ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА: НАУКА ТА ОСВІТА

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education

Електронний науковий журнал
Electronic scientific journal

Том 2, № 1
Volume 2, No. 1

Вінниця / Vinnytsia 2025

УДК [001+37.016]: [51+53+004](06) e-ISSN 3041-1955
М 34 DOI: 10.31652/3041-1955-2025-2(1)

Рішенням Міністерства освіти і науки України журнал включено до Переліку наукових фахових видань (**категорія Б**), в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт з фізико-математичних і педагогічних наук за **спеціальностями Е7, Е5, А4, А5** (Наказ МОН України № 1721 від 10.12.2024 р.).

Рекомендовано до публікації рішенням Вченої ради Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
(протокол № 11 від 21 травня 2025 р.)

Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. Вінниця: ВДПУ, 2025. Том 2, № 1. С. 1–175.

В журналі публікуються статті з фізико-математичних і педагогічних наук за спеціальностями: Е7 Математика, Е5 Фізика та астрономія, А4.04 Середня освіта (Математика), А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія), А4.09 Середня освіта (Інформатика), А5 Професійна освіта (за спеціалізаціями). Основні тематичні напрями: 1) актуальні проблеми математики; 2) актуальні проблеми фізики та астрономії; 3) теорія і методика навчання математики, інформатики, фізики та астрономії; 4) теорія і методика професійної освіти.

Періодичність видання – двічі на рік (травень, листопад).
Категорія читачів – науковці, викладачі, вчителі, аспіранти і здобувачі вищої освіти.
Засновник і видавець: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського.
Рік заснування: 2024.
Ідентифікатор медіа R40-05379.
DOI: 10.31652/3041-1955.

UDC [001+37.016]: [51+53+004](06) e-ISSN 3041-1955
M 34 DOI: 10.31652/3041-1955-2025-2(1)

By the resolution of the Ministry of Education and Science of Ukraine the journalis included in the List of scientific professional publications (**category B**), in which the results of dissertations on physical, mathematical and pedagogical sciences can be published (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine № 1721 of December 10, 2024).

Recommended for publication by the decision of the Academic Council of Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University
(prot. No. 11, 21.05.2025)

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education. Vinnytsia: VSPU, 2025. Volume 2, No. 1. P. 1–175.

The journal publishes articles on physical, mathematical and pedagogical sciences in the following specialties: E7 Mathematics, E5 Physics and Astronomy, A4.04 Secondary Education (Mathematics), A4.08 Secondary Education (Physics and Astronomy), A4.09 Secondary Education (Computer Science), A5 Vocational Education (by specialization). Main thematic areas: 1) actual problems of mathematics; 2) actual problems of physics and astronomy; 3) theory and methods of teaching mathematics, computer science, physics and astronomy; 4) theory and methods of vocational education.

Publication Frequency: twice a year.
The category of readers is scientists, lecturers, teachers, graduate students and higher education students.
Founder and publisher: Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University.
Year of foundation: 2024.
Media Identifier R40-05379.
DOI: 10.31652/3041-1955.

ЗМІСТ / CONTENTS

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ / THEORY AND METHODS OF VOCATIONAL EDUCATION

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

Actual problems of mathematics

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 1–8.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 1–8.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.612

Алгоритм дослідження нерозв'язності рівняння $z^n = x^n + y^n, n \geq 3$ у цілих додатних числах

Василь Абрамчук[1], Ігор Абрамчук[2]

[1] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
abramchuk.doc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1053-6373

[2] Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, м. Вінниця, Україна
abramchuk@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7291-5566

Анотація. Визначені необхідні умови, за яких рівняння може мати розв'язок у цілих додатних числах. Параметри рівняння x,y,n узгоджені з z і належать обмеженим замкненим множинам. Показники степенів і змінні розділені на класи. Доведено, що у просторі змішаних змінних, зв'язаних рівнянням, де одна із змінних дійсна, а інші цілі числа, значення дійсної змінної ірраціональне, що є достатньою умовою нерозв'язності рівняння у цілих додатних числах для всіх показників степенів більших трьох. На кривих Ферма існує лише дві раціональні точки. Побудована матрична (лінійна) модель степенів цілих додатних чисел.

Ключові слова: необхідні умови, класи параметрів, ірраціональні числа, послідовність Ферма, матрична модель степенів.

1. Вступ

Значення теореми Ферма для математики полягає у тому, що при намаганні її доведення була створена «теорія алгебраїчних чисел» [1; 4]. Складність методу Ейлера-Куммера, започаткованого Ейлером при дослідженні рівняння $z^3 = x^3 + y^3$, для розв'язування рівнянь вищих степенів полягає у тому, що у кільцях D_n, $n \geq 3$, з комплексними одиницями $\varepsilon^n = 1$ повинна виконуватись основна теорема арифметики.

1. Необхідні умови існування рівності $z^n = x^n + y^n, n \in N, n \geq 2$, у цілих додатних числах x, y, z.

1.1 Для всіх $n \in N, n \geq 2, z \in N, z \geq 5, x, y \in N$, числа $x = y$ не можуть бути розв'язками рівняння

$$z^n = x^n + y^n, n \in N, n \geq 2. \tag{1}$$

Допустимо, що $x = y$, тоді $z^n = 2x^n \Rightarrow x = \frac{z}{\sqrt[n]{2}}$ – число ірраціональне.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-01

1.2 Оскільки рівняння (1) симетричне відносно змінних x, y, то достатньо розглядати випадок $y < x$. Якщо $y > x$, то присвоїти $x_1 := y, y_1 := x$ і досліджувати рівняння $z^n = x_1^n + y_1^n$ за умови $y_1 < x_1$.

1.3 **Лема 1**. Для існування рівності (1) у цілих додатних числах x, y, z необхідно, щоб виконувались нерівності:

$$x < z, y < z, z < x + y, z \in N, z \geq 5. \tag{2}$$

Доведення. Умова $z \geq 5$ випливає з найменшого (примітивного) розв'язку $x = 4, y = 3$ рівняння $z^2 = x^2 + y^2, z = 5$.

Для існування рівності (1) у цілих додатних числах x, y, z нерівності $x < z, y < z$ очевидні, Параметри x, y обмежені зверху: $x \leq z - 1, y \leq z - 1$. Доведемо нерівність $z < x + y$. Допустимо протилежне $z \geq x + y$. Тоді для всіх $n \in N, n \geq 2$, матимемо $z^n \geq (x + y)^n > x^n + y^n$, що протирічить рівності (1). Із нерівності $z < x + y$ випливає обмеженість параметрів x, y знизу: $x \geq 2, y \geq 2$.

Лему доведено.

1.4 Для виконання рівності (1) у цілих додатних числах x, y, z необхідно, щоб параметр n був обмеженим зверху для кожного $z \in N, z \geq 5$. Оскільки $z^n = x^n + y^n < 2(z-1)^n$, то $n \ln z < \ln 2 + n \ln(z - 1)$. Позначимо $n_0(z) = \left[\frac{\ln 2}{\ln\frac{z}{(z-1)}}\right]$, де $[a]$ – ціла частина числа a. Отже, всі цілі додатні числа n, що належать відрізку $[2; n_0(z)]$ є показниками, узгодженими з z. Для $n > n_0(z)$ матимемо $z^n > 2(z - 1)^n > x^n + y^n$ і рівність (1) не виконуватиметься.

Висновок. Щоб виконувалась рівність (1) у цілих додатних числах необхідно, щоб для всіх $z \in N, z \geq 5$, параметри x, y, n були узгодженими з z (підпорядкованими z). Позначимо через $K(z)$ обмежену замкнену множину параметрів x, y, n: $K(z) = \{(x, y, n) \in N: 2 \leq x \leq z - 1, 2 \leq y \leq z - 1, 2 \leq n \leq n_0(z)\}$.

2. Класи параметрів $\boldsymbol{x, y, z, n}$.

Показники n степенів $a^n, a \in N, a \geq 2$, розділимо на два класи $P, P^{(2)}$. За базис класу P виберемо всі прості натуральні числа $n \geq 3$, матимемо клас непарних натуральних показників. До базиса P добавимо просте число $n = 2$ і утворимо клас парних показників $P^{(2)}$. З класу $P^{(2)}$ виділимо підклас $P^{(4)}$ – множина цілих додатних чисел, що діляться на чотири. Дослідження нерозв'язності рівнянь з показниками підкласу $P^{(4)}$ належить Ферма.

Степені з показниками підкласу $P^{(4)}$ записуватимемо: $a^n = b^4$, наприклад, $a^{40} = a^{8 \cdot 5} = (a^{10})^4 = b^4$. Степені a^n з показниками класу P записуватимемо як степені з найменшим простим дільником показника n, наприклад, $a^{51} = a^{3 \cdot 17} = (a^{17})^3 = b^3$. Степені з складеними показниками класу $P^{(2)}$ записуватимемо або як степені з показником 2, або як степені з показником, що є найменшим простим дільником $d \geq 3$ показника n, наприклад, $a^{2 \cdot 5 \cdot 17} = (a^{5 \cdot 17})^2 = b_1^2 = (a^{2 \cdot 17})^5 = b_2^5$.

Попарно взаємно прості трійки цілих додатних чисел $(x, y, z) \in N$ простору R^3 розіб'ємо на три класи C, D, E. Якщо показник $n \in P$, то до класу C віднесемо трійки чисел, для яких виконуються умови: 1) $z \in N, z \geq 5$. 2) $(x, y) \in N, 2 \leq x \leq z - 1, 2 \leq y \leq z - 1$. 3) $(x + y, z) = d > 1$; до класу D віднесемо трійки чисел, для яких виконуються умови 1), 2) і $(x + y, z) = 1$. Якщо показник $n = 2$, то до класу E віднесемо трійки взаємно простих цілих додатних чисел, які є розв'язками рівняння $z^2 = x^2 + y^2$, яке шляхом заміни $t = \frac{y}{x}$ приводиться до рівняння першого порядку

$$t = \frac{y}{x} = \frac{2\frac{m}{y}}{1-\left(\frac{m}{y}\right)^2}, m = z - x, y > m.$$

Підставивши на місце $\frac{m}{y}$ нескоротний дріб $\frac{p}{q} = \frac{m}{y}$, дістанемо аналітичний розв'язок

$$\frac{y}{x} = \frac{2pq}{q^2-p^2}, y = 2pq, x = q^2 - p^2, z = p^2 + q^2. \quad (3)$$

Якщо $(p,q) = 1$ і p,q – різних парностей, то формули (3) задають найменший (примітивний) розв'язок. Якщо $(p,q) = 1$ і p,q – непарні числа, то найменший розв'язок дістанемо після скорочення чисел x,y,z на два. Розширимо область задання рівняння (1), а саме, прийнявши, що $x,z \in N, y \in R$ – простір змішаних параметрів $R^3(x,z \in N, y \in R)$. [6; 7] Перепишемо рівняння (1) у формі $y = \sqrt[n]{z^n - x^n} = z(1-q^n)^{\frac{1}{n}}, 0 < q < 1$. Оскільки $\alpha = (1-q^n)^{\frac{1}{n}}, 0 < q < 1, n \in N, n \geq 3,$ є неперервною монотонною функцією на замкненій обмеженій множині $K(z)$, то розв'язок рівняння (1) у просторі $R^3(x,z \in N, y \in R)$ існує і єдиний для всіх $z \in N, z \geq 5, n \in [3; n_0(z)]$. Якщо для всіх $z \in N, z \geq 5$, і параметрів x,n узгоджених з z, числа $y = \sqrt[n]{z^n - x^n}$ є ірраціональними, то це означатиме, що рівняння (1) не має розв'язків у цілих додатних числах. Позначимо $m(n,z) = \left[\sqrt[n]{z^n - x^n}\right], x < z$.

2. Постановка проблеми

Довести, що рівняння $z^n = x^n + y^n$ не має розв'язків у цілих додатних числах x,y,z для всіх $n \in N, n \geq 3$.

Мета статті. 1. Довести, що значеннями функції $y = \sqrt[n]{z^n - x^n}$ є ірраціональні числа для всіх $z \in N, z \geq 5, n \in [3; n_0(z)], x \in [m(n,z); z-1]$. 2. Побудувати матричну модель степенів цілих додатних чисел.

3. Основні результати

Виділимо ті класи множин, для яких рівність (1) неможлива у цілих додатних числах. Для показників підкласу $P^{(4)}$ доведено Ферма.

Лема 2. Для всіх цілих додатних чисел (x,y,z) з простими числами $z \in N, z \geq 5$, і показниками $n \in P$ рівність $z^n = x^n + y^n$ неможлива.

Доведення. Допустимо, що існує трійка цілих додатних чисел (x,y,z) з простими $z \geq 5$ і показник $m \in N$, що виконується рівність $z^m = x^m + y^m, m \geq 3$. Тоді $z^m = x^m + y^m = (x+y)P_{m-1}(x,y)$, отже, $z^m \vdots (x+y)$. Оскільки $x \geq 2, y \geq 2$, то $(x+y,z) = d > 1$, але $z < x+y < 2(z-1)$, тому $(x+y,z) = 1, (x,y,z) \in D$. Отримане протиріччя доводить, що в класі $(x,y,z) \in D$, z просте число, не може існувати рівність $z^m = x^m + y^m$ для всіх показників $m \in P, m \geq 3$.

Лему доведено.

3. **Оцінка залишку біноміального ряду розкладу функції** $\varphi(q) = (1-q^n)^{\frac{1}{n}}, n \in N, n \geq 3, q = \frac{r}{p}, r < p,\ r,p \in N, (r,p) = 1$.

Оскільки біноміальний ряд розкладу функції $\varphi(q), 0 < q < 1$, збігається до $\varphi(q)$, то позначивши суму ряду символом α, матимемо [2]

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n}q^n - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)q^{2n} - \cdots - \frac{1}{k!}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(k-1-\frac{1}{n}\right)q^{kn} - \cdots = 1 - \frac{1}{n}q^n - \cdots - \frac{1}{k}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(k-1)n}\right)q^{kn} - \cdots \quad . \quad (4)$$

Нехай $S_k - k$-та частинна сума ряду (4):

$S_k = 1 - \frac{1}{n}q^n - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)q^{2n} - \cdots - \frac{1}{k}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(k-1)^n}\right)q^{kn}$. Оцінимо залишок ряду

$$|r_k| = |\alpha - S_k| = \left|\frac{1}{k+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{kn}\right)q^{(k+1)n} + \cdots\right| = \frac{1}{k+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{kn}\right)q^{(k+1)n} + \frac{1}{k+2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)n}\right)q^{(k+2)n} + \cdots < \frac{1}{k}\frac{1}{n}\left(q^{(k+1)n} + q^{(k+2)n} + \cdots\right) = \frac{1}{k}\frac{1}{n}\frac{q^{(k+1)n}}{1-q^n} = \frac{r^n}{n(p^n-r^n)}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn} = \sigma_k \quad . \qquad (5)$$

Оскільки $0 < q < 1, n \in N, n \geq 3$, то при $k \to \infty, \sigma_k \to 0$. З нерівності $|r_k| < \sigma_k$ випливає $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$.

4. **Ірраціональність α.**

Лема 3. Для всіх $n \in N, n \geq 3$, і додатних нескоротних раціональних дробів $0 < q = \frac{r}{p} < 1$, числа $\alpha = (1-q^n)^{\frac{1}{n}}$ є ірраціональними, де r, p – цілі додатні взаємно прості числа.

Доведення. Для доведення леми використаємо висновки теореми теорії чисел [1, с. 193]: якщо для будь якого додатного c можна знайти хоча б одну пару цілих чисел a і b таких, що

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{b}\,, \qquad (6)$$

то α ірраціональне.

Якщо раціональний дріб $S_k = \frac{a}{b}$, де a – деяке символьне ціле додатне число, $b = n(p^n - r^n)$, то з нерівності (5) випливатиме

$$|\alpha - S_k| = \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{r^n}{n(p^n-r^n)} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn}.$$

Виберемо k настільки великим, щоб для довільної додатної константи c виконувалась нерівність

$$\frac{r^n}{n(p^n-r^n)} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn} < \frac{c}{n(p^n-r^n)} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{n(p^n-r^n)}. \qquad (7_1)$$

В силу нерівності (6) робимо висновок, що α – число ірраціональне. Якщо $b \neq n(p^n - r^n)$, то додатний раціональний дріб S_k дозволяє перейти від пари чисел a, b до нової пари шляхом заміни $\frac{a}{b}$ на $\frac{a_1 s}{t}$. Тоді $S_k = \frac{a_1 s}{n(p^n-r^n)t}$, де a_1, s, t – цілі додатні взаємно прості числа. Для старої константи c матимемо $|\alpha - S_k| = \left|\alpha - \frac{a_1 s}{n(p^n-r^n)t}\right| < \sigma_k < \frac{ct}{n(p^n-r^n)t} = \frac{c_1}{n(p^n-r^n)t}$, де $c_1 = ct$. Щоб нерівність виконувалась для нової довільної константи c_1, необхідно стару константу зменшити у t разів. Для цього достатньо збільшити k: $\frac{r^n t}{n(p^n-r^n)t} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn} < \frac{c_1}{n(p^n-r^n)t}$. Отже для нової довільної додатної константи c_1 виконуватиметься нерівність

$$|\alpha - S_k| = \left|\alpha - \frac{a_2}{n(p^n-r^n)t}\right| < \frac{c_1}{n(p^n-r^n)t}\,, \qquad (7_2)$$

що означатиме – α число ірраціональне.

Таким чином, для довільних додатних констант c (або c_1) існують цілі додатні числа a і b, для яких виконуватиметься нерівність (6), що означає, що значеннями функції $\varphi(q), 0 < q < 1$, є ірраціональні числа для всіх $n \in N, n \geq 3$.

Лему доведено.

5. **Теорема про нерозв'язність рівняння $z^n = x^n + y^n, n \in N, n \geq 3$, у цілих додатних числах**.

Оскільки параметри $(x, y, n) \in K(z)$, то рівняння $z^n = x^n + y^n$ запишемо в еквівалентній формі $y = \sqrt[n]{z^n - x^n} = z\sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{z}\right)^n}, x < z$, де змінна x належить проміжку $[m(n,z); z-1], n \in [3; n_0(z)]$. Для показника $n = 2$ розв'язок (x, y, z) рівняння належить класу E.

Позначимо $\varphi(q) = (1 - q^n)^{\frac{1}{n}}, 0 < q < 1, n \in N, n \geq 3$, і використаємо лему 3, з якої, як наслідок, матимемо, що для всіх нескоротних раціональних дробів $q = \frac{x}{z}$, значеннями функції $\varphi(q)$ є ірраціональні числа. Тому значеннями функції $y = z \cdot \varphi(q), q = \frac{x}{z}$, будуть ірраціональні числа для всіх $z \in N, z \geq 5$, і параметрів x, n узгоджених з z. Таким чином, має місце теорема.

Теорема. Рівняння $z^n = x^n + y^n$ для всіх $z \in N, z \geq 5$, немає розв'язків у цілих додатних числах x, y, n узгоджених з z: $n \in [3; n_0(z)], 2 \leq x \leq z - 1, 2 \leq y \leq z - 1$.

Зауваження. Якщо опустити у формулюванні теореми «у цілих додатних числах x, y, n узгоджених з z», то необхідні умови існування розв'язків у цілих додатних числах – не виконуватимуться.

Як наслідок, з теореми випливає, що на кривих Ферма [5], заданих рівнянням $1 = x^n + y^n, n \in N, n \geq 3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, x, y - раціональні числа, існують лише дві раціональні точки $(0; 1), (1; 0)$.

6. **Лінійні (матричні) моделі для степенів a^n цілих додатних чисел a з довільними показниками $n \in N, n \geq 3$**.

Оскільки розв'язання рівнянь у цілих додатних числах не залежить від того, у якій системі числення будуть записані числа, то виберемо позиційну двійкову систему числення (з основою $q = 2_{10} = 10_2$). Тоді довільне ціле додатне число $a > 2$ запишемо однозначно, як многочлен $a = P^{(1)} = d_m 10^m + \cdots + d_1 10 + d_0$, де $d_i = 0 \vee 1, \forall i = 0,1, \ldots, m, m \in N, m \geq 2$, або як вектор-рядок $\vec{a} = [d_m, \ldots, d_1, d_0]$. Степенем a^2 є добуток $a \cdot a = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i P^{(1)} = P^{(2)}(\vec{a})$ (позначення: $P^{(2)}(\vec{a})$ – многочлен, що відповідає степеню a^2 числа $a \in N, a \geq 2$, двійковий код якого є вектор $\vec{a}$). Отже, якщо числу a у відповідність поставити вектор $\vec{a}$, то природно степеню a^2 у відповідність поставити таблицю (модель), складену з $(m+1)$-го вектора $\left[d_i 10^i d_m, \ldots, d_i 10^i d_1, d_i 10^i d_0\right], i = 0,1, \ldots, m$. Оскільки $d_i = 0 \vee 1$, то стандартною формою моделі a^2 є таблиця складена з нуль-векторів, якщо $d_i = 0$, та векторів $\vec{a}$, зміщених вліво на i позицій, якщо $d_i = 1, i = 0,1, \ldots, m$. Значення a^2 є значенням многочлена $P^{(2)}(\vec{a})$, якому у стандартній формі моделі однозначно відповідатиме значення суми, отримане порозрядним додаванням елементів у стовпцях таблиці за правилами позиційної двійкової системи числення. Оскільки при порозрядному додаванні значення суми не зміниться, якщо таблицю, записану в стандартній формі, доповнити нулями нижче правої піддіагоналі і вище лівої наддіагоналі, то матричною формою моделі a^2 буде прямокутна матриця $A^{(2)}[(m+1) \times (2m+1)]$.

У загальному, степенем a^n є многочлен $a^n = a \cdot a^{n-1} = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i P^{(n-1)}(\vec{a}) = P^{(n)}(\vec{a})$. Замінивши $P^{(n-1)}(\vec{a})$ на $A^{(n-1)}$, дістанемо матричну форму моделі степеня a^n, яку позначимо $A^{(n)}$. Елементами $A^{(n)}$ є матриці $A_{n,i} = d_i 10^i A^{(n-1)}, i = 0,1, \ldots, m$. Матричні елементи $A_{n,i}$ матриці $A^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} A_{n,i}$, рекурентно формуються для вектора $\vec{a} = [d_m, \ldots, d_1, d_0]$ за формулою:

$$A_{n,i} == d_i 10^i \sum_{j_1=0}^{m} d_{j_1} 10^{j_1} \sum_{j_2=0}^{m} d_{j_2} 10^{j_2} \ldots \sum_{j_{n-3}=0}^{m} d_{j_{n-3}} 10^{j_{n-3}} A^{(2)},$$
$$n \in N, n \geq 3, i = 0,1, \ldots, m. \quad (8)$$

Значення степеня a^n є значенням многочлена $P^{(n)}(\vec{a})$, яке отримується порозрядним додаванням елементів стовпців усіх матриць $A_{n,i}, n \in N, n \geq 3, i = 0,1, \ldots, m$.

Підставивши у формулу $A^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} A_{n,i}$ вираз (8), звівши подібні, дістанемо правило формування матриці $A^{(n)}$:

$$A^{(n)} = L_{P_n}(q)A^{(2)} , \tag{9}$$

де $L_{P_n}(q)$ – многочлен відносно двійкової основи $q = 10_2$ з коефіцієнтами 0 або 1. Многочлен $L_{P_n}(q)$ визначає послідовне зміщення вліво матриці $A^{(2)}$ на n_j позицій, де n_j – показники степенів основи $q = 10_2, p_n$ – порядок многочлена. Многочлен $L_{P_n}(q)$ обчислюється рекурентно $L_{P_n}(q) = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i L_{P_{n-1}}(q) , n \in N, L_{P_2} = 1, n \geq 3$, на основі формування матриці $A^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i A^{(n-1)}$ за правилами позиційної двійкової системи числення. Позначимо через $S(A^{(n)})$ значення многочлена $P^{(n)}(\vec{a})$, що є значенням степеня $a^n, a \in N, a \geq 2$, і визначається порозрядним додаванням елементів у стовпцях матриці $A^{(n)}$:

$$S(A^{(n)}) = L_{P_n}(q)S(A^{(2)}). \tag{10}$$

На основі формул (9), (10) побудуємо алгоритм обчислення степенів цілих додатних чисел.

Алгоритм обчислення степенів.

А1. Записати ціле додатне число a у двійково-позиційній системі як вектор $\vec{a} = (d_m, \dots, d_1, d_0)$.

А2. Обчислити вектор $\vec{a}^2$ – значення степеня a^2. Оскільки стандартною формою моделі степеня a^2 є таблиця (матриця) складена з нуль-векторів, якщо $d_i = 0$ і векторів $\vec{a}$, зміщених вліво на i позицій, якщо $d_i = 1$, то опустивши нульові вектор-рядки, отримаємо стиснуту форму матричної моделі a^2. Вектор $\vec{a}^2$ отримується порозрядним додаванням елементів вектор-стовпців матриці $A^{(2)}$ за правилами двійково-позиційної арифметики.

А3. Обчислити вектор $\vec{a}^3$ – значення степеня a^3. Застосуємо рекурентність формули $a^3 = a \cdot a^2$: присвоїти $\vec{b} \coloneqq \vec{a}^2$ і застосувати правило А2 – послідовно зміщуючи вліво вектор $\vec{b}$ на i позицій, якщо $d_i = 1$ (d_i – i-та координата (i-ий розряд) вектора $\vec{a}$). Результатом $\vec{a}^3$ порозрядне додавання елементів вектор-стовпців матриці $A^{(3)}$.

А4. Процес рекурентно повторити для всіх степенів a^n: присвоїти $\vec{b} \coloneqq \vec{a}^{(n-1)}$ і виконати правило 3.

Степінь a^n для довільного цілого додатного числа $a \geq 2$, точно реалізується на ЕОМ, оскільки єдиною операцією є порозрядне додавання елементів стовпців матриць $A^{(n)}$. [3]

7. Послідовність Ферма. На елементах x, y, z, що задовільняють умовам леми 1, визначимо функціональну послідовність

$$\xi_n = \frac{x^n + y^n}{z^n}, n \in N, n \geq 2, \xi_1 = \frac{x+y}{z} > 1. \tag{11}$$

Лема 4.Послідовність (11) строго монотонно спадає з ростом n .

