Poisson bracket.

5. The Poisson Bracket as a Symmetry Identifier

In Hamiltonian mechanics, the Poisson bracket is an important binary operation, playing a central role in Hamilton's equations of motion, which govern the time evolution of a Hamiltonian dynamical system. The Poisson bracket is a very elegant and powerful tool in Hamiltonian mechanics that acts as a tool for Symmetry Analysis. Using the definition of Poisson bracket and anti-symmetry, linearity, the Leibniz rule, and the Jacobi identity, it is easy to find the integrals of motion in the phase space. These constants of motion will commute with the Hamiltonian under the Poisson bracket. Suppose some function $f(p, q)$ is a constant of motion. This implies that if $p(t), q(t)$ is a trajectory or solution to Hamilton's equations of motion, then along that trajectory:

$$\frac{df}{dt} = 0. \tag{25}$$

In particular, it is easy to prove that:

$$\{E, H\} = 0, \qquad \{p_y, H\} = 0, \qquad \{p_z, H\} = 0. \tag{26}$$

Thus, E, p_y and p_z are integrals of motion.

6. Hamilton Canonical Equations of Motion

Hamilton canonical equations of motion describe the time evolution of the canonical variables $(q(t), p(t))$ in the phase space. By definition, these equations can be written as:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z}. \end{cases} \tag{27}$$

Using equations (27) we find equations for the Hamiltonian (23):

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{4}p_x^2 - p_y p_z = -\frac{1}{4}p_x^2 - 1, \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{2}p_x x, \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y = \text{const} = 1, \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = x p_z = x, \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_z = \text{const} = 1, \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = x p_y = x. \end{cases} \tag{28}$$

Solutions of the system of equations (28) can be written in the form of (11), (16) and (13). So, the obtained results indicate that the generalized momenta p_y, p_z, and the energy E are integrals of motion, and obviously, their values coincide with previous results.

Conclusions. The main idea of this paper is solving the problem in the frame of different approaches. We started from Lagrangian, wrote Euler-Lagrange equations, identified integrals of motion, used the Legendre transformation, wrote Hamiltonian and Hamilton equations. We can easily transform the project direction and start from Hamiltonian. Sophomores of Faculty of Natural Sciences of National University "Kyiv-Mohyla Academy" participated in this project. My observation is that fulfillment of the project is more effective than solution of typical problems. Lessons of this project teach that each approach is useful, beautiful and effective at solving complex problems of classical mechanics. Moreover, this way students develop their mathematical skills and learn to apply different software tools in solving mathematical problems, in visualization of obtaining results and interpreting them.

Conflict of interest and ethics. The author declares that she has no conflict of interest. She also confirms full compliance with all ethical standards for scholarly research.

Acknowledgements. The author declares that this work received no external funding.

References

1. Goldstein, H., Poole, Ch. P., Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*, 3rd Edition, Pearson Education.
2. Hamill, P. (2014). *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians*, Cambridge University Press.

3. Marion, J. B., Thornton, S. T. (2013). *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th Edition, Brooks/Cole-Thomson Learning.
4. Hand, L. N., Finch, J. D. (1998). *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press.
5. Thorn, C. B. (2013). *Intermediate Classical Mechanics*, Institute for Fundamental Theory Department of Physics, University of Florida.
6. Jose, J. V., Saletan, E. J. (1998). *Classical Dynamics – A Modern Approach*, Cambridge University Press.
7. Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Rosenkevich, L. V. (1935). *Problems in Theoretical Physics. Part 1. Mechanics*, State Scientific and Technical Publishing House of Ukraine, Kharkiv.
8. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1982). *Mechanics*, 3rd Edition, Elsevier.
9. Cline, D. (2017). *Variational Principles in Classical Mechanics*, 1st Edition, University of Rochester River Campus Libraries.

UDC 530.1+378.147

Система з трьома ступенями вільності в рамках Лагранжевого та Гамільтонового підходів

Оксана Шевцова

Анотація. Формалізми Лагранжа та Гамільтона є структурними елементами курсів класичної механіки для бакалаврів і частиною фізичної освітньої культури.

Стаття створена у форматі проекту для студентів. Її метою є застосування Лагранжевого та Гамільтонового формалізмів для опису ілюстративної системи з трьома ступенями вільності, вивчення особливостей цих формалізмів, вміння побачити закони збереження і знайти інтеграли руху. Студентам буде цікаво отримати співпадаючі результати в рамках різних підходів. Дана стаття є спробою представити взаємозв'язок цих формалізмів для розвитку у студентів нових корисних навичок у вивченні курсу класичної механіки.

Ключові слова: Формалізми Лагранжа та Гамільтона, закони збереження, циклічні координати, дужка Пуассона, система з трьома ступенями вільності.

Список використаних джерел

1. Goldstein H., Poole C., Safko J. Classical Mechanics, 3rd Edition, Pearson Education, 2002. 665 p.
2. Hamill P. A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians. Cambridge University Press, 2014. 186 p.
3. Marion J. B., Thornton S. T. Classical Dynamics of Particles and Systems. 5th Edition. Brooks/Cole-Thomson Learning, 2013. 670 p.
4. Hand L. N., Finch J. D. Analytical Mechanics, Cambridge University Press, 1998. 590 p.
5. Thorn C. B. Intermediate Classical Mechanics, Institute for Fundamental Theory. Department of Physics, University of Florida, 2013. 56 p.
6. Jose J. V., Saletan E. J. Classical Dynamics – A Modern Approach. Cambridge University Press, 1998. 694 p.
7. Ландау Л. Д., Ліфшиц Е. М., Розенкевич Л. В. Задачі з теоретичної фізики. Частина 1. Механіка. Харків: Державне науково-технічне видавництво України, 1935. 119 с.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. Mechanics. 3rd Edition. Elsevier, 1982. 200 p.
9. Cline D. Variational Principles in Classical Mechanics. 1st Edition. University of Rochester River Campus Libraries, 2017. 717 p.

Про автора / About the author

Оксана Шевцова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізико-математичних наук, Національний університет «Києво-Могилянська Академія», вул. Г. Сковороди, 2, Київ, Україна;

Oksana Shevtsova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physical and Mathematical Sciences, Faculty of Natural Sciences, National University of Kyiv-Mohyla Academy, 2 Skovoroda str., 04070 Kyiv, Ukraine.

Отримано / Received 11.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 28.10.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА: НАУКА ТА ОСВІТА

електронний науковий журнал

Том 2, № 2

Видавець:
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 7482 від 19.10.2021 р.
21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32
Тел.: (0432) 61-28-12, 38 (097) 26-30-366
e-mail: info@vspu.edu.ua
http://www.vspu.edu.ua

Підписано до публікації 26.11.2025 р.
Гарнітура Times New Roman / Computer Modern Roman
Ум. друк. арк. 13,1