Доведення. Для довільного $k \in N, k \geq 1$, маємо

$$\xi_k = \frac{x^k + y^k}{z^k} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x^{k+1} + y^k x}{z^k x} > \frac{x^{k+1} + y^{k+1}}{z^k x} > \frac{x^{k+1} + y^{k+1}}{z^{k+1}} = \xi_{k+1},$$

оскільки $y < x, z > x, x \geq 2$. Таким чином, для всіх $k \in N, k \geq 1, \xi_k > \xi_{k+1}$. Якщо існує $m \geq 2$ таке, що $\xi_m = 1$, то це означає, що виконується рівність $z^m = x^m + y^m$ для цілих додатних чисел x, y, z.

Лему доведено.

Висновки. Визначені необхідні умови, за яких рівняння $z^n = x^n + y^n$, $n \in N, n \geq 3$, може мати розв'язки у цілих додатних числах – параметри x, y, n повинні бути узгодженими з z і належати обмеженим замкненим множинам $K(z)$. Область задання рівняння розширимо: наприклад, z, x – цілі додатні числа, y – дійсна змінна, яка приймає ірраціональні значення для всіх $n \in N, n \geq 3$, – достатня умова нерозв'язності рівняння у цілих додатних числах.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бородін О. І. Теорія чисел: підручник. Київ: Вища школа, 1970. 370 с.
2. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Вища школа, 1992. 496 с.
3. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to ALGORITHMS. 3rd ed. Cambridge: The MIT Press, 2009. 1292 p.
4. Wiles, Andrew. Modular elliptic curves and Fermat`s last theorem. *Annals of Mathematics: journal*. 1995. Vol. 141, No. 3. P. 443-551.
5. Lang S. Fundamentals of Diophantine Geometry. New York: Springer-Verlag. 1983. 370 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1810-2
6. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В. Алгоритми розкладу цілих чисел і гладкого наближення функцій. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки.* 2022. Випуск 23. С. 6-13. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2022-23.5-13
7. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В. Двоїстий алгоритм пошуку простих чисел на відрізках великих розмірностей. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки*. 2024. Випуск 25. С. 6-19. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.6-19

UDC 519.612

Algorithm for investigating the unsolvability of the equation $z^n = x^n + y^n, n \geq 3$ in integers

Vasyl Abramchuk, Ihor Abramchuk

Abstract. The necessary conditions under which an equation can have a solution in positive integers are determined. The parameters of the equation x,y,n are consistent with z and belong to bounded closed sets. The exponents and variables are divided into classes. It is proved that in the space of mixed variables connected by an equation, where one of the variables is real and the others are integers, the value of the real variable is irrational, which is a sufficient condition for the unsolvability of the equation in positive integers for all exponents of powers greater than three. A matrix (linear) model of powers of positive integers is constructed.

Keywords: necessary conditions, classes of parameters, irrational numbers, Fermat's sequence, matrix model of powers.

References

1. Borodin, O. I. (1970). *Theory of numbers:* A Textbook, Higher School, Kyiv. [in Ukrainian]
2. Lyashko, I. I., Emelyanov, V. F., Boyarchuk, O. K. (1992). *Mathematical analysis. Part 1:* A Textbook, Higher School, Kyiv. [in Ukrainian]
3. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*, 3rd ed., The MIT Press, Cambridge.
4. Wiles, A. (1995). *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Annals of Mathematics: journal, **141** (3), 443–551.
5. Lang, S. (1983). *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1810-2.
6. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V. (2022). *Algorithm for the decomposition of integers and smooth approximation of functions*, Mathematical and computer modelling, Series: Phys.-Math. sciences, **23**, 6–13. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2022-23.5-13
7. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V. (2024). *Dual algorithm for finding prime numbers on segments of large dimensions*, Mathematical and computer modelling, Series: Phys.-Math. sciences, **25**, 6–19. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.6-19

Про авторів / About the authors

Василь Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Vasyl Abramchuk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Ігор Абрамчук, старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21000, Україна;

Ihor Abramchuk, senior lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske highway Str., Vinnytsia 21000, Ukraine.

Отримано / Received 26.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 9–23.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 9–23.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.5

Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору

Уляна Гудима[1], Василь Гнатюк[2]

[1] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, кафедра математики, м. Кам'янець-Подільський, Україна
ulag2107@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2291-6111

[2] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, кафедра математики, м. Кам'янець-Подільський, Україна
gnatuk@kpnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7782-3377

Анотація. В статті розглянуто задачу відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору. Встановлено умови екстремальності допустимого елемента для цієї задачі, основані на двоїстому поданні похідної за напрямком цільової функції еквівалентної задачі.

Ключові слова: полінормований простір, гаусдорфова відстань, узагальнений чебишовський центр, екстремальний елемент, умови екстремальності.

1. Вступ

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на X, $a_i \in X$, $i=\overline{1,m}$, $V \subset X$. У праці [1] для задачі відшукання величини

$$\beta_V^*(a_1,\ldots,a_m)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i-x\|_i \tag{1}$$

за умови, що V є опуклою множиною, отримано співвідношення двоїстості та доведено критерій екстремальності її допустимого елемента, оснований на цьому співвідношенні.

Якщо в задачі відшукання величини (1) замість точок a_i, $i=\overline{1,m}$, розглядати замкнені кулі лінійних нормованих просторів $(X,\|\cdot\|_i)$, $i=\overline{1,m}$, а в якості відстаней між

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-09

цими кулями та точками множини V використати гусдорфові відстані між ними, породжені відповідними нормами $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, то одержимо задачу відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль полінормованого простору $\left(X;\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини цього простору, яка розглядається в статті. Частковими випадками цієї задачі є, зокрема, задача відшукання величини (1), задача відшукання узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно множини цього простору, задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору (див., наприклад, [1, 2]).

Мета статті – встановлення умов екстремальності допустимого елемнта для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль полінормованого простору $\left(X;\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно опуклих та деяких інших множин простору X, оснований на двоїстому поданні похідної за напрямком цільової функції еквівалентної задачі.

2. Постановка задачі

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на X, і, отже, $\left(X;\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ є полінормованим простором; $B_{r_i}(a_i)=\left\{y\in X: \|y-a_i\|_i\le r_i\right\}$, $i=\overline{1,m}$, – замкнені кулі лінійних нормованих просторів $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$ з центрами в точках $a_i\in X$ та радіусами r_i; $V\subset X$; для $x\in X$ та $B_{r_i}(a_i)$ $H_i\left(\{x\},B_{r_i}(a_i)\right)$ – гаусдорфова відстань між множинами $\{x\}$ та $B_{r_i}(a_i)$ лінійного нормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$. Поставимо задачу відшукання величини

$$\gamma_V^*\left(B_{r_i}(a_i), i=\overline{1,m}\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m} H_i\left(\{x\},B_{r_i}(a_i)\right). \qquad (2)$$

Якщо існує елемент $x^*\in V$ такий, що

$$\max_{1\le i\le m} H_i\left(\{x^*\},B_{r_i}(a_i)\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m} H_i\left(\{x\},B_{r_i}(a_i)\right)=\gamma_V^*\left(B_{r_i}(a_i), i=\overline{1,m}\right),$$

то його будемо називати узагальненим чебишовським центром замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору або просто екстремальним елементом для величини (2).

З урахуванням зазначеного задачу відшукання величини (2) будемо називати задачею відшукання узагальненого чебишовського центра замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору.

3. Допоміжні поняття та твердження

В подальшому будемо використовувати наступні поняття та твердження.

Означення 1 (див., наприклад, [3, с. 2]). *Нехай* $\left(X,\|\cdot\|\right)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $M\subset X$, $x^*\in X$. *Вектор* $y\in X$ *називається внутрішнім напрямком для множини* M *з точки* x^*, *якщо існують окіл* $O(y)$ *точки* *у простору* $(X,\|\cdot\|)$ *та число* $\varepsilon>0$ *такі, що* $x^*+\alpha z\in M$ *для всіх* $\alpha\in(0,\varepsilon)$, $z\in O(y)$. *Множину всіх внутрішніх напрямків для множини* M *з точки* x^* *називають конусом внутрішніх напрямків для множини* M *з точки* x^* *та позначають через* $\Gamma(M,x^*)$.

Означення 2 (див., наприклад, [3, с. 3]). *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $M\subset X$, $x^*\in X$. *Вектор* $y\in X$ *називається граничним напрямком для множини* M *з точки* x^*, *якщо для будь-якого околу* $O(y)$ *точки* y *простору* $(X,\|\cdot\|)$ *та будь-якого числа* $\varepsilon>0$ *існують* $z\in O(y)$ *та* $\alpha\in(0,\varepsilon)$ *такі, що* $x^*+\alpha z\in M$. *Множину всіх граничних напрямків для множини* M *з точки* x^* *називають конусом граничних напрямків для множини* M *з точки* x^* *та позначають через* $\Gamma^*(M,x^*)$.

Означення 3 (див., наприклад, [4]). *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $M\subset X$, $x^*\in M$. *Кажуть, що множина* M *є* Γ^*-*множиною простору* $(X,\|\cdot\|)$ *відносно* x^*, *якщо для всіх* $x\in M$ $x-x^*\in\Gamma^*(M,x^*)$.

Означення 4 (див., наприклад, [5]). *Нехай* X *є лінійним над полем дійсних чисел простором,* $M\subset X$, $x^*\in M$. *Кажуть, що множина* M *є* Γ-*множиною простору* X *відносно* $x^*\in M$, *якщо для кожного* $x\in M$ *та будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує* $\alpha\in(0,\varepsilon)$ *таке, що* $x^*+\alpha(x-x^*)\in M$.

Твердження 1. *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $x\in X$, $B_r(x_0)=\{y\in X:\|y-x_0\|\le r\}$ – *замкнена куля простору* $(X,\|\cdot\|)$ *з центром в точці* x_0 *радіуса* r, $S_r(x_0)=\{y\in X:\|y-x_0\|=r\}$ – *сфера з центром в точці* x_0 *радіуса* r. *Має місце рівність*

$$H(\{x\},B_r(x_0))=\max_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|=\|x-x_0\|+r, \tag{3}$$

причому

$$\arg\max_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|=\begin{cases} y^*,\text{де } y^* \text{будь}-\text{яка точка } S_r(x_0),\text{якщо } x=x_0,\\ y^*=x_0+\dfrac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0),\text{якщо } x\ne x_0,\end{cases} \tag{4}$$

а $H(\{x\},B_r(x_0))$ – *гаусдорфова відстань між* $\{x\}$ *та* $B_r(x_0)$.

Доведення. Маємо (див., наприклад, [6, с. 38]), що

$$H(\{x\},B_r(x_0))=\max\left\{\sup_{x\in\{x\}}\inf_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|,\ \sup_{y\in B_r(x_0)}\inf_{x\in\{x\}}\|x-y\|\right\}. \tag{5}$$

Оскільки множина $\{x\}$ є одноелементною, то згідно з (5)

$$H(\{x\},B_r(x_0))=\max\left\{\inf_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|,\ \sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\right\}=\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|. \tag{6}$$

Для всіх $y\in B_r(x_0)$ маємо, що

$$\|x-y\|=\|(x-x_0)+(x_0-y)\|\le\|x-x_0\|+\|x_0-y\|\le\|x-x_0\|+r.$$

Тому

$$\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\le\|x-x_0\|+r. \tag{7}$$

Якщо $x=x_0$ і $y^*\in S_r(x_0)$, то з урахуванням (7) одержимо, що

$$\|x-y^*\|=\|x_0-y^*\|=r=\|x-x_0\|+r\le\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\le\|x-x_0\|+r.$$

Звідси та з (6) випливає, що при $x=x_0$ співвідношення (3), (4) мають місце.

Нехай тепер $x\ne x_0$. Оскільки $\left\|x_0+\frac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0)-x_0\right\|=\frac{r}{\|x-x_0\|}\|x-x_0\|=r$, то $y^*=x_0+\frac{r}{\|x-x_0\|}(x_0-x)\in S_r(x_0)\subset B_r(x_0)$. Для цієї точки y^* маємо, що

$$\|x-y^*\|=\left\|x-x_0+\frac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0)\right\|=\|x-x_0\|\left(1+\frac{r}{\|x-x_0\|}\right)=\|x-x_0\|+r.$$

З урахуванням цього та (7) одержимо, що

$$\|x-y^*\|=\|x-x_0\|+r\le\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\le\|x-x_0\|+r.$$

Звідси та з (6) випливає, що при $x\ne x_0$ співвідношення (3), (4) також мають місце.

Твердження доведено.

Також легко переконатися у справедливості наступних тверджень.

Твердження 2. *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *– лінійний над полем дійсних чисел нормований простір,* $M\subset X$, $x^*\in M$. *Для того щоб вектор* y *належав* $\Gamma^*(M,x^*)$, *необхідно і достатньо, щоб існували послідовності* $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, *де* $x^k\in M$, $k=1,2,...$; $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, *де* $\alpha_k\in R$, $\alpha_k>0$, $k=1,2,...$, *і* $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$, *такі, що* $\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k-x^*}{\alpha_k}-y\right\|=0$, *тобто, щоб* $\frac{x^k-x^*}{\alpha_k}\to y$ *при* $k\to\infty$ *у розумінні норми* $\|\cdot\|$.

Твердження 3. Нехай $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Кожна* Γ*- множина* M *простору* X *відносно* $x^*\in M$ *є* Γ^**- множиною простору* $(X,\|\cdot\|)$ *відносно* x^*. *Якщо множина* M *є зірковою множиною лінійного над полем дійсних чисел простору* X *відносно точки* $x^*\in M$, *то* M *є* Γ*- множиною простору* X *відносно* x^* *і, отже,* Γ^**- множиною лінійного нормованого простору* $(X,\|\cdot\|)$ *відносно* x^*.

Кожна опукла множина M *лінійного над полем дійсних чисел простору* X *є зірковою множиною простору* X *відносно кожного свого елемента* x^* *і, отже,* Γ*- множиною простору* X *та* Γ^**- множиною лінійного нормованого простору* $(X,\|\cdot\|)$ *відносно* x^*.

Твердження 4. *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним нормованим простором,* $X^*=(X,\|\cdot\|)^*$ *– простір, спряжений з* $(X,\|\cdot\|)$; $B_{X^*}=\{f\in X^*:\|f\|_{X^*}\le1\}$, $x^*\in X$; $p(x)=\|x-a\|$, $x\in X$; $\partial p(x^*)$ *– субдиференціал функції* $p(x)$, $x\in X$, *в точці* x^* *(див., наприклад, [7,с.74]).*

Тоді p є опуклою ліпшицевою і, отже, неперервною на $\left(X,\|\cdot\|\right)$ *функцією та має місце рівність*

$$\partial p\left(x^*\right)=B_{X^*}\left(x^*-a\right),$$

де $B_{X^*}\left(x^*-a\right)=\left\{f\in B_{X^*}:\left\|x^*-a\right\|=\max\limits_{f\in B_{X^*}}f\left(x^*-a\right)=f\left(x^*-a\right)\right\}$.

4. Задачі, еквівалентні задачі відшукання величини (2)

Теорема 1. *Має місце рівність*

$$\gamma_V^*\left(B_{r_i}\left(a_i\right),i=\overline{1,m}\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right). \tag{8}$$

Для того щоб елемент x^* *був екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо, щоб цей елемент був екстремальним елементом (оптимальним розв'язком) задачі відшукання величини*

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right). \tag{9}$$

Доведення. Відповідно до твердження 1 для $x\in X$ та $B_{r_i}\left(a_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, одержуємо, що

$$H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\left\|x-a_i\right\|_i+r_i. \tag{10}$$

Звідси випливає справедливість рівність (8). Припустимо, що x^* є екстремальним елементом для величини (2). Тоді $x^*\in V$ та внаслідок (8), (10)

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\max_{1\le i\le m}H_i\left(\left\{x^*\right\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=$$
$$=\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right).$$

Це й означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (9).

Нехай тепер x^* є екстремальним елементом для величини (9). Тоді $x^*\in V$ та внаслідок (8), (10)

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right)=\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=$$
$$=\max_{1\le i\le m}H_i\left(\left\{x^*\right\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\gamma_V^*\left(B_{r_i}\left(a_i\right),i=\overline{1,m}\right).$$

Це означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

В m-арному декартовому (прямому) добутку $X^m=\{\left(x_1,...,x_m\right):x_i\in X,i=\overline{1,m}\}$ лінійного над полем дійсних чисел простору X покладемо для $x=\left(x_1,...,x_m\right)$, $y=\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$, $\alpha\in R$: $x+y=\left(x_1+y_1,...,x_m+y_m\right)$, $\alpha x=\left(\alpha x_1,...,\alpha x_m\right)$.

Легко переконатися, що декартів добуток X^m з означеними вище операціями додавання його елементів і множення їх на дійсні числа є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Справедливе таке твердження.

Твердження 5 (див., наприклад, [1]). *Якщо для кожного* $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$ *покласти* $\left\|\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\left\|x_i\right\|_i$, *то* $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ *буде лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Для того щоб елемент* φ *належав простору*

$\left(X^m\right)^* = \left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)^*$, *спряженому з* $X^m = \left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб існували однозначно визначені функціонали* $f_i \in X_i^* = \left(X, \|\cdot\|_i\right)^*$, *де* $X_i^* = \left(X, \|\cdot\|_i\right)^*$ *– простір, спряжений з лінійними нормованим простором* $X_i = \left(X, \|\cdot\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$, *такі, що* $\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(x_i\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, *причому справедлива рівність*

$$\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*} = \sup_{\substack{\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m, \\ \left(x_1,...,x_m\right)\neq 0}} \frac{\left|\varphi\left(x_1,...,x_m\right)\right|}{\left\|\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}} = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{X_i^*}, \tag{11}$$

де $\|f_i\|_{X_i^*} = \sup\limits_{\substack{x\in X, \\ x\neq 0}} \dfrac{\left|f_i\left(x\right)\right|}{\|x\|_i}$, $i = \overline{1,m}.$

Позначимо через $\Phi\left(x_1,...,x_m\right) = \max\limits_{1\le i\le m}\left(\|x_i - a_i\|_i + r_i\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $D = \left\{\left(x,...,x\right) : x \in V\right\}$ та розглянемо задачу відшукання величини

$$\inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \Phi\left(x_1,...,x_m\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \max_{1\le i\le m}\left(\|x_i - a_i\|_i + r_i\right). \tag{12}$$

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$\inf_{x\in V} \max_{1\le i\le m}\left(\|x - a_i\|_i + r_i\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \Phi\left(x_1,...,x_m\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \max_{1\le i\le m}\left(\|x_i - a_i\|_i + r_i\right).$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо, щоб елемент* $\left(x^*,...,x^*\right)$ *був екстремальним елементом для величини (12).*

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

Зауважимо, що згідно з теоремами 1, 2 задачу відшукання величини (2) можна вважати еквівалентною задачам відшукання величин (9), (12).

5. Двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (12)

Нехай $\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) = \|x_i - a_i\|_i + r_i$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $i = \overline{1,m}$; $p_i\left(x\right) = \|x - a_i\|_i$, $x \in X$, $i = \overline{1,m}$; $B_{X_i^*}^* = \left\{f \in X_i^* : \|f\|_{X_i^*} \le 1\right\}$, $i = \overline{1,m}$; для $x^* \in X$

$$B_{X_i^*}\left(x^* - a_i\right) = \left\{f \in B_{X_i^*} : \|x^* - a_i\|_i = \max_{f\in B_{X_i^*}} f\left(x^* - a_i\right) = f\left(x^* - a_i\right)\right\},\ i = \overline{1,m}.$$

Твердження 6. *Функції* $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $i = \overline{1,m}$, *є опуклими на* X^m *та неперервними на лінійному нормованому просторі* $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$.

Справедливість цього твердження випливає з критерію опуклості власної функції (див., наприклад, [7,с.56]) та властивостей норми.

Твердження 7. *Нехай* $i \in \{1,...,m\}$, $\left(x_1^*,...,x_m^*\right) \in X^m$. *Справедлива рівність*

$$\partial\Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\}. \tag{13}$$

Доведення. Нехай для $i \in \{1,...,m\}$ $\varphi \in \partial \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right)$. Тоді для всіх $\left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m$

$$\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) - \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left\|x_i - a_i\right\|_i + r_i - \left(\left\|x_i^* - a_i\right\|_i + r_i\right) =$$

$$= \left\|x_i - a_i\right\|_i - \left\|x_i^* - a_i\right\|_i \ge \varphi\left(\left(x_1,...,x_m\right) - \left(x_1^*,...,x_m^*\right)\right) = \varphi\left(x_1 - x_1^*,...,x_m - x_m^*\right). \quad (14)$$

Згідно з твердженням 5 існують однозначно визначені функціонали f_j^φ із X_j^*, $j = \overline{1,m}$, такі, що

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = \sum_{j=1}^m f_j^\varphi\left(x_j\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m. \quad (15)$$

З урахуванням (14) та (15) одержимо, що

$$\left\|x_i - a_i\right\|_i - \left\|x_i^* - a_i\right\|_i \ge f_i^\varphi\left(x_i - x_i^*\right) + \sum_{j \in I\setminus\{i\}}^m f_j^\varphi\left(x_j - x_j^*\right),\quad \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m, \quad (16)$$

де $I = \{1,...,m\}$.

Переконаємося, що $f_j^\varphi = 0$, $j \in I \setminus \{i\}$. Припустимо, що $f_{j_0}^\varphi \ne 0$ для деякого $j_0 \in I \setminus \{i\}$. Тоді існує елемент $x_0 \in X$, для якого $f_{j_0}^\varphi\left(x_0\right) > 0$. З (16) при $x_i = x_i^*$, $x_{j_0} = x_{j_0}^* + x_0$, $x_j = x_j^*$, $j \in I \setminus \{i, j_0\}$, одержимо, що $0 \ge f_{j_0}^\varphi\left(x_0\right) > 0$. Одержана суперечність доводить, що $f_j^\varphi = 0$, $j \in I \setminus \{i\}$. Внаслідок цього та співвідношень (11), (15), (16) одержимо, що

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f_i^\varphi\left(x_i\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m\ ,\ \|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*} = \left\|f^\varphi{}_i\right\|_{X_i^*}, \quad (17)$$

$$p_i\left(x_i\right) - p_i\left(x_i^*\right) \ge f_i^\varphi\left(x_i - x_i^*\right) \text{ для всіх } x_i \in X. \quad (18)$$

Зі співвідношень (17), (18) випливає, що

$$\varphi \in \left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\}.$$

Тому

$$\partial \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) \subset \left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\}. \quad (19)$$

Нехай тепер $i \in \{1,...,m\}$ та $f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)$. Згідно з твердженням 5 функціонал

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = 0\left(x_1\right) + ... + 0\left(x_{i-1}\right) + f\left(x_i\right) + 0\left(x_{i+1}\right) + ... + 0\left(x_m\right) = f(x_i),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m,$$

належить $\left(X^m\right)^*$. Для цього функціонала маємо, що

$$\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) - \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left\|x_i - a_i\right\|_i + r_i - \left(\left\|x_i^* - a_i\right\|_i + r_i\right) = \left\|x_i - a_i\right\|_i -$$

$$- \left\|x_i^* - a_i\right\|_i = p_i\left(x_i\right) - p_i\left(x_i^*\right) \ge f\left(x_i - x_i^*\right) = \varphi\left(x_1 - x_1^*,...,x_m - x_m^*\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m.$$

Звідси випливає, що $\varphi \in \partial \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right)$. Тому

$$\left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\} \subset \partial \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right). \quad (20)$$

Зі співвідношень (19), (20) випливає справедливість рівності (13).

Твердження доведено.

Теорема 3. *Для будь-яких* $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$, $\left(y_1,...,y_m\right) \in X^m$ *має місце рівність*

$$\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in\partial p_i\left(x^*\right)} f\left(y_i\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right), \qquad (21)$$

де $\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)$ *– похідна за напрямком* $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ *функції* $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, *в точці* $\left(x^*,...,x^*\right)$,

$$I\left(x^*\right)=I\left(x^*,...,x^*\right)=\left\{i\in\{1,..,m\}:\Phi\left(x^*,...,x^*\right)=\max_{1\le i\le m}\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)=\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)\right\}=$$

$$=\left\{i\in\{1,..,m\}:\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x_i^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x_i^*-a_i\right\|_i+r_i\right\}.$$

Доведення. Згідно з введеними вище позначеннями має місце рівність

$$\Phi\left(x_1,...,x_m\right)=\max_{1\le i\le m}\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right),\ \left(x_1,...,x_m\right)\in X^m. \qquad (22)$$

Згідно з твердженням 6 функції $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, $\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right)=\left\|x_i-a_i\right\|_i+r_i$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, $i=\overline{1,m}$, є опуклими та неперервними на лінійному нормованому просторі $X^m=\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$. Тому існують їх скінченні похідні в будь-якій точці $\left(x_1^*,...,x_m^*\right)\in X^m$ за будь-яким напрямком $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ (див., наприклад, [3,с.354]). З урахуванням цього, співвідношень (22) та теореми 1 [6] для $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$, $y=\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ одержимо, що

$$\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\Phi_i'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right). \qquad (23)$$

Відомо (див., наприклад, теорему 6.4.8 [3, с.354]), що для $i=\overline{1,m}$

$$\Phi_i'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{\varphi\in\partial\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)}\varphi\left(y_1,...,y_m\right). \qquad (24)$$

Згідно з твердженням 7 для $i\in\{1,...,m\}$

$$\max_{\varphi\in\partial\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)}\varphi\left(y_1,...,y_m\right)=\max_{f\in\partial p_i\left(x^*\right)} f\left(y_i\right), \qquad (25)$$

де $p_i\left(x\right)=\left\|x-a_i\right\|_i$, $x\in X$.

Зі співвідношень (23)-(25) випливає, що для всіх $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$, $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$

$$\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in\partial p_i\left(x^*\right)} f_i\left(y_i\right). \qquad (26)$$

Згідно з твердженням 4 для $i\in\{1,...,m\}$ $\partial p_i\left(x^*\right)=B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)$.Внаслідок цього та (26) отримуємо, що для будь-якого $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$, $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ має місце рівність (21).

Теорему доведено.

6. Двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (12)

Нехай $x^*\in V$ і, отже, $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$. Позначимо через $Q\left(x^*,...,x^*\right)$ таку лебегову множину цільової функції $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)=\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x_i-a_i\right\|_i+r_i\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, задачі відшукання величини (12): $Q\left(x^*,...,x^*\right)=\left\{\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m:\Phi\left(x_1,...,x_m\right)<\Phi\left(x^*,...,x^*\right)\right\}$.

Будемо позначати через $\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ – конус внутрішніх напрямків для множини $Q\left(x^*,...,x^*\right)$ з точки $\left(x^*,...,x^*\right)$ простору $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. означення 1).

Теорема 4. *Нехай $x^* \in V$ і, отже, $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$. Позначимо через*

$$I\left(x^*\right) = I\left(x^*,...,x^*\right) = \left\{ i \in \{1,...,m\} : \Phi\left(x^*,...,x^*\right) = \max_{1\le i\le m} \Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) = \right.$$

$$\left. = \max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^* - a_i\right\|_i + r_i\right) = \left\|x^* - a_i\right\|_i + r_i \right\}.$$

Має місце рівність

$$\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) = \left\{ \left(y_1,...,y_m\right) \in X^m : \max_{i\in I\left(x^*\right)} \max_{f\in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) < 0 \right\}. \qquad (27)$$

Доведення. Згідно з твердженням 6 функція $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, є опуклою та неперервною на $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$. Відповідно до твердження 6.9.1 [3, с.383]

$$\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) = \left\{ \left(y_1,...,y_m\right) \in X^m : \varphi\left(y_1,...,y_m\right) < 0,\ \varphi \in \partial\Phi\left(x^*,...,x^*\right) \right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) = \left\{ \left(y_1,...,y_m\right) \in X^m : \max_{\varphi\in\partial\Phi\left(x^*,...,x^*\right)} \varphi\left(y_1,...,y_m\right) < 0 \right\}. \qquad (28)$$

Оскільки $\max\limits_{\varphi\in\partial\Phi\left(x^*,...,x^*\right)} \varphi\left(y_1,...,y_m\right) = \Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right) = \max\limits_{i\in I\left(x^*\right)} \max\limits_{f\in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right)$ (див. теорему 6.4.8 [3, с.354] та теорему 3), то звідси і з (28) отримаємо рівність (27).

Теорему доведено.

7. Основні результати

Нехай $x^* \in V$. В подальшому будемо використовувати конус $\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ граничних напрямків для множини D з точки $\left(x^*,...,x^*\right)$ простору $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. означення 2).

Теорема 5 (*необхідна умова екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукання (2)*). *Нехай $x^* \in V$ і, отже, $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$. Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом (узагальненим чебишовським центром) для задачі відшукання величини (2), необхідно, щоб для кожного $y = \left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ існували індекс $i_y \in \{1,...,m\}$, функціонал $f^y \in B_{X_{i_y}^*}$, такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^* - a_i\right\|_i + r_i\right) = \left\|x^* - a_{i_y}\right\|_{i_y} + r_{i_y} = \max_{f\in B_{X_{i_y}^*}} f\left(x^* - a_{i_y}\right) + r_{i_y} = f^y\left(x^* - a_{i_y}\right) + r_{i_y}, \qquad (29)$$

$$f^y\left(y_{i_y}\right) \ge 0. \qquad (30)$$

Доведення. Нехай, як і вище,

$$Q\left(x^*,...,x^*\right) = \left\{ \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m : \Phi\left(x_1,...,x_m\right) < \Phi\left(x^*,...,x^*\right) \right\}.$$

Припустимо, що $Q\left(x^*,...,x^*\right) \ne \varnothing$. Оскільки функція $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, є опуклою та неперервною на лінійному нормованому просторі

$\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. твердження 6), то відповідно до теореми 1.3.4 [3, с.10] можна зробити висновок, що $\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) \neq \varnothing$. За умовою x^* є екстремальним елементом для величини (2). Тому $\left(x^*,...,x^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (12) (див. теорему 2). Згідно з теоремою 1.4.1 [3, с.13] тоді $\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) \cap \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right) = \varnothing$.

Звідси випливає, що для кожного $\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ має місце співвідношення $\left(y_1,...,y_m\right) \notin \Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)$. З урахуванням цього та теореми 4 робимо висновок, що для кожного $\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ $\max\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \max\limits_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) \geq 0.$ Тому існує $i_y \in I\left(x^*\right)$ та функціонал $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ такі, для яких $\max\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \max\limits_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) = f^y\left(y_{i_y}\right) \geq 0$. Зі співвідношень $i_y \in I\left(x^*\right)$ та $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ випливає, що $i_y \in \{1,...,m\}$, $f^y \in B_{X_{i_y}^*}$ та має місце рівність (29). Співвідношення (29), (30) встановлено. Отже у випадку, коли $Q\left(x^*,...,x^*\right) \neq \varnothing$, теорему доведено.

Переконаємося у справедливості цієї теореми у випадку, коли $Q\left(x^*,...,x^*\right) = \varnothing$. В цьому випадку для кожного $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$ $\Phi\left(x_1,...,x_m\right) \geq \Phi\left(x^*,...,x^*\right)$. Звідси випливає, що

$$\lim_{\substack{t \to 0,\\ t>0}} \frac{\Phi\left(\left(x^*,...,x^*\right)+t\left(y_1,...,y_m\right)\right)-\Phi\left(x^*,...,x^*\right)}{t} = \Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right) \geq 0. \quad (31)$$

З урахуванням нерівності (31) та теореми 3 робимо висновок, що для всіх $y=\left(y_1,...,y_m\right) \in X^m$, в тому числі і для $y=\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ має місце нерівність

$$\max_{i \in I\left(x^*\right)} \max_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) \geq 0. \quad (32)$$

Нехай $y=\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$, $i_y \in I\left(x^*\right)$ та $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ такі, що

$$\max_{i \in I\left(x^*\right)} \max_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) = \max_{f \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)} f\left(y_{i_y}\right) = f^y\left(y_{i_y}\right). \quad (33)$$

Зі співвідношень $i_y \in I\left(x^*\right)$ та $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ випливає, що $i_y \in \{1,...,m\}$, $f^y \in B_{X_{i_y}^*}$ та має місце рівність (29), а з (32) та (33) одержуємо нерівність (30).

Справедливість теореми встановлено і у випадку, коли $Q\left(x^*,...,x^*\right) = \varnothing$.

Теорему доведено.

Теорема 6 (*достатня умова екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукання величини (2)*). *Нехай в задачі відшукання величини (2) $x^* \in V$. Якщо для будь-якого $x \in V$ існують індекс $i_x \in \{1,...,m\}$, функціонал $f^x \in B_{X_{i_x}^*}$ такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x^*-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}=\max_{f\in B_{X^*_{i_x}}}f\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}=f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}, \qquad (34)$$

$$f^x\left(x-x^*\right)\ge 0, \qquad (35)$$

то x^* *є екстремальним елементом для величини (2).*

Доведення. Нехай $x\in V$, індекси $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, що мають місце співвідношення (34), (35). З урахуванням цих співвідношень одержимо, що

$$0\le f^x\left(x-x^*\right)=f^x\left(x-a_{i_x}\right)-f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)=\left(f^x\left(x-a_{i_x}\right)+r_{i_x}\right)-\left(f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}\right)=$$

$$=f^x\left(x-a_{i_x}\right)+r_{i_x}-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le\left\|f^x\right\|_{X^*_{i_x}}\left\|x-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le$$

$$\le\left\|x-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right)-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right).$$

Звідси випливає, що $\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right)$, $x\in V$. Отже, x^* є екстремальним елементом для величини (9). Згідно з теоремою 1 $x^*\in V$ є екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

Теорема 7 *(критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величин (2)). Нехай в задачі відшукання величини (2)* $x^*\in V$ *та* D *є* Γ^**-множиною відносно* $\left(x^*,...,x^*\right)$, *тобто* $\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)=\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ *для всіх* $\left(x,...,x\right)\in D$ *і, отже, для всіх* $x\in V$ *(див. означення 3). Для того щоб елемент* x^* *був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $x\in V$ *існували індекс* $i_x\in\{1,...,m\}$, *функціонал* $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ *такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x^*-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}=\max_{f\in B_{X^*_{i_x}}}f\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}=f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}, \qquad (36)$$

$$f^x\left(x-x^*\right)\ge 0. \qquad (37)$$

Доведення. Необхідність. Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (2) і D є Γ^*-множиною відносно $\left(x^*,...,x^*\right)$, тобто

$$\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)=\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right).$$

Згідно з теоремою 5 для $\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ існують індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються співвідношення (36), (37).

Необхідність доведено.

Справедливість достатності випливає з теореми 6.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай в задачі відшукання величини (2) норми* $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, *задані на* X, *є попарно еквівалентними,* $x^*\in V$ *і* V *є* Γ^**-множиною відносно* x^* *в деякому лінійному нормованому просторі* $\left(X,\|\cdot\|_{i_0}\right)$, *де* $i_0\in\{1,...,m\}$. *Тоді* V *є* Γ^**-множиною відносно* x^* *в усіх лінійних нормованих просторах* $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$. *Для того щоб елемент* x^* *був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і* *достатньо, щоб для будь-якого* $x \in V$ *існували індекс* $i_x \in \{1,...,m\}$, *функціонал* $f^x \in B_{X^*_{i_x}}$ *такі, для яких виконуються умови (36), (37) теореми 7.*

Доведення. Нехай V є Γ^*-множиною відносно x^* в деякому лінійному нормованому просторі $\left(X, \|\cdot\|_{i_0}\right)$. Тоді для всіх $x \in V$ $x - x^* \in \Gamma_{i_0}{}^*\left(V, x^*\right)$, де $\Gamma_{i_0}{}^*\left(V, x^*\right)$ – конус граничних напрямків для множини V лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_{i_0}\right)$. Згідно з твердженням 2 існують послідовності $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $x^k \in V$, $k = 1,2,...$; $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in R$, $\alpha_k > 0,\ k = 1,2,...,\ \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, такі, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_{i_0} = 0. \tag{38}$$

Нехай $i \in \{1,...,m\} \setminus \{i_0\}$. Оскільки норми $\|\cdot\|_i$ та $\|\cdot\|_{i_0}$ за умовою є еквівалентними, то існує число $c_{ii_0} > 0$, для якого $\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i \le c_{ii_0}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_{i_0}$.

З урахуванням (38) з цієї нерівності одержуємо, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i = 0,\ i \in \{1,...,m\} \setminus \{i_0\}. \tag{39}$$

Згідно з твердженням 2 тоді $x - x^*$ належить конусу $\Gamma_i^*\left(V, x^*\right)$ граничних напрямків для множини V лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_i\right)$ для всіх $x \in V$. Це означає, що V є Γ^*-множиною відносно x^* кожного лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_i\right), i = \overline{1,m}$.

Переконаємося далі, що множина D є Γ^*-множиною відносно $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$. Для цього доведемо, що $(x,...,x) - \left(x^*,...,x^*\right) = \left(x - x^*,...,x - x^*\right) \in \Gamma^*\left(D, \left(x^*,...,x^*\right)\right)$ для всіх $(x,...,x) \in D$ і, отже, для всіх $x \in V$. Вище встановлено, що за умов наслідку для кожного $x \in V$ існують послідовності $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $x^k \in V$, $k = 1,2,...$; $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in R$, $\alpha_k > 0,\ k = 1,2,...,\ \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, такі, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i = 0 \text{ для всіх } i \in \{1,...,m\} \tag{40}$$

(див (38), (39)). Зі співвідношення (40) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k_0 \in N$, що для всіх $k > k_0$ $\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i < \varepsilon$, $i = \overline{1,m}$. Звідси випливає, що для всіх $k > k_0$

$$\left\|\frac{\left(x^k,...,x^k\right) - \left(x^*,...,x^*\right)}{\alpha_k} - \left((x,...,x) - \left(x^*,...,x^*\right)\right)\right\|_{X^m} = \max_{1\le i\le m}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i < \varepsilon.$$

Тому $\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{\left(x^k,...,x^k\right)-\left(x^*,...,x^*\right)}{\alpha_k}-\left(\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)\right)\right\|_{X^m}=0$. Згідно з твердженням 2 $\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)=\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ для всіх $\left(x,...,x\right)\in D$. Це означає, що D є Γ^*-множиною простору $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ відносно $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$. Згідно з теоремою 7 для екстремальності елемента $x^*\in V$ для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються умови (36), (37).

Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Нехай в задачі відшукання величини (2) $x^*\in V$ і V є Γ-множиною лінійного над полем дійсних чисел простору X відносно x^* (зірковою відносно x^*, опуклою множиною). Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються умови (36), (37) теореми 7.*

Справедливість наслідку 2 випливає з твердження 3 та теореми 7.

Наслідок 3. *Нехай в задачі відшукання величини (2) V є підпростором простору X. Для того щоб елемент $x^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються умови (36), (37) теореми 7.*

Справедливість наслідку 3 випливає з наслідку 2, оскільки підпростір V є опуклою множиною.

Висновки. В статті для задачі (2) відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента цієї задачі, основані на двоїстому поданні похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (12), еквівалентної до (2), доведено низку допоміжних тверджень, окремі з яких представляють самостійний інтерес.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого полінормованого простору відносно множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. Вип.25. С. 52–69. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.52-69
2. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб.

наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 17. С. 33–48. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2018-17.33-48

3. Laurent P.-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Paris: Herman, 1972. 531 p.
4. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень. Укр. мат. журн., 2005. Т. 57. № 12. С. 1601–1618.
5. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2005. №6. С.19–23.
6. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності заданої неточно з допомогою багатозначного відображення. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип.12. С.37–55. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2015-12.37-55
7. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Опуклий аналіз : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112 с.

UDC 517.5

Extremality conditions for an admissible element in the problem of finding a generalized Chebyshev center of several closed balls in a polynormed space with respect to a subset of this space

Uliana Hudyma, Vasyl Gnatyuk

Abstract. The paper considers the problem of finding a generalized Chebyshev center of several closed balls in a certain polynormed space with respect to a subset of this space. Extremality conditions for an admissible element of this problem are established, based on the dual representation of the directional derivative of the objective function of an equivalent problem.

Keywords: polynormed space, Hausdorff distance, generalized Chebyshev center, extremal element, extremality conditions.

References

1. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2024). *The existence conditions of the extremality of the admissible element for the problem of finding the generalized Chebyshov's center of several points of some polynormated space relative to the set of this space*, Mathematical and computer modelling, Series: Physical and mathematical sciences, **25**, 52–69. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.52-69
2. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2018). *The criterias at the sense of the weighted distances of the generalized center of chebyshev of several points of a linear normed space relatively to the convex set of this space*, Mathematical and computer modelling, Series: Physical and mathematical sciences, **17**, 33–48. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2018-17.33-48
3. Laurent, P.-J. (1972). Approximation and Optimization. Scientific and Medical University of Grenoble, Hermann, Paris.
4. Hudyma, U. (2005). *Best uniform approximation of a continuous compact-valued mapping by sets of continuous single-valued mappings*, Ukrainian Mathematical Journal, **57** (12), 1601–1618. [in Ukrainian]
5. Gnatyuk, U., Hudyma, U. (2025). *Criteria for an extremal element and its uniqueness in the problem of best uniform approximation of a continuous set-valued mapping by sets of single-valued mappings*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 6, 19–23. [in Ukrainian]
6. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2015). *The problem of the best in the sense of weighted distance approximation from a point to a set of uniform reconstruction of a functional dependence given inaccurately via a multivalued mapping*, Mathematical and computer modelling, Series: Physical and mathematical sciences, **12**, 37–55. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2015-12.37-55
7. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2019). *Convex Analysis*: tutorial, Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University, Kamianets-Podilsky. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Уляна Гудима, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300, Україна;

Uliana Hudyma, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, 61 Ohiienko Str., Kamianets-Podilskyi, 32300, Ukraine;

Василь Гнатюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, *вул.* Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300, Україна;

Vasyl Gnatyuk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, 61 Ohiienko Str., Kamianets-Podilskyi, 32300, Ukraine.

Отримано / Received 29.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 24–36.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 24–36.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.925.4

Дослідження розв’язків зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу

Мар’яна Ковтонюк[1], Олена Соя[2]

[1] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukmm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7444-1234

[2] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

Анотація. Побудовано формальний розв’язок зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній у резонансному і нерезонансному випадках, досліджено його асимптотичний характер через використання методу «укорочення» зчисленної системи диференціальних рівнянь.

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній має розв’язок; побудувати формальний розв’язок та довести його асимптотичний характер.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь, малий параметр, формальний розв’язок, асимптотичний характер розв’язку, метод укорочення.

-

1. Вступ

Систематичне вивчення диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами починається в 50-70-х роках XX століття у працях багатьох українських та зарубіжних учених, зокрема С. Фещенка, М. Шкіля [9] та їхніх учнів. Асимптотику за параметром при розв’язуванні диференціальних рівнянь використовували І. Конет, Т. Мейлієв [7], С. Кондакова [6], Л. Ніколенко, М. Рашевський [8], М. Сотніченко, В. Яковець та М. Стрельніков [10], інші учені-математики.

Зчисленні системи диференціальних рівнянь досліджували К. Валєєв [1], О. Жаутиков [2], М. Ковтонюк [3-5], К. Персидський, інші учені-математики.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-16

2. Постановка проблеми

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Розглянемо в нескінченому просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей однорідну систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\varepsilon^{\frac{p}{q}} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A(\tau, \varepsilon)x = 0, \tag{1}$$

де $x(\tau,\varepsilon)$ – шуканий нескінченний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – дійсна нескінченна матриця, елементами якої є дійсні функції дійсної змінної, $\tau \in [0, L]$, ε – малий дійсний параметр $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$, p і q – взаємно прості натуральні числа, причому $q \ne 1$.

Будемо шукати розв'язок системи (1) у просторі m, який задовольняє початковим умовам $x(\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=0} = x_0$, $x_0 \in m.$ (2)

Відносно коефіцієнтів рівняння (1) припустимо, що:

1) матрицю $A(\tau,\varepsilon)$ можна подати у вигляді ряду $A(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau)$, (3)

2) $A_0(\tau) = diag\{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \ldots\}$, $\lambda_j(\tau) \ne \lambda_k(\tau)$, $j \ne k$, $j,k = 1,2,\ldots$ (4)

3) матриці $A_s = \left\| a_{s,j,k}(\tau) \right\|_{j,k=1}^{\infty}$, $s = 0,1,2,\ldots$, $m = 0,1,2,\ldots,n$ нескінченне число разів диференційовні на $[0, L]$;

4) ряди $\dfrac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s} = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{d^s \left|a_{jl}(\tau,\varepsilon)\right|}{d\tau^s}$ збігаються рівномірно $\forall \tau \in [0, L]$, $s = 0,1,\ldots,$ $m = 0,1,\ldots,n.$

5) $\left| \dfrac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s} \right| \le \gamma_s$, $\forall j = 0,1,2,\ldots$;

6) $\left|\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)\right| \ge d > 0$, $\forall j = 2,3,\ldots$

За допомогою підстановки $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{2q}}$ або $\varepsilon = \mu^{2q}$ систему диференціальних рівнянь (1) зводимо до вигляду

$$\mu^{2p} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A(\tau, \mu^{2q})x = 0, \tag{5}$$

де $A(\tau,\mu^{2q}) = A_0(\tau) + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^{2qs} A_s(\tau)$. (6)

Якщо ввести заміну $y_{2k-1} = x_k$, $y_{2k} = \dfrac{dx_k}{d\tau}$, $k \in N$, (7)

то зчисленну систему диференціальних рівнянь (5) другого порядку можна звести до зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mu^{2p} \frac{dy}{d\tau} = B(\tau, \mu^{2q})y, \tag{8}$$

де $y = colon\{y_1, y_2, \ldots\}$, $B(\tau,\mu)$ – зчисленна матриця.

Тоді така система рівнянь задовольняє умовам теореми існування і єдиності [1]. Отже, через задану точку $\left(\tau_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots\right)$ області H проходить єдиний розв'язок $v(\tau,\mu) = \{v_1(\tau,\mu), v_2(\tau,\mu), \ldots\}$ даної системи, причому цей розв'язок є обмежений, одностайно неперервний відносно τ і μ, а також відносно своїх початкових значень.

Далі, для нашої зчисленної системи диференціальних рівнянь розглянемо так звану «укорочену» систему

$$\begin{cases} \mu^{2p}\dfrac{dy_1}{d\tau} = b_{11}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_1 + b_{12}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_2 + \ldots + b_{1,2n}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_{2n}, \\ \mu^{2p}\dfrac{dy_2}{d\tau} = b_{21}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_1 + b_{22}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_2 + \ldots + b_{2,2n}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_{2n}, \\ \ldots \\ \mu^{2p}\dfrac{dy_{2n}}{d\tau} = b_{2n,1}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_1 + b_{2n,2}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_2 + \ldots + b_{2n,2n}\left(\tau,\mu^{2q}\right)y_{2n}, \end{cases} \tag{9}$$

яка отримується з (8), якщо прирівняти до нуля всі шукані функції, починаючи з $(2n+1)-$ої, і відкинути всі рівняння, починаючи з $(2n+1)-$го.

Нехай $y(\tau,\mu) = \{y_{1,2n}(\tau,\mu), y_{2,2n}(\tau,\mu), \ldots, y_{2n,2n}(\tau,\mu)\}$ – розв'язок «укороченої» системи диференціальних рівнянь (9), який задовольняє початкову умову: при $\tau = \tau_0$ маємо точку $\left(y_1^{(0)}, \ldots, y_{2n}^{(0)}\right)$. Тоді згідно відомих теорем О. Жаутикова [2] розв'язок «укороченої» системи рівнянь задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} y_{s,2n}(\tau,\mu) = y_s(\tau,\mu),\ s = 1,2,\ldots,2n,$, або $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0, \forall n > n_0$ і $\forall\tau \in [0;L]$ виконується нерівність

$$\left|y_{s,2n}(\tau,\mu) - y_s(\tau,\mu)\right| < \varepsilon,\ s = 1,2,\ldots,2n,$$

причому граничний перехід є рівномірним по τ. А до «укороченої» системи, яка є системою $2n$ рівнянь з $2n$ невідомими, можна застосувати теорію, розроблену у працях М. Шкіля, Т. Мейлієва [7], тобто знайти формальний розв'язок та встановити його асимптотичний характер.

3. Основні результати

Формальним розв'язком системи (1) будемо називати розв'язок, який відповідає певному власному значенню матриці $A_0(\tau)$, наприклад, $\lambda_1(\tau)$. Частинний розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$x(\tau,\mu) = u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int\limits_0^{\tau}\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right), \tag{10}$$

де $i = \sqrt{-1}$, а нескінченний вектор $u(\tau,\mu)$ подається формальним степеневим рядом

$$u(\tau,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_s(\tau). \tag{11}$$

Формально підставимо вираз (10)-(11) в (1). При цьому нам потрібні будуть похідні:

$$\frac{dx}{d\tau}=u'(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)+i\mu^{-p}\sqrt{\lambda_1(\tau)}u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right),$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=u''(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)+2i\mu^{-p}u'(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda\ (\tau)}d\tau\right)+$$

$$+i\mu^{-p}\frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1[\tau]}}u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)-\mu^{-2p}\lambda_1(\tau)u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)$$

$$u'(\tau,\mu)=\sum\mu^s u_s'(\tau),\ u''(\tau,\mu)=\sum\mu^s u_s''(\tau).$$

Тоді отримаємо тотожність

$$\mu^{2p}u''(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda\ (\tau)}d\tau\right)+2i\mu^{p}u'(\tau,\mu)\sqrt{\lambda_1(\tau)}\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)+$$

$$+i\mu^{-p}\frac{\lambda_{1'}(\tau)}{2\sqrt{\lambda\ (\tau)}}u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)-\lambda_1(\tau)u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda\ (\tau)}d\tau\right)+$$

$$+A(\tau,\mu^{2q})u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)=0,$$

або, після скорочення на множник $\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right)$, матимемо

$$\mu^{2p}u''(\tau,\mu)+2i\mu^{p}\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'(\tau,\mu)+i\mu^{p}\frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u(\tau,\mu)-\lambda_1(\tau)u(\tau,\mu)+$$

$$+A(\tau,\mu^{2q})u(\tau,\mu)=0$$

В останній рівності відділимо коефіцієнти при однакових степенях параметра μ (враховуючи дистрибутивний закон для нескінчених матриць):

$$\mu^0:\ (A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_0(\tau)=0, \tag{12}$$

$$\mu^s:\ (A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_s(\tau)=F_s(\tau), \tag{13}$$

де $F_s(\tau)=-\sum_{r=1}^{\left[\frac{s}{2q}\right]}A_r(\tau)u_{s-2qr}(\tau)-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{s-p}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'_{s-p}(\tau)-u''_{s-2p}(\tau),$ (14)

причому $F_s(\tau)=0,\ 1\le s\le k,\ k=\min(p,2q).$

Можливі два випадки:

A. $p<2q,$ то $F_s(\tau)=0, 1\le s\le p-1,\quad F_p(\tau)=-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_0(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_0'(\tau).$

B. $p>2q$, то $F_s(\tau)=0, 1\le s\le 2q-1,\qquad F_{2q}(\tau)=-A_1(\tau)u_0(\tau).$

Випадок А. Якщо $0\le s\le p-1,$ то рівняння (12)-(13) розпадаються на скалярні рівняння:

$$(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau))u_{sj}(\tau)=0,$$

звідки $u_{sj}(\tau)\equiv 0,\ j=2,3,...,$ а перші компоненти поки-що невизначені.

Рівняння (13) ми використаємо для визначення невідомих векторів $u_s(\tau),\ p\le s\le 2q-1$ і перших компонент векторів $u_s(\tau),\ 0\le s\le p-1.$

Нехай $s=p$, тоді, переходячи в (13) до координатної форми запису, отримаємо

$$\left(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)\right)\cdot u_{pj}(\tau)=\frac{-i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{0j}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{0j}'(\tau),$$

звідки випливає, що

$$u_{pj}(\tau)=\frac{F_{pj}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}=0.$$

Оскільки для $j=2,3,...:u_{0j}(\tau)\equiv 0,\ u_{0j}'(\tau)\equiv 0,$ а $F_{pj}(\tau)=-\dfrac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}\cdot 0-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}\cdot 0=0.$

Таким чином, перша координата $u_{p1}(\tau)$ вектора $u_p(\tau)$ невизначена. Якщо $j=1$, то

$$0\cdot u_{p1}(\tau)=-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{01}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}\,u_{01}'(\tau).$$

Це лінійне однорідне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Його можна проінтегрувати в квадратурах:

$$\frac{du_{01}(\tau)}{u_{01}(\tau)}=-\frac{\lambda_1'(\tau)d\tau}{4\lambda_1(\tau)};\ \int\frac{du_{01}(\tau)}{u_{01}(\tau)}=-\frac{1}{4}\int\frac{d\lambda_1(\tau)}{\lambda_1(\tau)};$$

$$\ln\frac{u_{01}(\tau)}{c}=-\frac{1}{4}\ln\lambda_1(\tau);\ u_{01}(\tau)=C\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Покладемо сталу $C=1$, остаточно отримаємо

$$u_{01}(\tau)=\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}. \tag{15}$$

Отже, вектор $u_0(\tau)$ має вигляд

$$u_0(\tau)=colon\left(\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}},0,0,...\right). \tag{16}$$

Цей вектор належить простору m. Аналогічно визначаються і вектори $u_s(\tau),$ $p\le s\le 2p-1$, тобто їх можна подати у вигляді

$$u_s(\tau)=colon\left(u_{s1}(\tau),0,0,...\right), \tag{17}$$

а перші координати векторів $u_s(\tau),\ 0\le s\le p-1$ мають вигляд (15).

Покладемо в рівняннях (13) $s=2p$:

$$A_0(\tau)u_{2p}(\tau)-\lambda_1(\tau)u_{2p}(\tau)=-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_p(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_p'(\tau)-u_0''(\tau).$$

Якщо $j=2,3,...,$ то $\left(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)\right)u_{2p,j}(\tau)=0,$ тобто $u_{2p,j}(\tau)=0.$ Нехай $j=1$, тоді попереднє рівняння набуде вигляду

$$-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{p1}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{p1}'(\tau)-u_{01}''(\tau)=0. \tag{18}$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, яке можна проінтегрувати в квадратурах і отримаємо

$$u_{p1}(\tau)=i(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}\int_0^\tau \frac{u''_{01}(\tau)}{2(\lambda_1(\tau))^{\frac{1}{4}}}d\tau. \qquad (19)$$

Таким чином, і вектори $u_s(\tau)$, $2p \le s \le 2q-1$ мають вигляд (17), а перші компоненти векторів $u_s(\tau)$, $p \le s \le 2q-p-1$ можна подати у вигляді (19).

Залишаються невизначеними координати $u_{s1}(\tau)$ векторів $u_s(\tau)$, $2q-p \le s \le 2q-1$. З (17) випливає, що вектори $u_s(\tau)$, $0 \le s \le 2q-1$ належать простору m і є достатньо нескінченно диференційовними по $\tau \in [0; L]$.

Нехай в співвідношеннях (13) - (14), тоді вони записуються у вигляді

$$A_0(\tau)u_{2q}(\tau)-\lambda_1(\tau)u_{2q}(\tau)=-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'_{2q-p}(\tau)-u''_{2q-2p}(\tau)-A_1(\tau)u_0(\tau).$$

Відмітимо, що добуток $A_1(\tau)u_0(\tau)$ існує, оскільки вектор $u_0(\tau)$ має відмінну від нуля тільки першу компоненту. Доданок $A_1(\tau)u_0(\tau)$ при знаходженні елементів вектора $u_{2q}(\tau)$ нічого істотно не змінює, оскільки при знаходженні першої координати векторів отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, яке інтегрується у квадратурах.

Отже, при $j=1$:

$$-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p,1}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'_{2q-p,1}(\tau)-u''_{2q-2p,1}(\tau)-a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)=0,$$

або

$$u'_{2q-p,1}(\tau)+\frac{\lambda_1'(\tau)}{4\lambda_1(\tau)}u_{2q-p,1}(\tau)=-\frac{u''_{2q-2p,1}(\tau)+a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}}. \qquad (20)$$

Аналогічно до (18) координату $u_{2q-p,1}(\tau)$ будемо шукати у вигляді

$$u_{2q-p,1}(\tau)=(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C(\tau). \qquad (21)$$

Підставляючи (21) в (20), отримаємо

$$u'_{2q-p,1}(\tau)=-\frac{1}{4}(\lambda_1(\tau))^{-\frac{5}{4}}\lambda_1'(\tau)C(\tau)+(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C'(\tau),$$

$$-\frac{1}{4}(\lambda_1(\tau))^{-\frac{5}{4}}\lambda_1(\tau)C(\tau)+(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C'(\tau)+\frac{\lambda_1'(\tau)}{4\lambda_1(\tau)}(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C(\tau)=-\frac{u''_{2p-2q,1}(\tau)+a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}},$$

або

$$(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C'(\tau)=-\frac{u''_{2p-2q,1}(\tau)+a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}},\ C'(\tau)=-\frac{u''_{2p-2q,1}(\tau)(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}+a_{1,11}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}}.$$

Враховуючи початкові умови, знаходимо

$$C(\tau)=-\int_0^\tau \frac{u''_{2p-2q,1}(s)(\lambda_1(s))^{\frac{1}{4}}+a_{1,11}(s)}{2i\sqrt{\lambda_1(s)}}ds. \qquad (22)$$

Інші кооординати вектора $u_{2q}(\tau)$ визначаються співвідношеннями

$$u_{2q,j}(\tau) = -\frac{a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)} = -\frac{a_{1,j1}(\tau)(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}, \quad j = 2,3,... \qquad (23)$$

Аналогічно вектори $u_s(\tau)$, $2q \le s < 4q$ мають вигляд (23), а перші координати векторів $u_s(\tau)$, $2q - p \le s \le 4q - p - 1$ знаходимо у вигляді

$$u_{s1}(\tau) = -(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} \int_0^\tau \frac{u''_{s-2p,1}(t) + a_{1,11}(t)u_{s-2q,1}(t)}{2i(\lambda_1(t))^{\frac{1}{4}}} dt . \qquad (24)$$

Таким чином, нами визначені вектори:

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau),0,0,...)$, $0 \le s \le p-1$, $u_{s1}(\tau)$ визначаються з умови (15);

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau),0,0,...)$, $p \le s \le 2q - p - 1$, $u_{s1}(\tau)$ мають вигляд (19);

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau),0,0,...)$, $2q - p \le s \le 2q - 1$, $u_{s1}(\tau)$ мають вигляд (24);

$u_s(\tau) = colon\left(u_{s1}(\tau), -\frac{a_{1,21}(\tau)u_{01}(\tau)}{\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau)}, -\frac{a_{1,31}(\tau)u_{01}(\tau)}{\lambda_3(\tau)-\lambda_1(\tau)}, ...\right)$, $2q \le s \le 4q$, $u_{s1}(\tau)$ мають вигляд (24).

Враховуючи умови 3)–6), можна переконатись, що побудовані вектори $u_s(\tau)$, $2q \le s \le 4q$ є елементами простору m, крім того, вони мають неперервні похідні по $\tau \in [0; L]$ достатньо великих порядків.

Таким чином, побудований формальний розв’язок рівняння (5), а, отже, і рівняння (1), який відповідає кореню $\lambda_1(\tau)$ спектру головної частини матриці $A(\tau,\varepsilon)$.

Аналогічно можна побудувати формальні розв’язки зчисленної системи диференціальних рівнянь (1), які відповідають іншим кореням $\lambda_2(\tau)$, $\lambda_3(\tau)$,... спектру матриці $A_0(\tau)$.

Отримані результати сформулюємо у вигляді теореми:

ТЕОРЕМА 1. Якщо виконуються умови 1)–6), то у випадку $p < q$ існує формальний частинний розв’язок системи (5), який можна подати у вигляді

$$x(\tau,\mu) = u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)}d\tau\right), \qquad \text{де} \quad u(\tau,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau).$$

Випадок Б. Назвемо цей випадок резонансним. Припустимо, що при деяких значеннях k виконуються умови:

$$\lambda_k(\tau) - \lambda_1(\tau) = 0, \qquad (25)$$

а для всіх інших власних значень $\lambda_j(\tau)$ ця умова не має місця, тобто

$$\lambda_j(\tau) \ne \lambda_1(\tau), \ j = 1,2,...; j \ne k .$$

Для зручності запису покладемо $k = 2$. Тоді з умов (12)-(13) отримаємо таку систему рівнянь (в координатній формі):

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{sj}(\tau) = 0, \quad 0 \le s \le p-1,$$

звідки видно, що, $u_{sj}(\tau) \equiv 0$, $j = 3,4,...$, а компоненти $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ залишаються поки що невизначеними функціями.

Нехай $s = p$. Тоді з рівнянь (13) випливає, що

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{pj}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{0j}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}\frac{du_{0j}(\tau)}{d\tau} . \qquad (26)$$

Оскільки $u_{0j}(\tau)\equiv 0,\ j=3,4,...,$, то $u_{pj}(\tau)=0$, а координати $u_{p1}(\tau)$ і $u_{p2}(\tau)$ залишаються поки що невизначеними.

Якщо $j=1,2,$ то (26) запишемо у вигляді

$$-\frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{0j}(\tau)-2\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{0j}'(\tau)=0\,.$$

Це лінійне однорідне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке інтегрується у квадратурах:

$$\frac{du_{0j}(\tau)}{u_{0j}(\tau)}=-\frac{\lambda_1'(\tau)}{4\lambda_1(\tau)},\ j=1,2,\quad u_{0j}(\tau)=\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}C_j\,,\ C_j=u_{0j}(0),$$

$j=1,2$ – деякі сталі, покладемо їх рівними, наприклад, 1.

Отже, вектор $u_0(\tau)$ визначений і має вигляд

$$u_0(\tau)=colon\left(\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}},\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}},0,0,...\right). \tag{27}$$

Координати $u_{p1}(\tau)$ і $u_{p2}(\tau)$ визначаються з рівнянь (13) при $s=2p$.

Аналогічно визначаються і вектори $u_s(\tau),\ p\le s\le 2p-1$, тобто їх можна подати у вигляді

$$u_s(\tau)=colon(u_{s1}(\tau),\,u_{s2}(\tau),\,0,\,0,\,...). \tag{28}$$

Перші координати цих векторів мають вигляд (27). Покладемо у рівнянні (13) $s=2p$. Отримаємо

$$A_0(\tau)u_{2p}(\tau)-\lambda_1(\tau)u_{2p}(\tau)=-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_p(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_p'(\tau)-u_0''(\tau),$$

або в координатній формі

$$\left(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)\right)u_{2p,j}(\tau)=-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{pj}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{pj}'(\tau)-u_{0j}''(\tau),$$

звідки випливає, що $u_{2p,j}(\tau)\equiv 0,\ j=3,4,...,$ а функції $u_{2p,1}(\tau)$ і $u_{2p,2}(\tau)$ залишаються поки що невизначеними.

Нехай $j=1$. Тоді попереднє рівняння набуде вигляду

$$-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{p1}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{p1}'(\tau)-u_{01}''(\tau)=0,$$

або
$$2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{p1}'(\tau)+i\frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{p1}(\tau)=-u_{01}''(\tau).$$

Маємо лінійне неоднорідне рівняння відносно $u_{p1}(\tau)$, інтегруючи яке у квадратурах, і враховуючи початкові умови, знаходимо

$$u_{p1}(\tau)=-\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}\int_0^{\tau}\frac{u_{01}''(t)}{2i\left(\lambda_1(t)\right)^{\frac{1}{4}}}dt\,. \tag{29}$$

Аналогічно можна знайти

$$u_{p2}(\tau)=-\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}\int_0^{\tau}\frac{u_{02}''(t)}{2i\left(\lambda_1(t)\right)^{\frac{1}{4}}}dt\,. \tag{30}$$

Таким чином, і вектори $u_s(\tau),\,2p\le s\le 2q-1$ мають вигляд (28), а перші координати векторів $u_s(\tau),\ p\le s\le 2q-p-1$ можна подати у вигляді (29)-(30).

Залишаються невизначеними компоненти $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ векторів $u_s(\tau),\quad 2q-p\le s\le 2q-1$.

З побудови даних векторів випливає, що вони належать простору m і є достатню кількість разів диференційовними по τ.

Покладемо тепер $s=2q$, тоді співвідношення (14) можна записати у вигляді

$$A_0(\tau)u_{2q}(\tau)-\lambda_1(\tau)u_{2q}(\tau)=-A_1(\tau)u_0(\tau)-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'_{2q-p}(\tau)-u''_{2q-2p}(\tau),$$

або в координатній формі

$$\left(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)\right)u_{2q,j}(\tau)=-a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau)-a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p,j}(\tau)-$$

$$-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'_{2q-p,j}(\tau)-u''_{2q-2p,j}(\tau).$$

Звідки легко бачити, що при $j=3,4,...$

$$u_{2q,j}(\tau)=-\frac{a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau)+a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}. \tag{31}$$

Враховуючи (15), маємо

$$u_{2q,j}(\tau)=-\frac{a_{1,j1}(\tau)\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}+a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}. \tag{32}$$

При $j=1,2$ отримаємо рівняння

$$\frac{du_{2q-p,j}}{d\tau}+\frac{1}{4}\frac{\lambda_1'(\tau)}{\lambda_1(\tau)}u_{2q-p,j}(\tau)=-\frac{a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau)+a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)+u''_{2q-2p,j}}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}},$$

яке можна записати у вигляді

$$-a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau)-a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p,j}(\tau)-2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u'_{2q-p,j}(\tau)-u''_{2q-2p,j}(\tau)=0$$

Це лінійне неоднорідне відносно $u_{2q-p,j}(\tau)$, інтегруючи яке в квадратурах і використовуючи початкові умови, знаходимо

$$u_{2q-p,j}(\tau)=-\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}\int_0^\tau\frac{a_{1,j1}(s)u_{01}(s)+a_{1,j2}(s)u_{02}(s)+u''_{2q-2p,j}(s)}{2i\left(\lambda_1(s)\right)^{\frac{1}{4}}}ds\quad j=1,2. \tag{33}$$

Аналогічно вектори $u_s(\tau),\quad 2q\le s\le 4q$ мають вигляд (28), а перші дві компоненти векторів $u_s(\tau),\quad 2q-p\le s\le 4q-p-1$ виражаються співвідношеннями

$$u_{s1}(\tau)=-\frac{1}{\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}}\int_0^\tau\frac{a_{1,11}(s)u_{s-2q,1}(s)+a_{1,12}(s)u_{s-2q,2}(s)+u''_{s-2p,1}(s)}{2i\left(\lambda_1(s)\right)^{\frac{1}{4}}}ds, \tag{34}$$

$$u_{s2}(\tau)=-\frac{1}{\left(\lambda_1(\tau)\right)^{-\frac{1}{4}}}\int_0^\tau\frac{a_{1,21}(s)u_{s-2q,1}(s)+a_{1,22}(s)u_{s-2q,2}(s)+u''_{s-2p,2}(s)}{2i\left(\lambda_1(s)\right)^{\frac{1}{4}}}ds. \tag{35}$$

Враховуючи умови 1)–6), бачимо, що побудовані вектори $u_s(\tau),\quad 2q\le s\le 4q$ є елементами простору m, крім того вони мають похідні по τ достатньо високих порядків на відрізку $[0;L]$.

Таким чином, нами визначені вектори
$u_s(\tau)=colon\left(u_{s1}(\tau),u_{s2}(\tau),0,0,...\right)$, $0\le s\le p-1$, $u_{s1}(\tau)$, $u_{s2}(\tau)$ визначаються з (27);
$u_s(\tau)=colon\left(u_{s1}(\tau),u_{s2}(\tau),0,0,...\right)$, $p\le s\le 2q-p-1$, $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ мають вигляд (29)-(30).
$u_s(\tau)=colon\left(u_{s1}(\tau),u_{s2}(\tau),0,0,...\right)$, $2q-p\le s\le 2q-1, u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ мають вигляд (33),
$u_s(\tau)=colon\left(u_{s1}(\tau),u_{s2}(\tau),-\dfrac{a_{1,31}(\tau)u_{2q-2p,1}(\tau)+a_{1,32}(\tau)u_{2q-2p,2}(\tau)}{\lambda_3(\tau)-\lambda_1(\tau)},\ldots\right)$, $2q\le s\le 4q$, $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ мають вигляд (34)-(35).

Продовжуючи міркування аналогічним чином, можна визначити всі останні вектори $u_s(\tau)$, $s\ge 4q$ і довести їх диференційовність по τ, оскільки дані вектори є скінченними сумами векторів, які мають похідні достатньо великих порядків.

Отже, і у випадку Б теорема 1 має місце.

Для доведення асимптотичного характеру формальних розв'язків використаємо метод «укорочення» [1-2].

У нашому випадку для зчисленої системи диференціальних рівнянь (6) побудуємо “укорочену” систему

$$\mu^{2p}\frac{d^2x}{d\tau^2}+A_n\left(\tau,\mu^{2q}\right)x=0\,, \tag{36}$$

де $x=colon\{x_1(\tau,\mu),x_2(\tau,\mu),\ldots,x_n(\tau,\mu)\}$, $A_n\left(\tau,\mu^{2q}\right)$ – квадратна матриця порядку n, яка отримана з нескінченої матриці $A\left(\tau,\mu^{2q}\right)$, яка отримана відкиданням всіх рядків і стовпців, починаючи з $(n+1)$-го. Скінченні системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром цілого рангу виду (36) розглядались в роботах М. Шкіля і Т. Мейлієва [7]. Зокрема, для систем вигляду (36) побудовано формальний частинний розв'язок $x(\tau,\mu)=u(\tau,\mu)e^{i\mu^{-h}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(t)}dt}$, де $u(\tau,\mu)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\mu^s u_s(\tau)$ – n- мірний вектор. Формальний розв'язок відповідає характеристичному кореню $\lambda_1(\tau)$.

Якщо виконати заміну $y_s=x_s$, $y_{n+s}=\dfrac{dx_s}{d\tau}$, $s=1,2,\ldots,n$, то систему (36) зведемо до скінченої системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mu^{2p}\frac{dy}{d\tau}+B\left(\tau,\mu^{2q}\right)y=0, \tag{37}$$

$$B\left(\tau,\mu^{2q}\right)=\begin{bmatrix}0_n & -\mu^{2p}E_n\\ A_n\left(\tau,\mu^{2q}\right) & 0_n\end{bmatrix},\ (2n\times 2n),$$

характеристичне рівняння якої $\det\left(B_0(\tau)-\omega(\tau)E\right)=0$ має $2n$ простих коренів вигляду $\omega_j(\tau)=\pm i\sqrt{\lambda_j(\tau)}$, $j=1,2,...,n$, а $\lambda_j(\tau)$ – корінь рівняння $\det\left(A_{0n}(\tau)-\lambda(\tau)E\right)=0$ Тоді вектор-розв'язок $y(\tau,\mu)$ має вигляд

$$y(\tau,\mu)=\bar{u}(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p}\int_0^\tau\sqrt{\lambda_1(t)}dt\right), \tag{38}$$

де $\bar{u}(\tau,\mu)-2n-$мірний вектор такого вигляду

$$\bar{u}(\tau,\mu)=\begin{bmatrix} u(\tau,\mu) \\ u'(\tau,\mu)+i\mu^{-p}u(\tau,\mu) \end{bmatrix}. \tag{39}$$

$$y_m(\tau,\mu)=\overline{u_m}(\tau,\mu)e^{i\mu^{-p}\int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(t)}dt}, \tag{40}$$

$$\overline{u_m}(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{m}\mu^s\overline{u_s}(\tau),\ m\geq 1.$$

Тоді асимптотичний характер формальних розв'язків виражається теоремою [7].

ТЕОРЕМА 2. Нехай при $\tau=0\quad y(0,\mu)=y_m(0,\mu)$. (41)

Тоді $\forall t\in[0;L]$ і $\forall\mu\in(0;\mu_0]$ існує стала $C>0$, яка не залежить від μ, що правильна нерівність

$$\|y(\tau,\mu)-y_m(\tau,\mu)\|\leq\mu^{m+2p}\cdot C. \tag{42}$$

Отже, для точного розв'язку $v(\tau,\mu)=colon\{v_1(\tau,\mu),v_2(\tau,\mu),...\}$ зчисленної системи диференціальних рівнянь (6), який відповідає характеристичному числу $\lambda_1(\tau)$, має місце оцінка

$$\left|v_s(\tau,\mu)-y_{s,2n}^{(m)}(\tau,\mu)\right|=\left|\left(v_s(\tau,\mu)-y_{s,2n}(\tau,\mu)\right)+\left(y_{s,2n}(\tau,\mu)-y_{s,2n}^{(m)}(\tau,\mu)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|v_s(\tau,\mu)-y_{s,2n}(\tau,\mu)\right|+\left|y_{s,2n}(\tau,\mu)-y_{s,2n}^{(m)}(\tau,\mu)\right|<\varepsilon_0+C\mu^{m+2p},$$

або $\left|v_s(\tau,\mu)-y_{s,2n}^{(m)}(\tau,\mu)\right|<\varepsilon_0+C\mu^{m+2p},\ s=1,2,...$ (43)

$$\|v(\tau,\mu)-y_m(\tau,\mu)\|<\varepsilon_0+C\mu^{m+2p}.$$

Таким чином, нами доведена теорема:

ТЕОРЕМА 3. Якщо $v(\tau,\mu)=colon\{v_1(\tau,\mu),v_2(\tau,\mu),...\}$ розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1); $y(\tau,\mu)-$розв'язок «укороченої» системи диференціальних рівнянь (37), $y_m(\tau,\mu)-m$-наближений розв'язок системи (37), тоді $\forall\varepsilon_0>0$ існує стала $C>0$, яка не залежить від μ така, що $\forall\ \tau\in[0;L],\ \forall\ \mu\in(0;\mu_0]$ правильна нерівність $\left|v_s(\tau,\mu)-y_{s,2n}^{(m)}(\tau,\mu)\right|<\varepsilon_0+C\mu^{m+2p},\quad n\to\infty,\ s=1,2,...$.

Висновки. Авторами статті визначено умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу вигляду (1) має розв'язок; побудовано формальний розв'язок такої системи у нерезонансному і резонансному випадках, коли головна матриця має простий дискретний спектр; доведено асимптотичний характер побудованих розв'язків методом «укорочення».

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у вивченні розв'язків системи вигляду (1), коли головна матриця є нескінченною клітиною Жордана або інші випадки дискретного спектру.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Valeev K. G., Zhautikov O. A. Infinite systems of differential equations. Alma-Ata: Nauka, 1974. 413 p.
2. Жаутиков О. С Розв'язок крайової задачі для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*. 1960. Т. 12. С. 157–164.
3. Ковтонюк М. М. Асимптотична поведінка розв'язку однієї нескінченної системи лінійних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*. 1983. Т. 35. С. 630–636.

4. Ковтонюк М. М. Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика: колективна монографія / за заг. ред. М. М. Ковтонюк, С. М. Бака. Вінниця: ВНТУ, 2023. С. 54–79. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811
5. Ковтонюк М. М. Асимптотичне інтегрування зчисленних систем диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній. *Проблеми вищої математичної освіти : виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. Інтернет-конф. (м. Вінниця, 01–03 червня 2020 р.). Вінниця, 2020. С.127–129. URL: https://conferences.vntu.edu.ua/public/files/pmovc/pmovc-2020_netpub.pdf
6. Кондакова С. В. Про асимптотичні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь, яка при похідних містить параметр з дробовим показником. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова*, 2001, №2. С. 262–272.
7. Мейлієв Т. К., Шкіль М. І. Про асимптотичне подання розв'язків систем диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром при похідній дробового рангу. *Доповіді академії наук УРСР*. 1979. № 4. С. 264–267.
8. Шкіль М. І., Рашевський М. О. Асимптотичне інтегрування лінійних систем другого порядку з нестабільним спектром. *Доповіді НАН України.* 2002. № 3. С. 39–43.
9. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. Київ: Вища школа, 1971. 226 с.
10. Яковець В. П., Стрельніков М. А. Побудова асимптотичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. *Український математичний журнал.* 2003. Т. 55. № 7. С. 961–976.

УДК 517.925.4

Investigation of solutions of the countable system of second-order differential equations with small parameter of fractional rank

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia

Abstract. A formal solution to a countable system of second-order differential equations with a small parameter of fractional rank in the derivative is constructed for both resonant and non-resonant cases. Its asymptotic behavior is investigated using the «reduction» method of the countable system of differential equations.

The aim of the article is to determine the conditions under which a countable system of second-order linear differential equations with a small parameter of fractional rank in the derivative admits a solution; to construct a formal solution and to prove its asymptotic nature.

Keywords: countable systems of differential equations, small parameter, formal solution, asymptotic nature of the solution, reduction method.

References

1. Valeev, K. G., Zhautikov, O. A. (1974). *Infinite systems of differential equations*, Nauka, Alma-Ata.
2. Zhautikov, O. S. (1960). *Solution of the boundary value problem for an infinite system of ordinary differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **12**, 157–164. [in Ukrainian]
3. Kovtoniuk, M. M. (1983). *The asymptotic behavior of the solution of an infinite system of linear differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **35**, 630–636. [in Ukrainian]
4. Kovtoniuk, M. M. (2023). *Asymptotic solutions of a countable system of differential equations with two small parameters*, Problems of Mathematics and Computer Science in Pedagogical Institutions of Higher Education: Theory and Practice: A Collective Monograph, VNTU, Vinnytsia, 54–79. [in Ukrainian]. https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811
5. Kovtoniuk, M. M. (2020). *Asymptotic integration of countable systems of second-order differential equations with a small parameter of fractional order in the derivative*, Problems of Higher Mathematical Education: Challenges of Modernity, VNTU, Vinnytsia, 127–129. [in Ukrainian]. https://conferences.vntu.edu.ua/public/files/pmovc/pmovc-2020_netpub.pdf
6. Kondakova, S. V. (2001). *Asymptotic Solutions of Systems of Linear Differential Equations Involving Derivatives with a Fractional Parameter*, Scientific Notes of M. P. Drahomanov National Pedagogical University, **2**, 262–272. [in Ukrainian]

7. Meiliev, T. K., Shkil, N. I. (1979). *Asymptotic Representations of Solutions for Second-Order Systems of Differential Equations with a Small Parameter and a Derivative of Fractional Order*. Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, **4**, 264–267. [in Ukrainian]
8. Shkil, M. I., Rashevskyi, M. O. (2002). *Asymptotic integration of second-order linear systems with an unstable spectrum*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, **3**, 39–43. [in Ukrainian]
9. Shkil, M. I. (1971). *Asymptotic Methods in Differential Equations*, Vyshcha shkola, Kyiv. [in Ukrainian]
10. Iakovets, V. P., Strelnikov, M. A. (2003). *Construction of Asymptotic Solutions to Linear Systems of Differential Equations with Two Small Parameters*, Ukrainian Mathematical Journal. **55** (7), 961–976. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Мар'яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Sciences in Pedagogy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 17.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ

Actual problems of physics and astronomy

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 37–51.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 37–51.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 536.7:621.798

Щодо питання про досяжність теоретичного мінімуму утворення відходів як фізичного явища в технологічних процесах

В'ячеслав Волошин[1], Вадим Бурко[2]

[1] Приазовський державний технічний університет,
кафедра промислових теплоенергетичних установок і теплопостачання, м. Дніпро. Україна
vsvlshn52@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-6809-6779

[2] Приазовський державний технічний університет,
кафедра промислових теплоенергетичних установок і теплопостачання, м. Дніпро. Україна
burko_v_a@pstu.edu
https://orcid.org/0000-0002-7384-4226

Анотація. У статті представлені результати досліджень, пов'язаних з поняттям теоретичного мінімуму утворення відходів як фізичної характеристики технологічного процесу. З посиланнями на класичні праці І. Пригожина, Л. Онсегера, М. Фейгенбаума показані граничні межі, що накладаються на термодинамічні умови, які забезпечують в технологічному процесі не тільки виробництво основного товарного продукту, але і відходів. Показано, що умовою мінімізації відходів у межах джерела їх виникнення – технологічного процесу, крім стану сильної термодинамічної нерівноважності, є достатність додаткової зовнішньої енергії E_w заданої якості, та в розрахунковому обсязі не менше 62% від базової енергії, що використовується в технологічному процесі. На розрахунково-експериментальних прикладах показано, що входження термодинамічної нерівноважної системи в зону парної біфуркації, за вихідними параметрами феноменологічного рівняння Л. Онсагера, різко знижує можливості технологічного процесу щодо досягнення теоретичного мінімуму утворення відходів. Обґрунтоване порівняння параметрів технологічного процесу в їх термодинамічному аспекті з механізмами фейгенбаумського хаосу, пов'язаного з різноманіттям невизначеностей, які присутні в будь-якому виробництві товарної продукції, через такі механізми, побічно, призводять до лавиноподібних процесів утворення відходів.

Ключові слова: термодинамічна нерівноважність, промислові відходи, фізична сутність, теоретичний мінімум утворення відходів, зовнішня енергія, ентропія, термодинамічна двоєдиність.

1. Вступ

Глибоке розуміння фізичного сенсу маловідходності та безвідходності будь-якого виробництва дозволяє знаходити ефективніші способи та методи мінімізації відходів,

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-04

забезпечувати захист довкілля від безмежного накопичення промислових відходів, що визначає актуальність роботи. У статті [1, с. 25-26] вказано на принцип термодинамічної двоєдиності, як механізму створення відходів в технологічному процесі, а також в роботах [2, с. 85; 1, с. 33-34] запропонована, і проілюстрована на багатьох прикладах методика оцінки такого показника, як теоретичний мінімум відходоутворення, як конкретна фізична величина для будь-якого технологічного процесу, заснована на термодинамічних властивостях об'єкта. Подібні схеми для різноманітних технологічних процесів включають зіставлення двох графіків: залежностей, які описуються феноменологічним рівнянням Л.А. Онсагера для визначення зміни ентропії в системах зі слабкою термодинамічної нерівноважністю і кривою, що показує залежність термодинамічних сил X_i, завдяки яким здійснюється технологічний процес, від параметричного коефіцієнта $\lambda=(\Delta X_i)/X_i$ [1, с. 33]. Проте механізми, і навіть параметричні значення граничних умов такого явища, виявлені не були. Зокрема, неочевидним було питання про граничні значення шуканого мінімуму відходоутворення, його умови та причини появи. Не враховано умови, за яких такі системи переходили до стану невизначеності, що робило їх некерованими. Як маємо з останніх робіт І. Пригожина [3, р. 37; 4, р. 141-142], такі залежності виходили з розуміння умов термодинамічної нерівноважності, незворотності та можливих умов стійкості таких систем.

2. Постановка проблеми

Як показали дослідження, невизначені стани можуть стати причинами глибокої недосяжності теоретичного мінімуму відходоутворення для певних класів технологічних процесів. Зокрема, зміна (зростання) ентропії у відходоутворюючих системах, як показник мінімізації відходоутворюючих матеріальних потоків, це закономірна величина, яка залежить від якості сировини, використовуваної енергії та визначає свій вектор у протилежному напрямку ефективної переробки сировини [5, р. 108-109]. У такому контексті залишається актуальним питання: наскільки досяжним є фізично обґрунтований теоретичний мінімум відходів у технологічному процесі і від чого він залежить.

Мета роботи: привернувши увагу до принципу термодинамічної двоєдиності, як механізму створення відходів у технологічному процесі, виявити параметричні показники цього явища, у межах умов досягнення теоретично обґрунтованого мінімального об’єму таких відходів, як фізичної характеристики технологічного процесу.

3. Основні результати

Основна частина досліджень. Представимо технологічний процес, як певні фізичні, хімічні та ін. явища, спрямовані на отримання готової корисної продукції *(р)* та утворення при цьому деякого відходу *(w)*. Реалізація цього технологічного процесу здійснюється в рамках деякої виробничої системи, що забезпечує потоки сировини, енергії та ін. Для такого технологічного процесу інтерпретація першого закону термодинаміки здійснюється у вигляді $E_0 = \Delta U + (A_{0p} + A_{0w})$, де E_o – підведена зовнішня енергія; ΔU – внутрішня енергія системи; A_{op} – корисна робота системи, спрямовану отримання товарної продукції; A_{ow} -робота системи, спрямовану отримання відходу.

Згідно принципу термодинамічної двоєдиності [1, с. 26] та з метою мінімізації відходів усередині джерела виникнення – самого технологічного процесу, вимагатимемо присутності додаткового джерела зовнішньої енергії ΔE_w. Для такої системи перший закон термодинаміки може бути записаний у наступному вигляді: $E_0 + \Delta E_w = \Delta U^* + \left(A_{0p} + A_w\right)$, де: $A_w \gg A_{ow}$ - робота, що здійснюється для впорядкованого перетворення на продукцію тієї частини сировини J_w, яка у звичайному вигляді переходить у відходи (рис. 1); ΔU^* – внутрішня енергія впорядкованої системи.

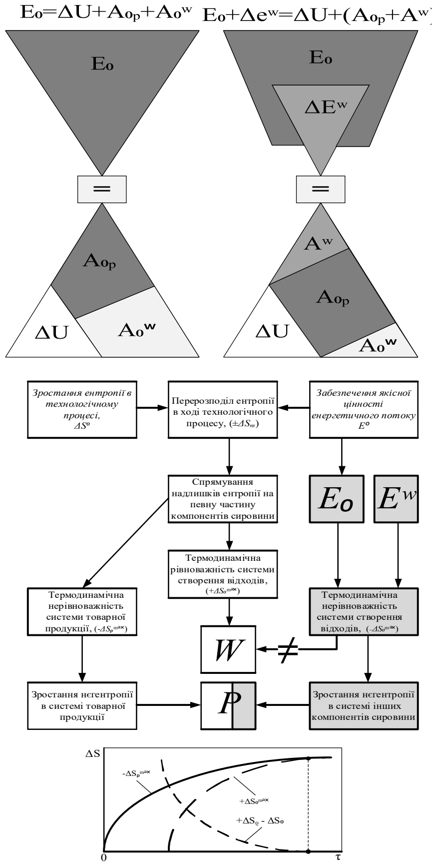


Рис. 1. Енергетичний баланс і умови перерозподілу ентропії і негентропії в процесі виробництва корисних продуктів і відходів та їх графічна інтерпретація для умов першого та другого законів термодинаміки (позначення в тексті)

Припустимо, що система змінюватиметься таким чином, щоб робота з перетворення тієї частини сировини, з якої потім виходить відхід $A_{0w} \rightarrow 0$. Це означає, що частина J_w початкової сировини не переробляється і відходи в системі матимуть максимальне первинне значення. Припустимо тепер, що робота A_w в системі, що витрачається на перетворення тієї частини сировини J_w, з якої раніше виходив відхід, зростатиме в результаті підведення додаткової зовнішньої енергії E_w певної якості. Частина цієї енергії знову піде на збільшення внутрішньої енергії ΔU^*, а інша частина у вигляді роботи $A_{0w} + A_w > 0$ – витрачається на перетворення зазначеної раніше частини сировини J_w. Але цей «відхід» матиме дещо інші якості, які роблять його кориснішим. На це ясно вказують зміни, що відбуватимуться з ентропією такої системи, на що вказує механізм (див. рис. 1). Якщо об'єктом аналізу вектору зміни ентропії є нерівноважна неізольована система, в якій протікають як дисипативні, так і впорядковані, репаративні процеси перетворення енергії та речовини, то другий закон для інтегральної ентропії можна записати у вигляді $\Delta S = \sum_q \Delta S_q^{\pm} \geq 0$, де $\Delta S_q^{\pm}$ відноситься до тієї з q-їх властивостей, які в даній системі змінюються в дисипативному ($\Delta S_q^{\pm} > 0$) або репаративному ($\Delta S_q^{\pm} \leq 0$) напрямках. Така схема реалізує принцип, який відбувається у відомій теоремі І. Пригожина та з яким кореспондується принцип термодинамічної двоєдиності, описані в роботі [6, с. 259], а також із роботами авторів [7, р. 141, р. 228; 8, р. 338].

Щодо нашого випадку, доречним буде розгляд рівняння Л. Онсагера для отримання ентропії в термодинамічно близьких до рівноваги системах з врахуванням уточнення [1, с. 34] у вигляді $\Delta[S] = (J_0X_0 + J_wX_w)\lambda(1-\lambda)$. Тут X_0 *і* X_w відповідно, термодинамічні сили, спрямовані на перетворення частини матеріального потоку (сировини) J_0 в готову продукцію, та матеріального потоку J_w для частини сировини, яка раніше потрапляла у відхід, а тепер – в незаплановану товарну продукцію. $\lambda = \frac{X_0}{X_0+X_w}$ - деякий феноменологічний коефіцієнт, що визначає відносність докладання шуканих сил X_0 *і* X_w на відповідні матеріальні потоки сировини і виконану при цьому роботу A_0 *і* A_w. Співвіднесемо обидві частини цього виразу з базовою енергією E_0, що призначена на одержання товарної продукції

$$\frac{\Delta[S]}{E_0} = \frac{(J_0X_0+J_wX_w)}{E_0}\lambda(1-\lambda) \tag{1}$$

та запишемо у наступному вигляді

$$\lambda_s = r\lambda(1-\lambda)\ , \tag{2}$$

де обидві частини виразу мають власний сенс, що відображає їх роль у феноменологічній кривій. Зокрема, $\lambda_s = \frac{\Delta[S]}{E_0}$ – наведений показник зміни ентропії всієї виробничої системи до базової частини зовнішньої енергії E_0.

А $r = \frac{(J_0X_0+J_wX_w)}{E_0}$ термодинамічний показник, що відображає відношення сумарної роботи з перетворення всієї сировини $(J_0 + J_w)$ на корисну товарну продукцію до базового значення енергії E_0, але вже *з урахуванням додаткової енергії* E_w Саме такий показник пов'язує теоретичний мінімум відходоутворення виробничих систем з якісними та кількісними характеристиками зовнішньої енергії, що підводиться до системи.

Представимо вираз (1) у вигляді логістичного відображення детермінованої функції з характерними для неї властивостями [9, р. 459-460],

$$(\lambda_s)_n = r\lambda_{n-1}(1-\lambda_{n-1}) \tag{3}$$

Для цього рівняння вимагатимемо виконання наступних умов.

1. Послідовність ітерації повинна дотримуватись за умови сумісності параметрів $\lambda_s = \frac{\Delta[S]}{E_0}$ і $\lambda = \frac{J_o}{J_0+J_w}$ (у повній відповідності до принципу взаємності Л. Онсагера), в одному і тому ж часовому інтервалі, позначеному як Δn.

2. Крок ітерації вибираємо як $\Delta n \sim \Delta t$ у деякому часовому інтервалі. При цьому ми свідомо втрачаємо частину даних безперервної функції, але натомість отримуємо картину зв'язку показника мінімізації відходів з термодинамічними характеристиками системи.

Перша умова може бути здійсненною у разі, якщо в ній будуть враховані можливості для інтервальної ітерації, що вимагає її розгляду через порівняні значення відповідних потужностей $\dot{A}_i$ як властивостей існуючої термодинамічної системи

$$\lambda_s \cong \lambda \ \text{або}\ \frac{\Delta[S]}{\dot{A}_0}\Delta n \cong \frac{\dot{X}_0}{\dot{X}_0+\dot{X}_w}\ \text{або}\ \Delta[S] = \lambda\frac{\dot{A}_0}{\Delta n}. \tag{4}$$

Останнє означає, що умовою логістичного стану формули (1) є пряма залежність зміни ентропії такої системи від роботи, яку вдається виконати завдяки базовій енергії E_0, що є присутньою в технологічному процесі. Така залежність у вигляді феноменологічної кривої у співвідношенні з графіками термодинамічних сил X_0 та X_w, що беруть участь у переробці матеріальних потоків J_0 та J_w, представлена на рис. 2.

Рис. 2. Феноменологічна залежність для області розрахункового, теоретично обґрунтованого мінімуму відходоутворення у технологічному процесі

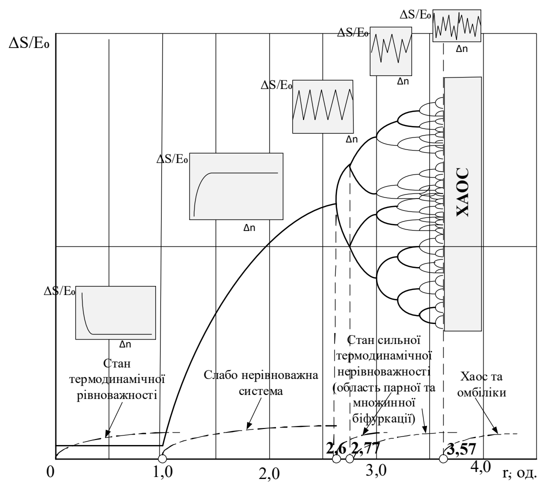


Рис. 3. Залежність зміни ентропії у технологічному процесі від показника його термодинамічного стану

Заради згладжування ітерації цю діаграму слід розглядати в порівнянні з іншим графіком (рис. 3), що відображає результати розрахунку залежності $\lambda_s(r)$ у класичному для таких логістичних рівнянь вигляді і наведені для умов певної технологічної відходоутворюючої системи. Слід відзначити, що зростаючі значення показника r в цих графіках можуть бути тільки умовними, гіпотетичними у вказаних межах, в залежності від вихідних параметрів E_w та $X_w J_w$, що задаються, і про що буде показано на практичних результатах нижче. Для нас важливими є інтервали, в яких відображається відношення параметрів системи до термодинамічної рівноваги (див. рис. 3).

1.Умова, коли $0 \leq r < 1{,}0$ (область реальних технологічних процесів) відображає область термодинамічної рівноваги для всієї виробничої системи. Усі траєкторії системи прагнуть нуля. Тут виконується умова $J_w X_w = 0$ або $A_w = 0$, коли технологічний процес взагалі не пов'язаний з цілеспрямованим перетворенням потенційної відходоутворювальної сировини. Або коли нерівнозначні термодинамічні сили, спрямовані на виробництво товарної продукції та відходу, розділені і перебувають у стані, близькому до термодинамічної двоєдиності [2, с. 47].

2.Умова попадання системи з рівноважного стану до стану слабкої термодинамічної нерівноважності передбачає $r \geq 1$. Це також область реальних технологічних процесів. У такому стані система прагне фіксованої точки і знаходить здатність до реалізації принципу термодинамічної двоєдиності по відношенню до різних частин J_0 і J_w матеріального потоку (сировини). При цьому лише умови $J_0 X_0 > 0$ явно замало для цілеспрямованого перетворення другої частини матеріальних потоків J_w, які довільним чином переходять у відходи. Виникає необхідність у деякому $X_w \neq 0$ для певного J_w.

3. Гіпотетична умова $r \geq 2{,}6$, при якому $J_w X_w \sim kEo$, відображає ту $k-$ту частку додаткової зовнішньої енергії, якої буде достатньо, щоб термодинамічні сили X_w, що реалізуються в сильно нерівноважній системі, були здатні до перетворення матеріального потоку J_w у напрямку його суттєво інших якостей наприклад, споживчої цінності.

4.В той же час, при первинній недостатності додаткової зовнішньої енергії $J_w X_w < kE_0$ відбувається перехід системи до періодичної поведінки щодо параметра r:

Зокрема, при дотриманні умови термодинамічної нерівноважності в системі, наприклад, при гіпотетичному $r \geq 2,77$ коли $J_w X_w \ll kE_o$ вона є об'єктом парної біфуркації, а при $2,77 < r < 3,57$ або $J_w X_w > kE_o$ – виявляє ознаки вже множинності парних біфуркацій, що робить таку систему малокерованою щодо цікавого для нас матеріального потоку J_w.

5. Далі, за умови $r \geq 3,57$ або $J_w X_w \ll kE_o$, тобто, за подальшої недостатності енергії, що вводиться (оцінково менше певного абстрактного k від базової енергії, необхідної для забезпечення основного технологічного процесу), система теоретично здатна переходити у стан повного хаосу, з відсутністю чутливості до початкових умов щодо можливостей не тільки для переробки потенційних відходів *(w),* але і для реалізації основної мети системи – виробництва товарної продукції *(p)*, коли біфуркаційне множення періодів робить виробничу систему зі штучною додатковою зовнішньою енергією E_w енергетично некерованою в найближчому діапазоні зміни термодинамічного параметра *r.*

З викладеного слідує висновок: у тому, що умовою мінімізації відходів усередині джерела їх виникнення – технологічному процесі, крім стану сильної термодинамічної нерівноважності, є *достатність* додаткової зовнішньої енергії E_w заданої якості, для того щоб вивести ту частину сировини, з якої зазвичай виходить відхід зі стану термодинамічної рівноваги та перевести її у вихідний стан слабкої нерівноважності.

Подібні висновки достатньо корелюються з результатами розрахунково-експериментальних даних, одержаних при дослідженні певної кількості традиційних технологічних процесів. Розглянемо деякі з них.

Методика дослідження. Методика досліджень включала виявлення значень коефіцієнтів r у послідовності технологій, що визначаються величиною ΔS_{max} на феноменологічних кривих Л. Онсагера. Ці точки визначені в координатах «$\Delta S / E_0$ – λ» для технологічних процесів, що підлягали аналізу, у галузях гірничодобувної, металургійної, машинобудівної, енергетичної промисловості та інших виробництвах. Усього досліджено 90 технологічних процесів та 103 їх модифікації, включаючи експериментальні технології. Достовірність фрагментації однойменних показників в незалежних вибірках в умовах відсутності нормального розподілу для різноманіття технологічних процесів, оцінювалась за допомогою непараметричного *U-критерія* Манна-Уїтні [10 р. 50-60], у вигляді єдиної генеральної вибірки для порівнюваних залежностей $U_1 = R_1 - 0,5n_1(1 + n_1) \leftrightarrow U_2 = R_2 - 0,5n_2(1 + n_2)$, таким чином, що тільки за умовою $U_{1,2} = min$ показує на їх непорівнянність. Тут: $R_{1,2} -$ сума рангів для відповідної вибірки; $n_{1,2} -$ розмір кожної з вибірок. Така репрезентативність вибірки при співставлених уніфікованих параметрах дозволяє розраховувати на об'єктивні результати дослідження.

Вихідними даними для кожного з розглянутих технологічних процесів є статистична звітність про:

-величину зовнішньої енергії E_0, що надходить у конкретний технологічний процес для переробки сировини на одиницю її маси;

- температурні параметри T_i власне технологічного процесу та зовнішнього середовища T_0 для розрахунку зміни ентропії;

- параметри сировини, яка підлягає переробці у конкретному технологічному процесі, а саме:

- параметр матеріального потоку J_0, який витрачається на отримання основної товарної продукції;

- параметр матеріального потоку J_w, який становить весь первісний обсяг сировини у своїй відходоутворюючій частині;

- запропоновану величину додаткової зовнішньої енергії $E_w \leq kE_0$ обраної якості, яка може дозволити вивести матеріальний потік J_w зі стану близького до термодинамічної рівноваги до нерівноважного стану;

- значення термодинамічного параметра $0<r\leq 4{,}06$ залежно від розрахункових значень зміни ентропії на кожному n-му етапі ітерації.

Розрахунку підлягали показники:

- величина термодинамічної сили X_0, що забезпечує цілеспрямовану зміну матеріального потоку J_0 до стану товарної продукції;

- величина необхідної термодинамічної сили X_w, яка здатна змінити матеріальний потік J_w до максимальної можливості корисної продукції;

- зміна ентропії системи, залежно від стану її нерівноважності, відповідно до відомих рівнянь Л. Онсагера, теореми І. Пригожина та ін., залежно від змісту та закономірностей самого технологічного процесу;

- зміна наведеної ентропії системи $\Delta S/E_0$ залежно від феноменологічного коефіцієнта $\lambda = \frac{X_0}{X_0+X_w}$ з подальшим виявленням параметра r на кожному наступному n-му етапі ітерації.

Статистична обробка результатів дослідження виконана за допомогою *програмного пакету Statistica 6.0. (StatSoft, Inc., США)* у повній відповідності до *U-критерію* Mann-Whitney.

Результати дослідження. У методичному плані, дані досліджень залежності $\frac{\Delta S}{E_0} = f(r)$ для різних технологій представлені на рис. 4 у вигляді відокремлених точок вихідних значень зміни ентропії (її математичного очікування $M_{\Delta S}$ та середньоквадратичної помилки $\pm\sigma_{\Delta S}$). З урахуванням похибок, отриманих шляхом обробки статистичних даних (залежно від вихідних даних для різних типів технологій), цифри на графіку в області подвоєння результатів можуть бути приблизно порівнянними с закономірностями, викладеними у роботі [9, с. 462]. У своєму різноманітті будь-яких технологій, ці дані мають певну кореспонденцію з графіками (див. рис. 3).

Розглянемо, наприклад, галузі переробки залізної руди. Дослідженню підлягали технології отримання агломерату (поз. 1), порівняні з нею технологія виробництва окатишів (поз. 2) і пелетизація гранул із збагаченої руди (поз. 3) з величезним початковим об'ємом відходів, і в порівнянні за параметрами $\Delta S_{\text{агл}}$ і $\Delta S_{\text{окат}}$ і $\Delta S_{\text{пел}}$ (рис. 4) відповідно. Порівняємо їх із технологіями отримання кольорових та важких металів (табл. 1), поз. 4-6.

З точки зору досяжності теоретичного мінімуму розділимо такі технології на дві групи. До першої віднесемо ті, для яких показник $0{,}7 < r \leq 2{,}6$ (наприклад, біологічне вилуговування або пелетизація збагачених руд), а до другої ті, для яких показник може досягати величини $r \leq 4{,}53$, а іноді і більше (тут, аглодоменне виробництво та отримання окатишів або аміачне вилуговування кольорових металів). При зіставленні таких груп технологій (рис. 4), стає очевидним істотна залежність стану відходоутворення від параметра r в межах гладкої термодинамічної нерівноважності, коли $0{,}7<r\leq 2{,}6$. На це вказує і діапазон змін ентропії в межах (0,41÷1,91) кДж/(кг·К). Але стає ясною і явна невизначеність у системі, коли розрахунковий параметр перевищує $r>2{,}6$, і навіть якщо теоретично $r>3{,}5$ - система здатна йти у стан некерованого хаосу, про що свідчать дані про різке збільшення зміни ентропії $\Delta S > (0{,}55 \div 4{,}86)$кДж/(кг·К). Якщо для технологій першої групи існує гіпотетична можливість «наближення» до теоретично обґрунтованої межі з відходоутворення, то для другої групи, через термодинамічні особливості технологічних процесів, а саме, надмірності, або навпаки, недостатності енергії $(E_0 + E_w)$ в порівнянні з сумарним матеріальним потоком $(J_0 + J_w)$, це неможливо.

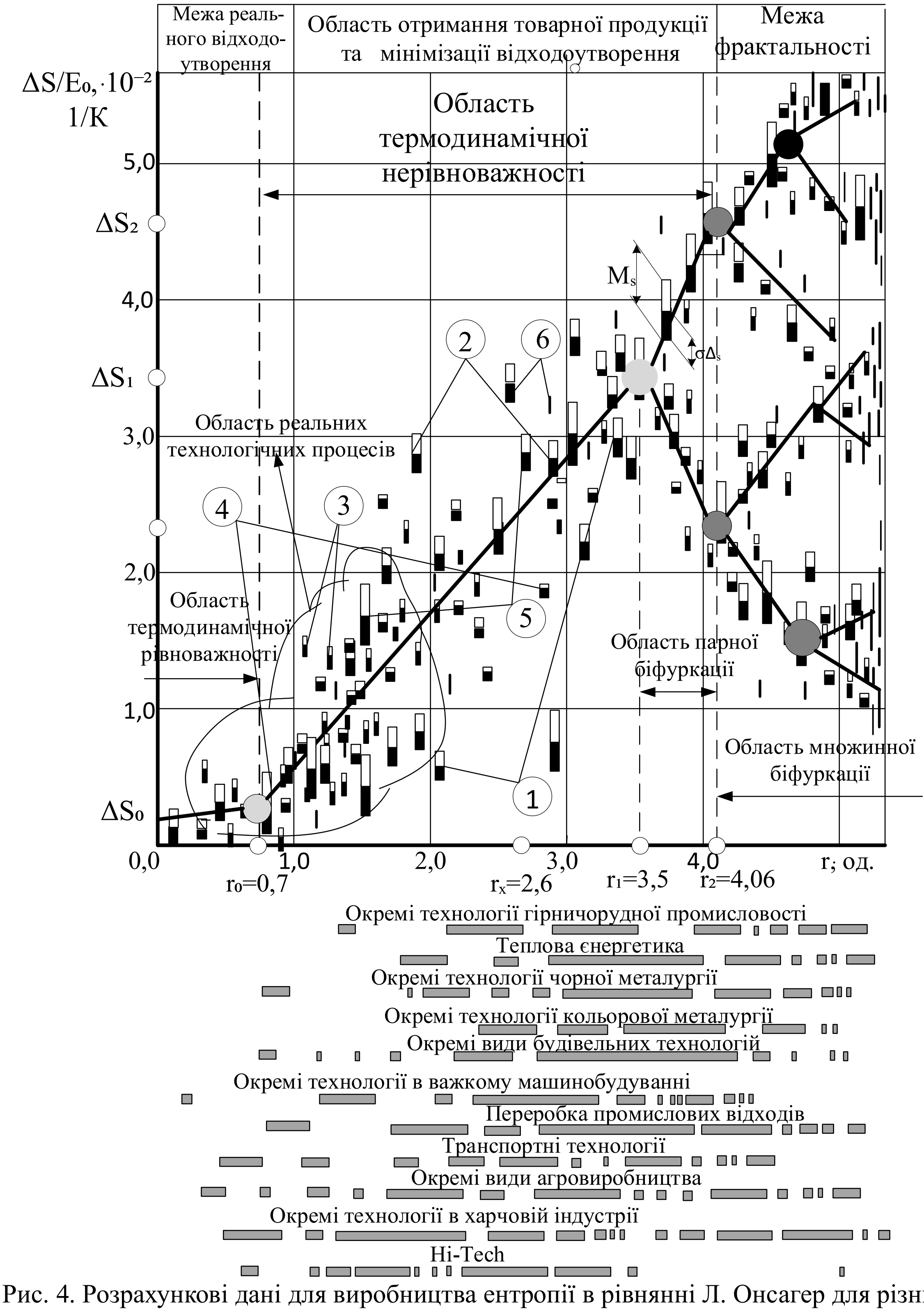


Рис. 4. Розрахункові дані для виробництва ентропії в рівнянні Л. Онсагер для різних технологічних процесів. а) група технологічних процесів, для яких *0,7<r≤2,6;* б)група технологічних процесів, для яких гіпотетична *2,6<r≤3,5.* Означення 1-6 відповідають поз., див. табл. 1

Таблиця 1. Порівняльні статистичні та розрахункові дані для деяких технологічних процесів, здатних претендувати на мінімальне відходоутворення (за даними робіт [11, p.p. 1012, 1027, 12, p. p. 323-325, 13, p.p. 9-13, 17- 18; 14, p.p. 188-189; 15, p.p. 187-189, 331, 327; 16, p.p.3-5; 17, p.p.11-12, 14-16]).

№№ поз.	Найменування технологічного процесу	Продуктивність, тонн на рік	Енерго-витрати, ГДж/т	Об'єми відходів, $м^3/т$	Зміна ентропії	
					r	ΔS
1	Агломераційне Виробництво	$5{,}4\cdot 10^6$	4,0-6,0	газ: 1000 пил: 11,0 кг/т	2,69 3,40 4,11	0,65 2,95 3,61
2	Виробництво окатишів для технології прямого відновлення заліза	$2{,}2\cdot 10^6$	3,0-5,0	газ: 600 пил: 5,0 кг/т	2,90 3,10 4,53	2,91 3,15 4,86
3	Пелетизація гранул із збагаченої руди	$6\cdot 10^6$	0,7-1,0	залишки шламу: 5кг/т	1,44 1,29 1,05	1,35 1,45 1,19
4	Аміачне вилуговування міді.	50000	1,5-2,0	1,0-2,0	0,88 2,91 3,65	0,55 3,85 4,79
5	Біологічне вилуговування міді	10000	1,0	0,5-1,0	1,66 1,75 1,26	1,62 1,91 0,41
6	Цементація із заміщенням більше активними металами	10000	0,5	0,3-0,7	2,65 2,91 3,45	3,41 3,25 4,38

У такому вигляді відходоутворювальна система здатна працювати як кластерно структурована одиниця наближена до самоподібності на межі фрактальності. Кластерна система технологічного процесу, окрім енергетичного кластеру, передбачає дві нерівнозначні структури – компонентна сировина, що складає основу товарної продукції та утворюється з первинних компонентів, і частина сировини, що складає основу відходу та має свої компоненти.

Щоб визначити такі, здавалося б на перший погляд, штучні межі та обмеження, розглянемо графіки (рис. 4) з погляду їх співвідносності. Для нелінійних систем, що розглядаються, умови переходу від термодинамічної нерівноважності до умовного хаосу в інтервалах до біфуркаційного подвоєння періоду, зв'язуються константою Фейгенбаума *Fu≈4,669*, а станам з інтервалами множинного біфуркаційного подвоєння, що переходить в хаос відповідає $Fu \approx 2{,}502$ [18] . Константа Фейгенбаума відображає зменшення відстаней між попередніми та наступними біфуркаціями у напрямку їх множинності і, в кінцевому результаті, до області хаосу.

У цілому, для періоду першого подвоєння на графіку запишемо наступне відношення, що виходить з практичних результатів: $Fu_r = \frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_1} = \frac{3{,}45-0{,}71}{4{,}06-3{,}45} = 4{,}49$, що для цього періоду можна порівняти з першою константою Фейгенбаума, умовно позначеною тут як Fu_r, і рівною 4,669. Розкид із експериментальними даними становив 3,98 %, що цілком задовільно. У свою чергу, отримане з графіка відношення Фейгенбаума, умовно позначене як $Fu_{\Delta S} = \frac{[\Delta S_1]-[\Delta S_0]}{[\Delta S_2]-[\Delta S_1]}$; $Fu_{\Delta S} = \frac{3{,}45-0{,}01}{4{,}61-3{,}45} = 2{,}96$, з певною похибкою можна зіставити зі значенням другої константи Фейгенбаума $Fu_{\Delta S}$, що дорівнює 2,502. Похибка в даному випадку складає 18,26% і навіть може досягти 25%, що є слабко порівнянним результатом з теоретичними даними. Це й не дивно, якщо взяти до уваги ті припущення, які були запропоновані для узгодження виразів (1) та (3). Проте, отримані значення таких властивостей систем, як Fu_r і $Fu_{\Delta S}$, показують, що об'єкти нашого дослідження можуть підпадати під закономірність невизначеності біфуркаційних систем. Можна висловити припущення, що саме такі механізми множинної біфуркації та хаосу, пов'язаного з різноманіттям довільностей, які присутні в будь-якому технологічному процесі, особливо при штучному підведенні до неї додаткової енергії $E_w < kE_0$, або $E_w \gg kE_0$ здатні опосередковано спричиняти лавиноподібні процеси непередбачуваної переробки, навіть частини сировинного матеріального потоку, з якого передбачалося отримання товарної продукції (у виробництві це називається «брак»), свідками якого ми є. Цей стан дуже далекий від системного, і тим більше нагадує некерований хаос.

Виявлення чисельного значення коефіцієнта пропорційності між базовою та додатковою енергіями $(\boldsymbol{k})$**.** Зіставимо вказані вище дослідження з прикладними результатами для існуючих технологій у галузі одного з найбільш забруднюючих виробництв – металургійного.

Наука та практика накопичила достатній досвід у технологіях виробництва сталі, одного з найтехнологічніших матеріалів сучасності. Загальний річний обсяг виробництва сталі у світі становить 1,888 млрд. тон. А загальна світова металомісткість по сталі, що міститься в різних об'єктах, які створювала людина, в різних галузях промисловості і конструкціях досягає 35 млрд. тон оборотного металу, включаючи сталь, що знаходиться на етапі вторинної переробки (брухт). Всього в історії сталеплавильного виробництва було створено кілька десятків технологічних процесів, основні з таких (табл. 2), що знайшли практичне застосування, прийняті до уваги у цих дослідженнях (рис. 5), що виконані за методикою, визначеною вище.

Таблиця 2. Скорочена характеристика основних технологічних процесів одержання сталі та їх відходів, наведених до одиниці товарної продукції.

№№ п/п	Найменування технології	Короткий опис технологічного процесу
Технології прямої спрямованості		
I	Томасівський процес	Полягає у продуванні розплавленого чавуну повітрям через дно конвертера, що дозволяє видалити домішки, такі як фосфор. Метод був економічний і підходив для переробки залізняку з високим вмістом фосфору. **Відходи:** шлак, пил, металевий брухт
II	Безсемерівський процес	Включає продування повітря через розплавлений чавун у конвертері. Процес відрізняється високою швидкістю, але чутливий до складу вихідного металу, зокрема до вмісту фосфору та сірки. **Відходи:** шлак, пил
III	Мартенівський процес	Заснований на нагріванні чавуну та залізного брухту у великому регенеративному мартенівському пічному агрегаті. Перевагами методу є можливість використання різних видів сировини та ретельний контроль хімічного складу сталі. **Відходи:** шлак, пил, металобрухт, шлам
IV	Киснево-конвертерний процес	Заснований на продуванні рідкого чавуну чистим киснем, що забезпечує більш швидке та ефективне видалення домішок. Технологія є однією з

		найпоширеніших у сучасному сталеплавильному виробництві завдяки своїй енергоефективності. **Відходи:** шлак, пил, окалина
V	Технологія прямого відновлення заліза	Відновлення залізної руди до заліза у твердому стані з використанням природного газу або вугілля при температурі близько 800–1200°C. Отримане залізо може бути використане в електропечах для виробництва сталі. **Відходи:** металева окалина, пил, залишки вуглецевих матеріалів.
VI	Електросталеплавильний процес	Використовується електрична енергія для плавки металевого брухту та залізорудних матеріалів. Метод дає високу якість сталі та широко використовується для спеціальних сталей. **Відходи:** шлак, пил, відпрацьовані вогнетриви, металевий брухт

Кожен з цих технологічних процесів пов'язаний з різними за потужністю та якістю джерелами енергії E_0, кожен з них має свою специфічну номенклатуру відходів. І одним із суттєвих завдань, які треба вирішувати в них, полягає у максимально можливій мінімізації відходів у межах самого технологічного процесу. Про це свідчить хоча б динаміка відходоутворюючих втрат для кожної технології в міру зростання її енергонасиченості та специфіки сировини. Причому кількість відходів, що приводиться до одиниці одержуваної товарної продукції, залежно від кількості та якості зовнішньої енергії, специфіки самого технологічного процесу (умови протікання фізико-хімічних реакцій), дає умовну лінійку зміни ентропії ΔS залежно від заданих значень термодинамічних коефіцієнтів r i λ та поведінки самої системи, а саме, від співвідношення E_w/E_o (рис. 5).

По-перше, відмітимо, що зсув вправо від стандартного значення кожної величини в цих залежностях складає, наприклад, 7,3:4,5=1,62 частки від сумарної енергії, яку технологічний процес спроможний поглинути, без перекидання в хаотичний стан. Або 4,79:2,95=1,62 - частки від зміни ентропії системи приведеної до базової енергії системи, що вказує на незмінність внутрішньої енергії суто технологічного процесу в межах такої енергетичної інтервенції. З цього виходить існування класичного співвідношення

$$E_0 + E_w \rightarrow 1{,}62 \text{ або } E_w{\sim}kE_0, \text{ де } k = 0{,}62. \quad (5)$$

кількісне значення якого дійсне, принаймні, для металургійних технологій.

Два показники, що впливають на мінімізацію відходів у джерелі їх виникнення – технологічному процесі, це термодинамічна нерівноважність, як залежність від представленого термодинамічного коефіцієнта r і енергонасиченість технологічного процесу, що забезпечує цілеспрямовану переробку не тільки основного сировинного потоку J_0 в корисну продукцію, але й тій частини сировини J_w , яка у звичайній системі прямує у відхід. Для цього на графіках (рис. 5) показано криву зміни ентропії, наведеної до вихідної енергії системи. Її аналіз спільно з графіком (рис. 3) дає уявлення про ті технологічні процеси, які мають суттєвий резерв для мінімізації відходів, наближаючи його до теоретично обґрунтованого рівня.

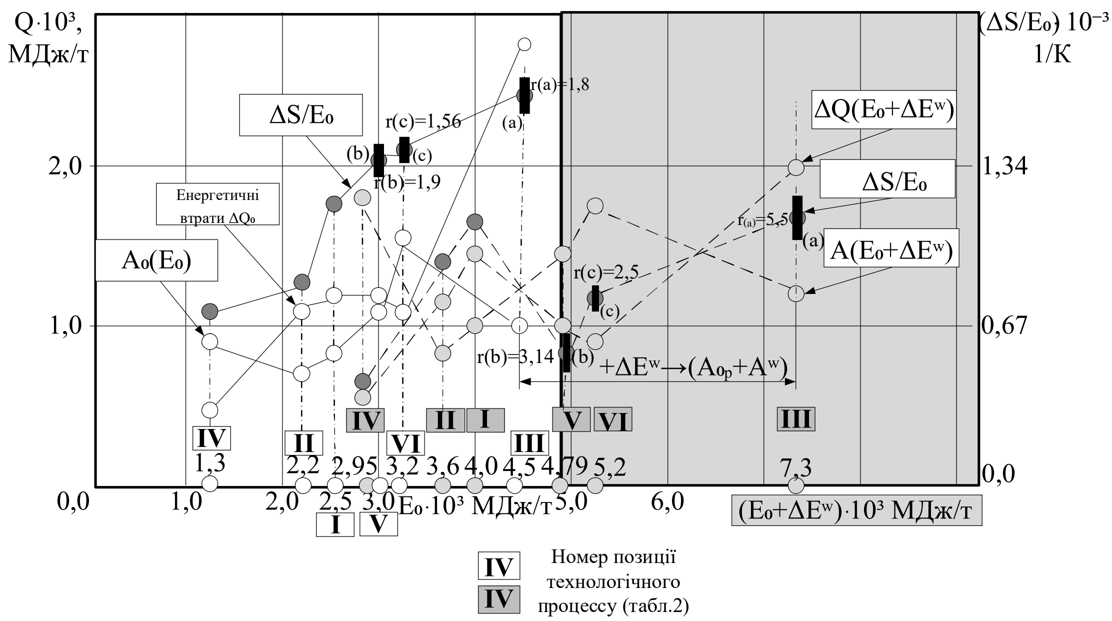


Рис. 5. Енергетичні та ентропійні залежності для визначення області термодинамічної нерівноважності, як показника досяжності теоретичного мінімуму відходоутворення в технологіях отримання сталі: I-томасівський, II - безсемерівський, III - мартенівський, IV - киснево-конвертерний, V - пряме відновлення заліза, VI - електросталеплавильний процес. (Затінена частина та пунктирний графік відносяться до області взаємодії з додатковою енергією E_w в системі)

Наприклад, додаткова енергія ΔE_w для відходоутворюючого мартенівського процесу (точки *«а»)* зі співвідношенням параметрів r_a в межах $5{,}5{:}\,1{,}8 = 3{,}05 \gg 1{,}62$ здатна привести систему в деякий нестійкий стан, в якому не існує певної термодинамічної нерівноважності. І, водночас, технології прямого відновлення заліза та електродугового переплаву (див. точки *«b» і «c»* відповідно) дають співвідношення параметрів r_B (3,14:1,9=1,65) та r_C (2,5:1,56=1,60) відповідно, тобто вказують на досяжність стану термодинамічної нерівноважності в таких технологіях при підведенні до них енергії іншої якості з розрахунку (6) $E_W\sim 0{,}62E_0$. При цьому системи не йдуть у стан множинних біфуркацій та подальшого хаосу, що перешкоджають якісному впливу на потенційну відходоутворюючу сировину.

Співвідношення потрібної додаткової та базової енергії в системі у розмірі 0,62, як збіг обставин, дуже близьке до так званого «Золотого перетину» - 0,618, відомого, як основа краси та гармонії в багатьох природних та антропогенних явищах. Залишимо цей факт як цікаве, але недоказане співпадіння. Принаймні, розрахункові значення вищенаведеного коефіцієнта, близького до числа 0,618, як умова мінімізації утворення відходів у джерелі утворення відходів – технологічному процесі, можуть свідчити про наближення до ідеального кінцевого результату і потребують додаткових досліджень. Подібний аналіз легко здійснити і для інших технологічних процесів, вказавши конкретні енергетичні параметри з подальшим розрахунком наведеної ентропії та визначення термодинамічного коефіцієнта, заради співвідношення $k = E_w/E_0$. Результати можуть знайти застосування при прогнозуванні розвитку сучасних технологій, а також як подальше дослідження.

Висновки та перспективи подальших досліджень. 1.Умовою мінімізації відходів усередині джерела їх виникнення – технологічному процесі, крім стану сильної термодинамічної нерівноважності, є достатність додаткової зовнішньої енергії E_w заданої якості.

2. Для того, щоб вивести ту частину сировини, з якої зазвичай виходить відхід зі стану термодинамічної рівноваги і перевести її в стан слабкої нерівноважності, в систему необхідно ввести додаткову енергію в розрахунковому розмірі не менше 62% від базової енергії, що використовується, принаймні в металургійних процесах.

3.Попадання термодинамічної системи до зони парної біфуркації за параметрами феноменологічного рівняння не знижує можливості для технологічного процесу у досягненні теоретичного мінімуму відходоутворення.

4. Механізм переходу виробничої системи з додатковими джерелами енергії зі стану парної біфуркації та відповідного їй стану термодинамічної нерівноважності в стан біфуркаційної парної множинності, і далі до хаосу, є тим розрахунковим обмеженням для технологічного процесу, який лімітує досягнення теоретичного мінімуму відходоутворення, що заявляється.

5. Причини існуючих лавиноподібних процесів виробництва відходів у виробництві можна шукати в порівнянні параметрів реального технологічного процесу в його термодинамічному аспекті на межі з механізмами хаосу Фейгенбаума, пов'язаного з різноманіттям невизначеностей, які, через такі механізми, опосередковано присутні в будь-якому виробництві товарної продукції.

6. Розуміння процесів виникнення відходів та межі їх мінімізації в джерелі виникнення – технологічному процесі, як відходоутворюючої системи, лежить у властивостях кластерної структури матеріальних потоків її сировини та енергії на межі фрактальності всієї системи.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Волошин В. С. Відходи та термодинаміка. Київ: ФОП Самченко, 2024. 80 с.
2. Волошин В. С. Про деякі закономірності щодо мінімізації відходів у джерелі їх виникнення – технологічному процесі. *Екологічні науки*. 2024. №55. С. 84-89.
3. Prigogine I. Thermodynamics of Irreversible Processes. Wiley-Interscience, 1961. 119 p.
4. Nicolis G., Prigogine I. Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations. Wiley, 1977. 491 p.
5. Voloshyn V. S. Alternative method of control over wastes – a contemporary challenge in technology and economics. *Development of the Innovative Environmental and Economic system in Ukraine*. Monografia. Prague: Oktan Print s.r.o., 2019. P. 108-120.
6. Волошин В. С. Відходи та їх природа. Київ: ФОП Самченко, 2024. 630 с.
7. Bejan A. Advanced Engineering Thermodynamics. John Wiley & Sons, Inc., 2016. 746 p.
8. Moran M. J., Shapiro H. N. Fundamentals of Engineering Thermodynamics. 8th Edition. Chichester, West Sussex, England: John Wiley & Sons, Inc., 2014. 847 p.
9. May R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*. 1976. Vol. 261 (5560). P. 459-467. DOI: http://dx.doi.org/10.1038/261459a0
10. Mann H. B., Whitney D. R. On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1947. Vol. 18, № 1. P. 50-60. DOI: http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177730491
11. Cheng Hu, Zhendong Yang, Miao He act. From Waste to Wealth: Current Advances in Recycling Technologies for Metal Recovery from Vanadium-Titanium Magnetite Tailings. *Journal of Sustainable Metallurgy*. 2024. № 3. P. 1007-1035. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s40831-024-00847-w

12. Fuerstenau M. C., Jamison G., Yoon R.-H. Froth Flotation: A Century of Innovation. Colorado: Society for Vining, Metallurgy and Exploratiors Inc., 2007. 891 p.
13. Dutta S. K. Direct Reduction of Iron Ore: Principles and Practice. CRC Press. 2020. 27 p.
14. Gupta C. K., Mukherjee T. K. Hydrometallurgy in Extraction Processes. Boca Raton: CRC Press, 1990. Vol. 1. 248 p.
15. Habashi F. Principles of Extractive Metallurgy. London: Routledge, 1986. 494 p. DOI: https://doi.org/10.1201/9780203742112
16. Brierley C. L. A perspective on developments in biohydrometallurgy. *Hydrometallurgy*. 2008. Vol. 94, № 1. P. 2–7. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.hydromet.2008.05.014
17. Dreisinger D. Copper leaching from primary sulfides: Options for biological and chemical extraction of copper. *Hydrometallurgy*. 2006. Vol. 83, № 1–4. P. 10–20. DOI: https://doi.org/10.1016/j.hydromet.2006.03.032
18. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*. 2006. Vol. 19, № 1. P. 25-52. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF01020332

UDC 523.43

Regarding the question of the attainability of the theoretical minimum of waste generation as a physical phenomenon in technological processes

Vyacheslav Voloshyn, Vadym Burko

Abstract. The article presents the results of research related to the concept of the theoretical minimum of waste generation as a physical characteristic of the technological process. With references to the classic works of I. Prigozhin, L. Onsager, M. Feigenbaum, the limit limits imposed on thermodynamic conditions are shown, which ensure in the technological process not only the production of the main marketable product, but also waste. It is shown that the condition for minimizing waste within the source of their occurrence is technological process, in addition to the state of strong thermodynamic disequilibrium, there is the sufficiency of additional external energy E_w of a given quality, in the calculated volume of at least 62% of the energy used in the technological process. On the basis of computational and experimental examples, it is shown that the entry of the thermodynamic system into the zone of paired bifurcation, according to the initial parameters of the phenomenological equation of L. Onsager, sharply reduces the possibilities of the technological process to achieve the theoretical minimum of waste generation. A reasonable comparison of the technological process in its thermodynamic aspect with the mechanisms of the Feigenbaum chaos associated with the variety of uncertainties that are present in any production of marketable products, through such mechanisms, indirectly, lead to avalanche-like processes of waste generation.

Keywords: thermodynamic disequilibrium, industrial waste, physical entity, theoretical minimum of waste generation, external energy, entropy, thermodynamic duality.

References

1. Voloshyn, V. S. (2024). *Waste and thermodynamics*, FOP Samchenko, Kyiv. [in Ukrainian]
2. Voloshyn, V. S. (2024). *About some regularities regarding the minimization of waste in the source of their occurrence - the technological process*, Environmental Sciences, **55**, 84-89. [in Ukrainian]
3. Prigogine, I. (1961). *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Wiley-Interscience.
4. Nicolis, G., Prigogine, I. (1977). *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*, Wiley.
5. Voloshyn, V. S. (2019). *Alternative method of control over wastes – a contemporary challenge in technology and economics*, Development of the Innovative Environmental and Economic system in Ukraine, Monografia, Oktan Print s.r.o., Prague, 108-120.
6. Voloshyn, V. S. (2024). *Waste and Their Nature*, FOP Samchenko, Kyiv. [in Ukrainian]
7. Bejan, A. (2016). *Advanced Engineering Thermodynamics*, John Wiley & Sons, Inc.
8. Moran, M. J., Shapiro, H. N. (2014). *Fundamentals of Engineering Thermodynamics. 8th Edition*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, West Sussex, England.
9. May, R. M. (1976). *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261** (5560), 459-467. http://dx.doi.org/10.1038/261459a0
10. Mann, H. B., Whitney, D. R. (1947). *On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other*, The Annals of Mathematical Statistics, **18** (1), 50-60. http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177730491

11. Cheng, Hu, Zhendong, Yang, Miao, He act. (2024). *From Waste to Wealth: Current Advances in Recycling Technologies for Metal Recovery from Vanadium-Titanium Magnetite Tailings*, Journal of Sustainable Metallurgy, **3**, 1007-1035. http://dx.doi.org/10.1007/s40831-024-00847-w
12. Fuerstenau, M. C., Jamison, G., Yoon, R.-H. (2007). *Froth Flotation: A Century of Innovation*,Society for Vining, Metallurgy and Exploratiors Inc., Colorado.
13. Dutta, S. K. (2020). *Direct Reduction of Iron Ore: Principles and Practice*, CRC Press.
14. Gupta, C. K., Mukherjee, T. K. (1990). *Hydrometallurgy in Extraction Processes*, CRC Press, Boca Raton, **1**.
15. Habashi, F. (1986). *Principles of Extractive Metallurgy*, Routledge, London. https://doi.org/10.1201/9780203742112
16. Brierley, C. L. (2008). *A perspective on developments in biohydrometallurgy*, Hydrometallurgy, **94** (1), 2–7. http://dx.doi.org/10.1016/j.hydromet.2008.05.014
17. Dreisinger, D. (2006). *Copper leaching from primary sulfides: Options for biological and chemical extraction of copper*, Hydrometallurgy, **83** (1–4), 10–20. https://doi.org/10.1016/j.hydromet.2006.03.032
18. Feigenbaum, M. J. (2006). *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, Journal of Statistical Physics, **19** (1), 25-52. http://dx.doi.org/10.1007/BF01020332

Про авторів / About the authors

В’ячеслав Волошин, доктор технічних наук, професор, кафедра промислових теплоенергетичних установок і теплопостачання, Приазовський державний технічний університет, вул. Гоголя, 29, м. Дніпро, 49044, Україна;

Vyacheslav Voloshyn, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Industrial Thermal Power Plants and Heat Supply, Pryazovsky State Technical University, 29 Gogol Str., Dnipro 49044, Ukraine;

Вадим Бурко, кандидат технічних наук, доцент, кафедра промислових теплоенергетичних установок і теплопостачання, Приазовський державний технічний університет, вул. Гоголя, 29, м. Дніпро, 49044, Україна;

Vadym Burko, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Industrial Thermal Power Plants and Heat Supply, Pryazovsky State Technical University, 29 Gogol Str., Dnipro 49044, Ukraine.

Отримано / Received 22.01.2025
Прийнято до друку / Accepted 12.02.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 52–62.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 52–62.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 575.224.6:621.375.82:612.111

Дослідження впливу низькоінтенсивного лазерного випромінювання на реологічні властивості крові

Вікторія Думенко

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна
viktoriya.dumenko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1569-3677

Анотація. Обгрунтовано фізичні механізми впливу лазерного випромінювання на реологічні властивості крові і процеси в реології крові та гемодинаміці та представлено результати досліджень зміни реологічних властивостей еритроцитів при захворюванні мієлома, а саме визначення зміни довжини еритроцитарних ланцюжків та зміни відсоткового значення числа патологічних форм еритроцитів під впливом лазерного випромінювання методом оптичної цифрової мікроскопії із застосуванням програмного забезпечення. Було виявлено терапевтичний вплив лазерного випромінювання на реологічні властивості крові при мієломі, залежно від часу та потужності лазерного джерела.

Ключові слова: лазерне випромінювання, агрегація, еритроцити, реологія крові, оптична мікроскопія.

1. Вступ

На сьогодні спостерігається суттєве зростання кількості серцево-судинних захворювань, тому чіткі уявлення про закономірності руху крові необхідні для розуміння механізмів виникнення захворювань і вжиття заходів щодо їх профілактики та лікування.

Раннє виникнення мікрореологічних розладів крові призводить до порушення кровотоку в системі мікроциркуляції, яка приймає на себе

перший удар при виникненні патологічного процесу, і сприяє прогресуванню морфологічних ознак захворювання.

Реологічні властивості крові обумовлені, головним чином, процесами гідродинамічної взаємодії еритроцитів з плазмою, які сприяють утворенню і розпаду агрегатів, обертанню і деформації еритроцитів, їх перерозподілу і відповідної орієнтації в потоці крові.

Дослідження представлені в роботі [1] показали, що лазерне випромінювання, якщо воно використовується в низьких дозах і низькій густині потужності, викликає деякі зміни реологічних факторів крові, а саме: оживляючий і регенеруючий ефект на

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-11

стимуляцію мітозу та непошкоджувальний і біостимулюючий ефект на клітинну мембрану.

Лазерне опромінення може модулювати властивості гемореології, включаючи в'язкість крові, швидкість осідання еритроцитів, деформованість еритроцитів і електрофоретичну рухливість еритроцитів. Опромінення лазером з довжиною хвилі 532 нм показало кращий ефект, ніж лазер з довжиною хвилі 632,8 нм, на покращення реологічних параметрів [2].

У дослідженні [3] було проаналізовано вплив на спектр поглинання цільної крові та еритроцитів після 405 нм низькорівневого лазерного опромінення, щоб продемонструвати ефективність низькорівневої лазерної терапії для рівня ліпідів крові гіперліпідемії in vitro.

Для вивчення впливу гіперхолестеринемії на еритроцити визначали спектр поглинання як еритроцитів, так і цільної крові. Ці результати показали, що характерні піки поглинання (416 нм, 544 нм, 578 нм) еритроцитів у групі з високим вмістом CHO були вищими, ніж еритроцити в нормальній крові. Після опромінення абсорбція зразків цільної крові зросла, а еритроцитів знизилася. Концентрація позаклітинного холестерину підвищена. Можна припустити, що холестерин відділився від еритроцита. Збагачення еритроцитів холестерином призводить до зниження деформованості та текучості, а також до зміни форми та реологічних параметрів цих клітин . Це може призвести до погіршення функціональних властивостей, включаючи мембранозв'язані ферменти та реологічні властивості, такі як осмотична крихкість, що може сприяти атеросклеротичним ураженням [3,4].

Вплив на клітинному рівні пояснюють довжиною хвилі, яка використовується під час втручання. Фундаментальний принцип полягає в тому, що фотони, випромінювані лазерами, поглинаються хромофорами, спеціалізованими рецепторами зі смугами поглинання електронів, викликаючи низку біологічних реакцій . Наприклад, довжини хвиль зеленого (495–570 нм) і синього (400–500 нм) світла впливають на такі компоненти, як ланцюг транспортування електронів, опсини, флавіни, флавопротеїни, порфірини та нітритредуктази, що містять оксид азоту [5]

Для дослідження стану кровообігу важливим є визначення рівня сатурації крові, в'язкості крові, що вирішується різними методами, серед яких важливими перевагами володіють оптичні методи [6-8].

2. Постановка проблеми

Мікрореологічні зміни в крові, пов'язані, насамперед, зі змінами властивостей еритроцитів, зокрема агрегаційної здатності, що безпосередньо впливає на в'язкість крові. На сьогодні розроблено ряд методів для ранньої діагностики та терапії в реології крові. Найбільші переваги при цьому мають лазерні методи, які дають можливість не тільки виявляти, але й впливати на зміни реологічних характеристик основних елементів крові. Серед оптичних методів для вирішення проблем реологічних розладів застосовуються метод лазерної дифрактометрії, який є досить новим і перспективним та метод оптичної цифрової мікроскопії, що має більш широкі можливості із розвитком сучасних засобів.

Мета статті: обґрунтувати фізичні механізми в реології крові і гемодинаміці та експериментально дослідити зміни агрегаційної здатності та кількості патологічних форм еритроцитів при опромінюванні лазерним випромінюванням.

3. Результати досліджень

Реологічні властивості крові залежать від багатьох факторів. Їх умовно можна розділити на кілька груп:

1) гемодинамічні фактори, обумовлені зміною властивостей крові при її русі;

2) клітинні фактори, пов'язані зі зміною характеристик формених елементів (головним чином еритроцитів) і їх концентрації;

3) плазмові фактори;

4) фактори взаємодії, під якими найчастіше розуміють різні прояви феномена внутрішньосудинної агрегації формених елементів крові.

Основною властивістю крові, що визначає її текучість, є динамічна в'язкість, яка в свою чергу залежить від ряду інших властивостей крові. В'язкість крові залежить, головним чином, від концентрації еритроцитів і швидкості потоку крові. Якщо швидкість течії крові зменшується, еритроцити збираються в специфічні скупчення, так звані "монетні стовпчики".спектральних смуг. Так званий 0-0-перехід між найнижчими коливальними рівнями лише злегка виражений, оскільки перекривання відповідних хвильових функцій мале. З цієї причини спектр флуоресценції завжди зміщується в бік більш низьких енергій ΔW, що відповідає великим довжинах хвилі $\lambda = \frac{\Delta W}{hc}$, в порівнянні зі спектром поглинання, або збудження.

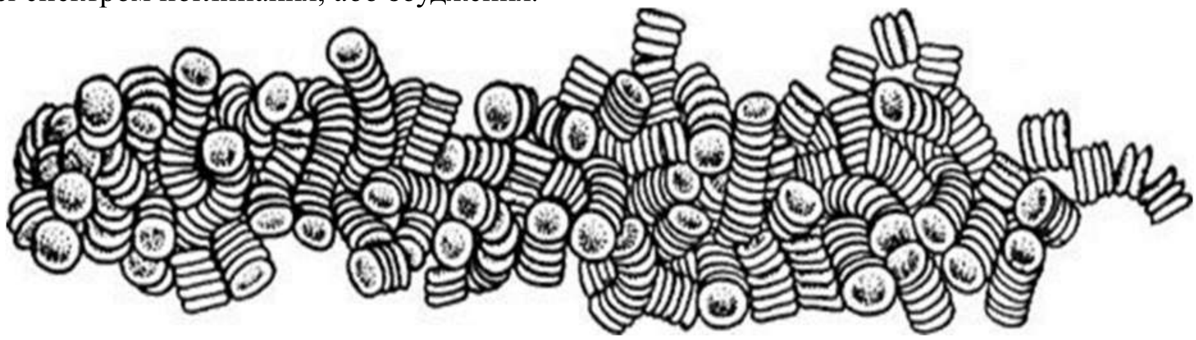


Рис. 1. Агрегація еритроцитів

Фізіологічна агрегація еритроцитів є оборотним процесом. В здоровому організмі безперервно відбувається динамічний процес «агрегація - дезагрегації». Дезагрегація в організмі домінує над агрегацією. Здатність еритроцитів формувати агрегати залежить від наступних факторів: гемодинамічних, плазмових, електростатичних, механічних і ін. На сьогоднішній день існує кілька теорій, здатних пояснити механізм агрегатоутворення. Найбільш популярною в наш час є теорія мостикового механізму. Відповідно до цієї теорії на поверхні еритроцита адсорбуються містки з фібриногену або інших велико-молекулярних білків, зокрема Y-глобулінів. Ці білки при зменшенні сил зсувних деформацій активізують агрегацію еритроцитів. Механізм фіксації на еритроцитах негативно заряджених макромолекул: фібриногену, Y-глобулінів - поки не цілком зрозумілий. Цілком ймовірно, що об'єднання молекул відбувається за рахунок слабких водневих зв'язків і дисперсних сил Ван-дер-Ваальса. До природних індукторів агрегації відносять в першу чергу фібриноген. Фібриноген - безбарвний волокнистий білок з групи глобулінів, розчинений в плазмі крові. Довжина молекули фібриногену в 17 разів перевищує ширину. Завдяки такій асиметрії фібриноген здатний перекидатися у вигляді «містка» з однієї клітинної мембрани на іншу утворюючи при цьому зв'язок і розривається під дією мінімального механічного зусилля. Тіснішому зближенню еритроцитів і їх незворотному скріпленню між собою перешкоджає негативний мембранний потенціал. Слід зазначити, що агрегація еритроцитів процес швидше нормальний, ніж патологічний. При утворенні агрегатів знижується відношення поверхні до об'єму. Як наслідок, опір агрегату тертя виявляється значно менше, ніж опір окремих його складових.

В’язкість крові з фізичної точки зору визначається формулою Ньютона:

$$F = \eta' \mathrm{d}\vartheta \mathrm{dZS} \tag{1}$$

При цьому коефіцієнт в’язкості крові буде визначатися формулою і концентрацією еритроцитів:

$$\eta' = \eta(1 + \mathrm{KC}), \tag{2}$$

де К – геометричний фактор, який залежить від форми і розмірів еритроцитів, С – концентрація еритроцитів.

Для опису впливу на реологічні властивості крові патологічних змін, викликаних різноманітними захворюваннями застосовують реологічну модель. Закономірності руху такої модельної рідини в судинах у випадку стаціонарного руху крові в судинах круглого перерізу описуються законом Пуазейля:

$$\mathrm{Q} = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{l} r_0^4 = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(\frac{d}{2}\right)^4, \tag{3}$$

де l – довжина судини.

Середня швидкість руху крові по судинах виражається:

$$\mathrm{U_{cp}} = \frac{\mathrm{Q}}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p}{8 l \mu} r_0^2 \ . \tag{4}$$

Величина коефіцієнта опору:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{R_e}}, \quad \text{де} \quad \mathrm{R_e} = \frac{\mathrm{U_{cp}} \cdot d}{\vartheta}. \tag{5}$$

Формула (5) виражає закон опору ламінарного руху в’язкої рідини в циліндричній судині.

Рух крові по судині має осьову симетрію, тому розглядається як циліндрична система координат. Вісь z направляємо по осі судини, полярну вісь r направимо по його радіусу. Поле швидкостей з компонентами v_r, v_z залежить від змінних z, r, t.

Рівняння Нав'є - Стокса в циліндричній системі координат мають вигляд:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r v_z)}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

де ρ – густина крові, μ - в’язкість крові, P – тиск.

Експериментальні дослідження проводились зі зразками крові із захворюванням мієлома. В якості джерел опромінювання крові застосовувались:

- напівпровідниковий лазер потужністю 5 мВт, довжиною хвилі 650 нм;
- He-Ne лазер потужністю 1 мВт і довжиною хвилі – 632,8 нм.

Цифровий мікроскоп Bresser LCD 40x-1600x. Результати досліджень аналізувались з використанням комп’ютерного програмного забезпечення.

Досліджувалась зміна довжини агрегатів еритроцитів при лазерному опроміноюванні He-Ne лазер потужністю 1 мВт і довжиною хвилі – 632,8 нм в залежності від тривалості дії (рис. 2 – 5).

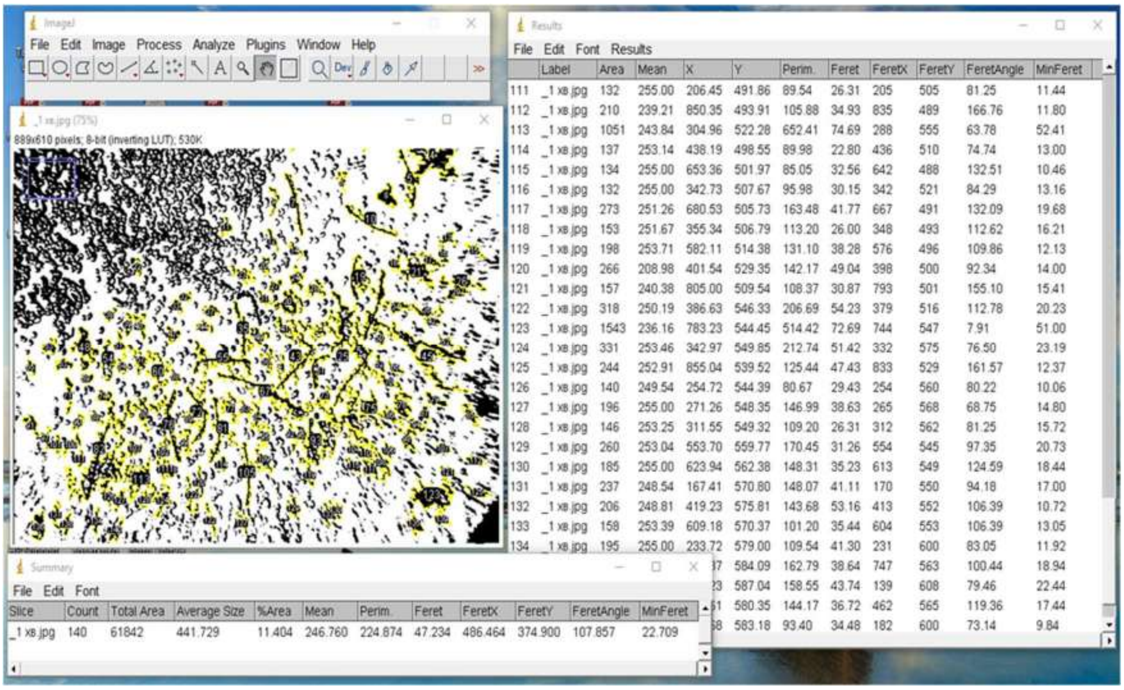


Рис. 2. Зображення зразка після опромінення t = 30 секунд

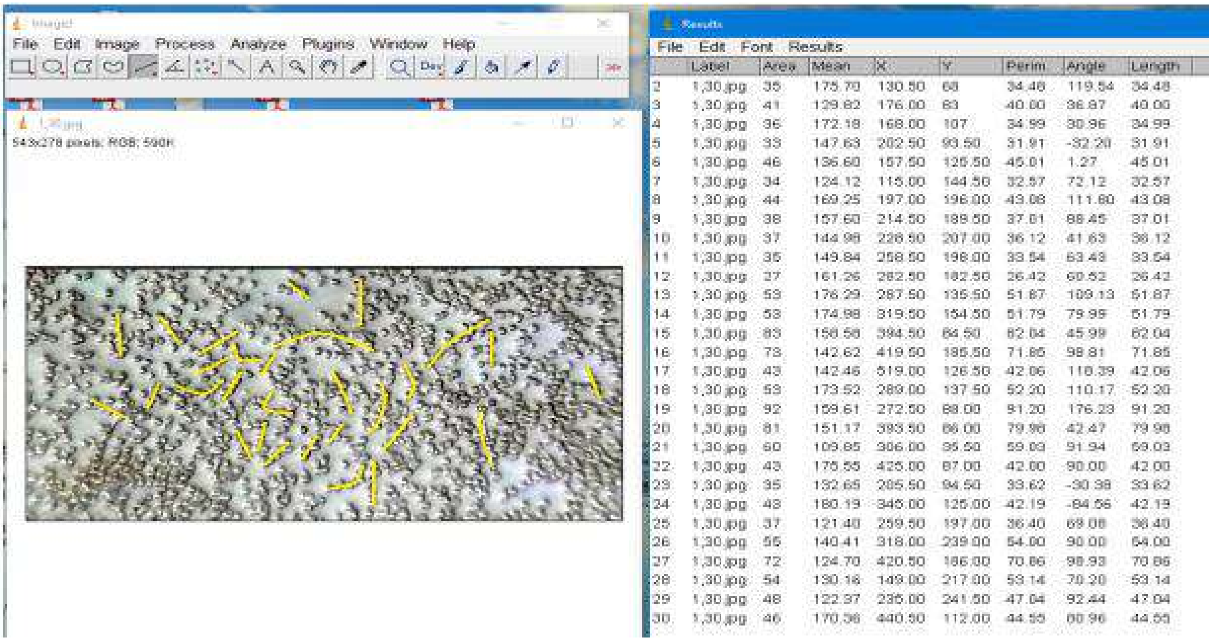
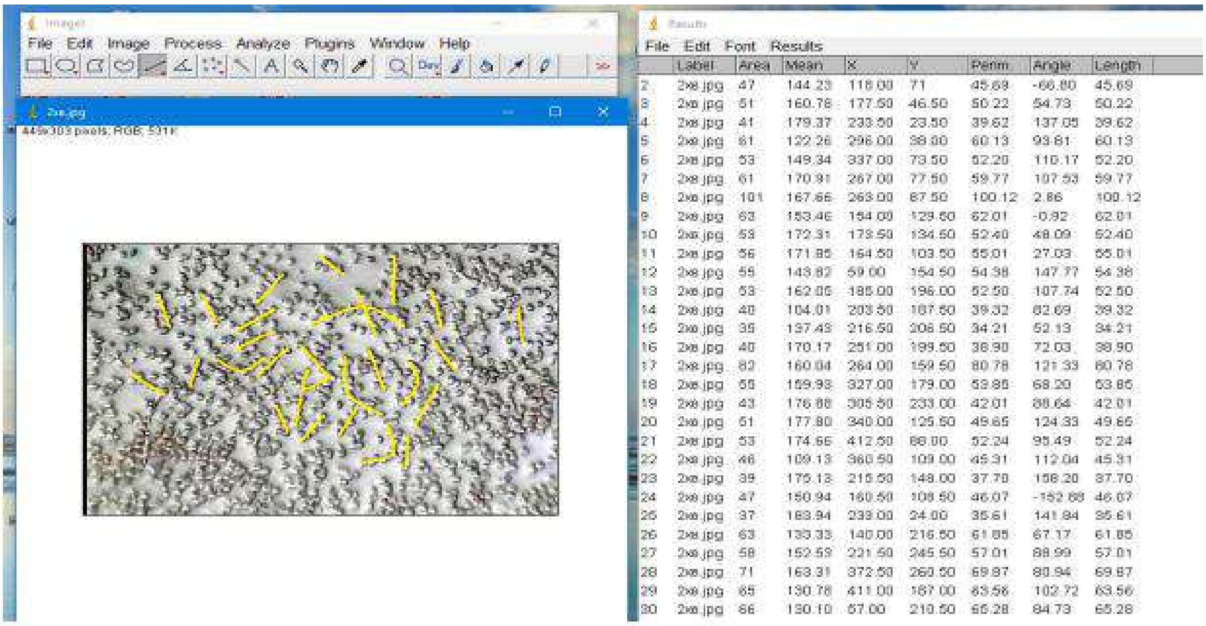
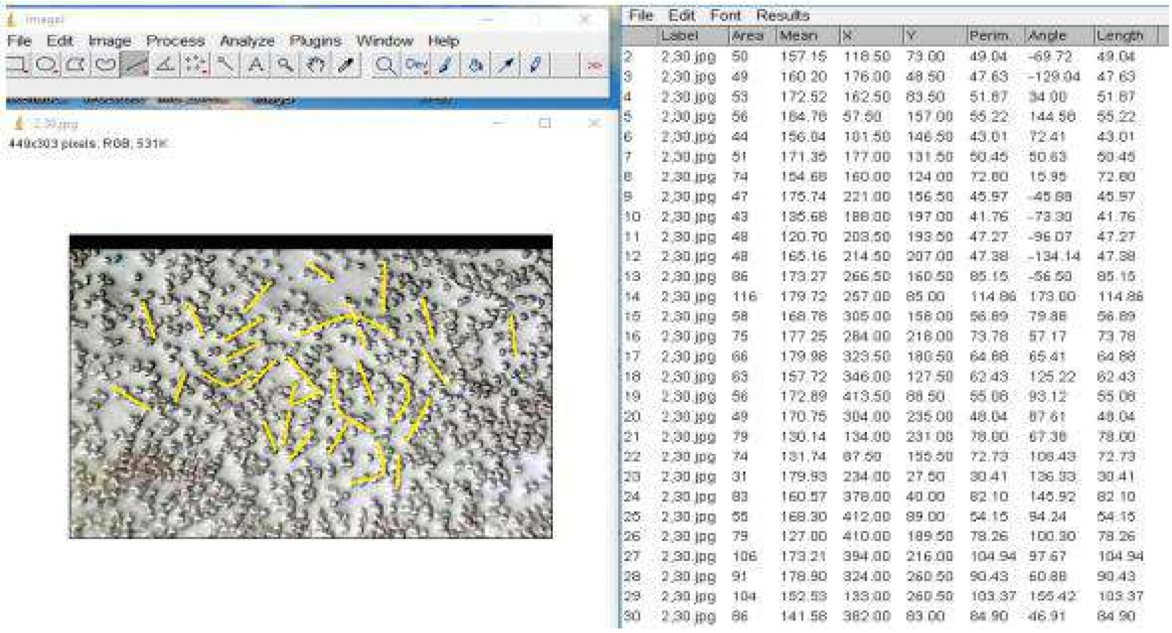


Рис.3. Зображення зразка після опромінення t = 1 хвилина.



	Label	Area	Mean	X	Y	Perim.	Angle	Length
2	2xe.jpg	47	144.23	118.00	71	45.69	-66.80	45.69
3	2xe.jpg	51	160.78	177.50	46.50	50.22	54.73	50.22
4	2xe.jpg	41	179.37	233.50	23.50	39.62	137.05	39.62
5	2xe.jpg	61	122.26	296.00	38.00	60.13	93.61	60.13
6	2xe.jpg	53	149.34	337.00	73.50	52.20	110.17	52.20
7	2xe.jpg	61	170.91	267.00	77.50	59.77	107.53	59.77
8	2xe.jpg	101	167.66	263.00	87.50	100.12	2.86	100.12
9	2xe.jpg	63	153.46	154.00	129.50	62.01	-0.92	62.01
10	2xe.jpg	53	172.31	173.50	134.50	52.40	48.09	52.40
11	2xe.jpg	56	171.85	164.50	103.50	55.01	27.03	55.01
12	2xe.jpg	55	143.82	59.00	154.50	54.38	147.77	54.38
13	2xe.jpg	53	162.05	185.00	196.00	52.50	107.74	52.50
14	2xe.jpg	40	104.01	203.50	187.50	39.32	82.69	39.32
15	2xe.jpg	35	137.43	216.50	208.50	34.21	52.13	34.21
16	2xe.jpg	40	170.17	251.00	199.50	38.90	72.03	38.90
17	2xe.jpg	82	160.04	264.00	159.50	80.78	121.33	80.78
18	2xe.jpg	55	159.93	327.00	179.00	53.85	68.20	53.85
19	2xe.jpg	43	176.88	305.50	233.00	42.01	88.64	42.01
20	2xe.jpg	51	177.80	340.00	125.50	49.65	124.33	49.65
21	2xe.jpg	53	174.66	412.50	88.00	52.24	95.49	52.24
22	2xe.jpg	46	109.13	360.50	109.00	45.31	112.04	45.31
23	2xe.jpg	39	175.13	215.50	148.00	37.70	158.20	37.70
24	2xe.jpg	47	150.94	160.50	108.50	46.07	-152.88	46.07
25	2xe.jpg	37	183.94	239.00	24.00	35.61	141.84	35.61
26	2xe.jpg	63	130.33	140.00	216.50	61.85	67.17	61.85
27	2xe.jpg	58	152.59	221.50	245.50	57.01	88.99	57.01
28	2xe.jpg	71	163.31	372.50	260.50	69.87	80.94	69.87
29	2xe.jpg	65	130.78	411.00	167.00	63.56	102.72	63.56
30	2xe.jpg	66	130.10	67.00	210.50	65.28	84.73	65.28

Рис.4. Зображення зразка після опромінення зразка t = 1.50 хвилини



	Label	Area	Mean	X	Y	Perim.	Angle	Length
2	2,30.jpg	50	157.15	118.50	73.00	49.04	-69.72	49.04
3	2,30.jpg	49	160.20	176.00	48.50	47.63	-129.04	47.63
4	2,30.jpg	53	172.52	162.50	83.50	51.87	34.00	51.87
5	2,30.jpg	56	184.76	57.50	157.00	55.22	144.56	55.22
6	2,30.jpg	44	156.04	101.50	146.50	43.01	72.41	43.01
7	2,30.jpg	51	171.35	177.00	131.50	50.45	50.63	50.45
8	2,30.jpg	74	154.68	160.00	124.00	72.80	15.95	72.80
9	2,30.jpg	47	175.74	221.00	156.50	45.97	-45.88	45.97
10	2,30.jpg	43	135.68	188.00	197.00	41.76	-73.30	41.76
11	2,30.jpg	48	120.70	203.50	193.50	47.27	-96.07	47.27
12	2,30.jpg	48	165.16	214.50	207.00	47.38	-134.14	47.38
13	2,30.jpg	86	173.27	266.50	160.50	85.15	-56.50	85.15
14	2,30.jpg	116	179.72	257.00	85.00	114.86	173.00	114.86
15	2,30.jpg	58	168.76	305.00	158.00	56.89	79.88	56.89
16	2,30.jpg	75	177.25	284.00	218.00	73.78	57.17	73.78
17	2,30.jpg	66	179.98	323.50	180.50	64.88	65.41	64.88
18	2,30.jpg	63	157.72	346.00	127.50	62.43	125.22	62.43
19	2,30.jpg	56	172.89	413.50	88.50	55.08	93.12	55.08
20	2,30.jpg	49	170.75	304.00	235.00	48.04	87.61	48.04
21	2,30.jpg	79	130.14	134.00	231.00	78.00	67.38	78.00
22	2,30.jpg	74	131.74	87.50	155.50	72.73	106.43	72.73
23	2,30.jpg	31	179.93	234.00	27.50	30.41	136.33	30.41
24	2,30.jpg	83	160.57	378.00	40.00	82.10	145.92	82.10
25	2,30.jpg	55	168.30	412.00	89.00	54.15	94.24	54.15
26	2,30.jpg	79	127.00	410.00	189.50	78.26	100.30	78.26
27	2,30.jpg	106	173.21	394.00	216.00	104.94	97.67	104.94
28	2,30.jpg	91	178.90	324.00	260.50	90.43	60.88	90.43
29	2,30.jpg	104	152.53	133.00	260.50	103.37	155.42	103.37
30	2,30.jpg	86	141.58	382.00	83.00	84.90	46.91	84.90

Рис.5. Зображення зразка після опромінення зразка t = 2 хвилини

Визначення довжини еритроцитарних ланцюжків при онкологічному захворюванні – мієлома під впливом лазерного випромінювання довжиною хвилі – 638 нм і потужністю - 5 мВт (рис. 6 – 9).

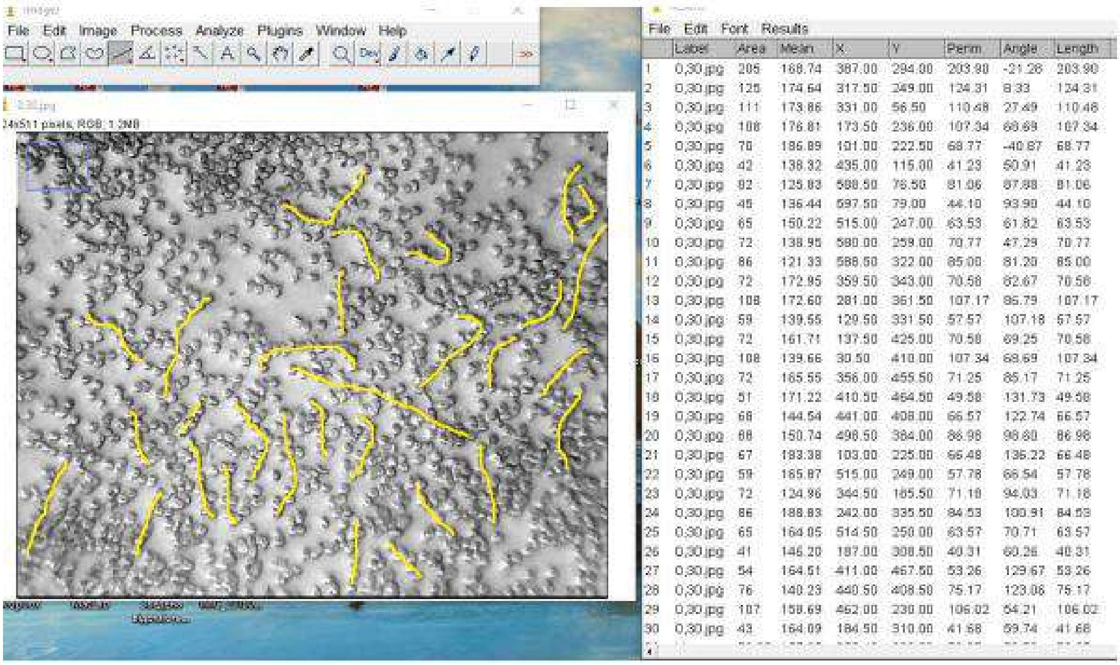


Рис.6. Зображення зразка після опромінення t = 30 секунд

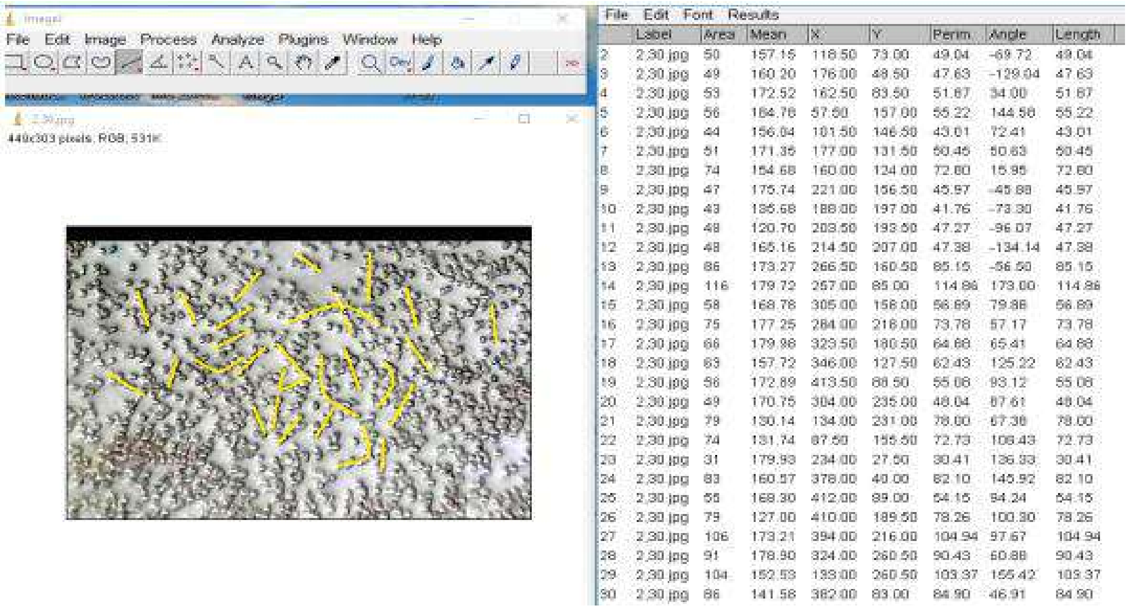


Рис.7. Зображення зразка після опромінення t = 1 хвилина

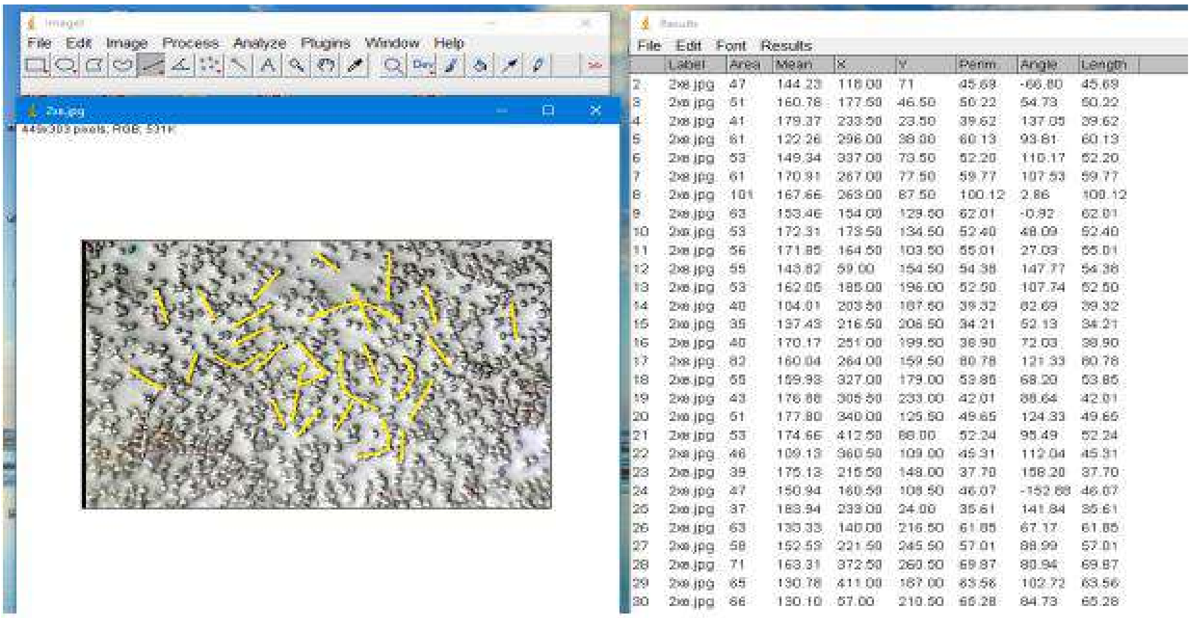


Рис.8. Зображення зразка після опромінення t = 1,5 хвилини

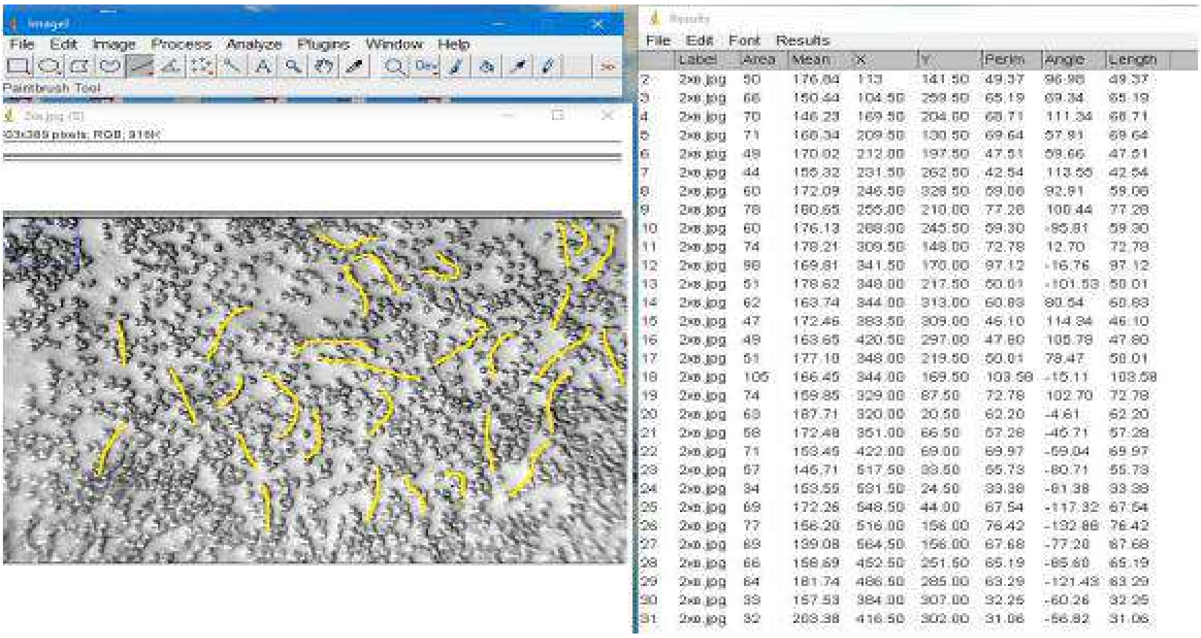


Рис. 9. Зображення зразка після опромінення t = 2 хвилини

Визначення відносного числа патологічних клітин при онкологічному захворюванні – мієлома під впливом лазерного випромінювання потужністю 1 мВт і 5 мВт (рис. 10).

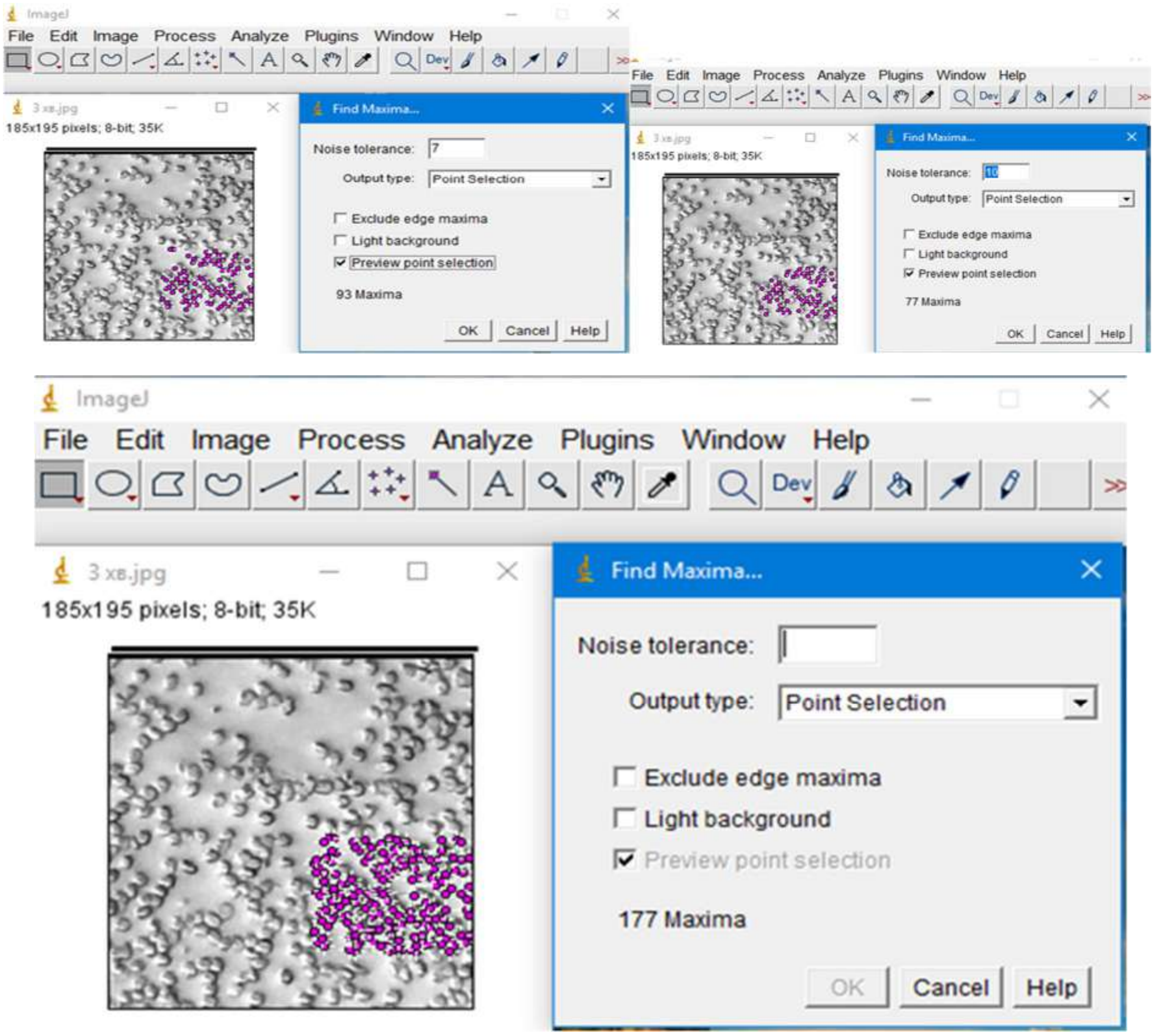


Рис. 10. Зображення зразка при визначенні числа патологічних форм еритроцитів

Висновки. Аналізуючи отримані результати дослідження впливу лазерного випромінювання на агрегацію еритроцитів та патологічні форми еритроцитів, було виявлено, що середнє значення довжини еритроцитарних ланцюжків при збільшенні часу впливу опромінювання збільшується, в середньому від 33 мкм до 56 мкм, що призводить до зміни однієї з основних реологічних характеристик крові, а саме в’язкості; причому зі збільшенням потужності джерела опромінювання збільшення середньої довжини ланцюжка стає більш суттєвим (в середньому від 42 до 77 мкм). Варто зазначити, що в нормі це значення в середньому має наближатися до 200 мкм. При терапії захворювання мієлома лазерне опромінювання крові може бути досить ефективним. На основі аналізу отриманих результатів підрахунку зміни відсоткового значення числа патологічних форм еритроцитів, було виявлено, що терапевтичний вплив лазерного випромінювання призводить до зменшення патологічних форм еритроцитів при онкологічному захворюванні крові мієлома в середньому від 32% до 40% в залежності від тривалості впливу. Причому збільшення потужності лазерного джерела сприяє збільшенню ефективності впливу.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Siposan D. G, Lukacs A. Effect of low-level laser radiation on some rheological factors in human blood: an in vitro study. *J. Clin Laser Med Surg.* 2000. Vol 18 (4). P. 185–195. DOI: https://doi.org/10.1089/10445470050144038
2. Mi X. Q., Chen J. Y., Cen Y., Liang Z. J., Zhou L.W. A comparative study of 632.8 and 532 nm laser irradiation on some rheological factors in human blood in vitro. *Photochem Photobiol*. 2000. Vol 74 (1). P. 7–12. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jphotobiol.2004.01.003
3. Walski T., Drohomirecka A., Bujok J., et al. Low-Level Light Therapy Protects Red Blood Cells Against Oxidative Stress and Hemolysis During Extracorporeal Circulation. *Frontiers in Physiology*. 2018. Vol 9:647. DOI: https://doi.org/10.3389/fphys.2018.00647
4. Wang H., Liu W., Fang X., et al. Effect of 405 nm low intensity irradiation on the absorption spectrum of in-vitro hyperlipidemia blood. *Technology and Health Care.* 2018. Vol 26. P. 135–143. DOI: https://doi.org/10.3233/thc-174302
5. Benevento E. M., Lisboa F. S. S., Kaneko L. d. O. et al. Transcutaneous intravascular laser irradiation of blood affects plasma metabolites of women. *Sci Rep*. 14, 29839. 2024. DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-024-80169-9
6. Kozlovska T. I., Sander S. V., Zlepko S. M., Vasilenko V. B., Pavlov V. S., Klapouschak A. Yu., Dumenko V. P., Maciejewski M., Dzierżak R., Surtel W. Device to determine the level of peripheral blood circulation and saturation. *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments. - International Society for Optics and Photonics.* 2016. Vol. 100312Z. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2249131
7. Думенко В.П. Методи низькоенергетичної індукованої флуоресценції та спектрофотометрії для дослідження клітин крові. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2024. 1(2). С. 129-137. https://doi.org/10.31652/3041-1955/2024-01-02-04
8. Павлов С. В., Кожем'яко В. П., Колесник П. Ф., Козловська Т. І., Думенко В. П. Фізичні основи біомедичної оптики. Вінниця: ВНТУ, 2010. 150 с.

UDC 575.224.6:621.375.82:612.111

Study of the effect of low-intensity laser radiation on the rheological properties of blood

Victoria Dumenko

Abstract. The physical mechanisms of the influence of laser radiation on the rheological properties of blood and processes in blood rheology and hemodynamics are substantiated and the results of studies of changes in the rheological properties of erythrocytes in myeloma disease are presented, namely, the determination of changes in the length of erythrocyte chains and changes in the percentage value of the number of pathological forms of erythrocytes under the influence of laser radiation by the method of optical digital microscopy with the use of software. The therapeutic effect of laser radiation on the rheological properties of blood in myeloma was revealed, depending on the time and power of the laser source.
Keywords: laser radiation, aggregation, erythrocytes, blood rheology, optical microscopy.

References

1. Siposan, D. G, Lukacs, A. (2000). *Effect of low-level laser radiation on some rheological factors in human blood: an in vitro study*, J. Clin Laser Med Surg., **18** (4), 185–195. https://doi.org/10.1089/10445470050144038
2. Mi, X. Q., Chen, J. Y., Cen, Y., Liang, Z. J., Zhou, L. W. (2000). *A comparative study of 632.8 and 532 nm laser irradiation on some rheological factors in human blood in vitro*, Photochem Photobiol, **74** (1), 7–12. https://doi.org/10.1016/j.jphotobiol.2004.01.003
3. Walski, T., Drohomirecka, A., Bujok, J., et al. (2018). *Low-Level Light Therapy Protects Red Blood Cells Against Oxidative Stress and Hemolysis During Extracorporeal Circulation*, Frontiers in Physiology, **9**, 647. https://doi.org/10.3389/fphys.2018.00647

4. Wang, H., Liu, W., Fang, X., et al. (2018). *Effect of 405 nm low intensity irradiation on the absorption spectrum of in-vitro hyperlipidemia blood*, Technology and Health Care, **26**, 135–143. https://doi.org/10.3233/thc-174302
5. Benevento, E. M., Lisboa, F. S. S., Kaneko, L. d. O. et al. (2024). *Transcutaneous intravascular laser irradiation of blood affects plasma metabolites of women*, Sci Rep., **14**, 29839. https://doi.org/10.1038/s41598-024-80169-9
6. Kozlovska T. I., Sande,r S. V., Zlepko, S. M., Vasilenko, V. B., Pavlov, V. S., Klapouschak, A. Yu., Dumenko, V. P., Maciejewski, M., Dzierżak, R., Surtel, W. (2016). *Device to determine the level of peripheral blood circulation and saturation*, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments. - International Society for Optics and Photonics, **100312Z**. https://doi.org/10.1117/12.2249131
7. Dumenko, V. (2024). *Methods of low-energy induced fluorescence and spectrophotometry for the researching of blood cells*, Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, **1** (2), 129–137. [in Ukranian]. https://doi.org/10.31652/3041-1955/2024-01-02-04
8. Pavlov, S. V., Kozhemiako, V. P., Kolesnik, P. F., Kozlovska, T. I., Dumenko, V. P. (2010). *Physical principles of biomedical optics*, VNTU, Vinnytsya. [in Ukranian].

Про автора / About the author

Вікторія Думенко, кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Victoria Dumenko, Candidate of Science in Engineering, Associate Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics, Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 17.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 63–72.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 63–72.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

UDC 504.04:551.582:551.583

Causes, consequences and countermeasures to climate change in Ukraine and the world

Anatoliy Vidmachenko[1], Oleksandr Mozghovyi[2]

[1] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Department of Physics; Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, Department of Physics of Substellar and Planetary Systems; Kyiv, Ukraine
avidmachenko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0523-5234

[2]National Transport University, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, Kyiv, Ukraine
mavimfto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0797-8779

Abstract. The current rapid changes in the Earth's climate are due to a significant increase in the global average temperature. Greenhouse gases participate in these changes. The concentrations of carbon dioxide, methane, and nitrous oxide in the atmosphere are currently the highest in the last 800,000 years. To counteract this climate crisis, it is considered necessary to achieve carbon neutrality by the middle of the 21st century. Since the middle of the 19th century, due to the burning of huge amounts of fossil fuels, the concentration of greenhouse gases in the atmosphere began to increase sharply. And the concentration of CO_2 has increased from 280 ppm (parts per million) to over 400 ppm. The average global temperature since 1880 has increased by 1.1°C. In Ukraine, temperature changes in the last half century have been about 0.3°C per decade. The water level in the rivers of Ukraine in summer periods is becoming lower than normal in previous years. It is estimated that the greatest decrease in runoff is observed in the river basins of the Pripyat, Dniester, and Southern Bug. On the rivers of Polissya, the climatically determined increase in water runoff at the end of winter threatens the formation of persistent spring floods; the increase in water runoff in the rivers of the Western region of Ukraine is manifested in the formation of catastrophic floods on the mountain rivers of the Carpathians. Climate change increases the likelihood of more frequent floods and droughts. This makes agriculture, transport, energy, and the social sphere more vulnerable. After all, these are the sectors that are highly dependent on water resources. Due to the increase in the average annual temperature, the agroclimatic zones of Polissya, forest-steppe and steppe have changed their boundaries, moving north by up to 200 km. From the rise in sea level due to climate change in the southern regions of Ukraine by 2100, we should expect flooding of an area of from 650 thousand to 1 million hectares. If global temperature changes at the end of the 21st century. exceeds 1.5C, climate change will lead to a significant increase in extreme hot days and sea levels will continue to rise. Increased ocean acidity will lead to the extinction of marine animals and the destruction of food chains. Hurricanes, storms, fires will be stronger and more frequent. All this will cause a decrease in crop yields, changes in animal habitats, loss of water supplies and significant economic consequences.

Keywords: global climate change, air temperature, water regime of the river, rainfall, river basin.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-03

1. Introduction

Reasons for global climate change. Climate change is the nature of weather changes over a long period of time over a large area. During the existence of our planet, the Earth's climate has changed many times [2]. The last seven ice ages are well studied, after which warming set in again [3-5]. Nowadays, warming is occurring an order of magnitude faster than ever before. Therefore, the term "climate change" is increasingly used, but the term "climate crisis". This phrase emphasizes the seriousness of the existing problem, which requires its solution as soon as possible. After all, modern rapid climate changes are occurring due to a significant increase in the global average temperature. To counteract such a climate crisis, in order to adapt to global climate change, the need to achieve so-called carbon neutrality is being considered by the middle of the 21st century.

When sunlight hits the Earth's surface, its energy is absorbed and returned to space in the form of heat [7]. The presence of certain gases in the atmosphere prevents the release of this heat, as a result of which the surface layers of the planet heat up. The higher the concentration of these gases, the more heat is trapped. The concentration of carbon dioxide, methane, and nitrous oxide in the atmosphere is now the highest it has been in 800,000 years [10, 13]. Conditions on Earth have changed throughout its history. In the past 650,000 years alone, there have been seven cycles of glacial expansion and retreat. And the abrupt end of the last ice age about 11,700 years ago marked the beginning of the modern climate era. Most of these natural phenomena are explained by small variations in individual elements of the Earth’s orbit, which change the amount of solar energy that our planet receives.

Most climate changes in the past, as well as today, have involved so-called greenhouse gases. When there was too much of them, the Earth warmed. But these changes occurred gradually, and so the planet had millions of years to adjust to the updated levels, such as carbon dioxide. In the same cases, when the concentration of greenhouse gases increased suddenly, for example, due to strong eruptions of many volcanoes, the consequences for the Earth's biosphere were also more catastrophic. Now human activity creates carbon emissions 3–8 times faster than ancient volcanoes [2].

The greenhouse effect currently maintains more or less comfortable temperature values for humanity on our planet. In the absence of such an effect, the average global temperature would not be +15°C, but -18°C. Thus, the greenhouse effect is a normal natural phenomenon. However, with the beginning of the industrial revolution in the middle of the 19th century due to the burning of huge amounts of fossil fuels, the concentration of greenhouse gases in the atmosphere began to increase sharply. Such gases include carbon dioxide CO_2, ozone O_3, methane CH_4, nitrogen oxide N_2O, water vapor, etc. Typically, the first four compounds remain in the atmosphere for months or even years without undergoing physical and chemical changes. For example, the conducted research shows [6], an ozone molecule does not change for almost 100 days, and methane molecules can remain in the atmosphere unchanged for up to a dozen or so years. This contributes to an increase in global temperatures for several decades [9]. Water vapor may not change in the atmosphere for only a few days, responding quite quickly to temperature changes. After all, the warmer it gets, the more water will evaporate into the atmosphere, intensifying global warming processes.

2. Statement of problem

Impact of human activity on global climate. Human activity significantly changes the concentration of greenhouse gases in the Earth's atmosphere through the burning of such types of fossil fuels as coal, gas, oil, etc. When they are burned, carbon is released, which, combining with oxygen in the air, forms carbon dioxide CO_2. Over the past 140 years, CO_2 concentrations have increased from 280 ppm (parts per million) to over 400 ppm (Fig. 1). This is the first time in several hundred thousand years that such a rapid increase in the carbon dioxide content in the Earth's atmosphere has occurred. According to observations, the average global temperature on Earth has increased by almost 1.1°C since 1880.

But global warming is occurring unevenly across the planet's surface. For example, in the Arctic regions of the Earth, the average temperature has increased by almost 2°C. That is, warming in the Arctic region is occurring almost twice as fast as in the low-latitude regions of the planet. Therefore, glaciers in the Arctic are melting faster.

According to satellite observations, the volume of ice in the Arctic after 1979 in the warmest season has decreased by almost a third (Fig. 2). If such trends continue, by the middle of the 21st century the Arctic may be completely ice-free in the summer. Such melting of glaciers may have several serious global consequences. After all, a significant reduction in the area of the white cover of the Earth's surface, which reflects from 20% to 50% of solar radiation, will cause an increase in the area of the world's oceans. Namely, it absorbs more than 95% of the incident solar energy. Therefore, the water will heat up even more; this will accelerate the melting of glaciers, causing even greater climate change and will again lead to a rise in the level of the world's oceans. At the beginning of the 21st century some of the islands in the Seychelles, Maldives, Fiji, Marshall and Canary Islands, Micronesia, Polynesia, the Philippines, etc. began to disappear under water; and the Solomon Islands, due to rising water levels in the oceans, have already lost 5 of their islands by 2020.

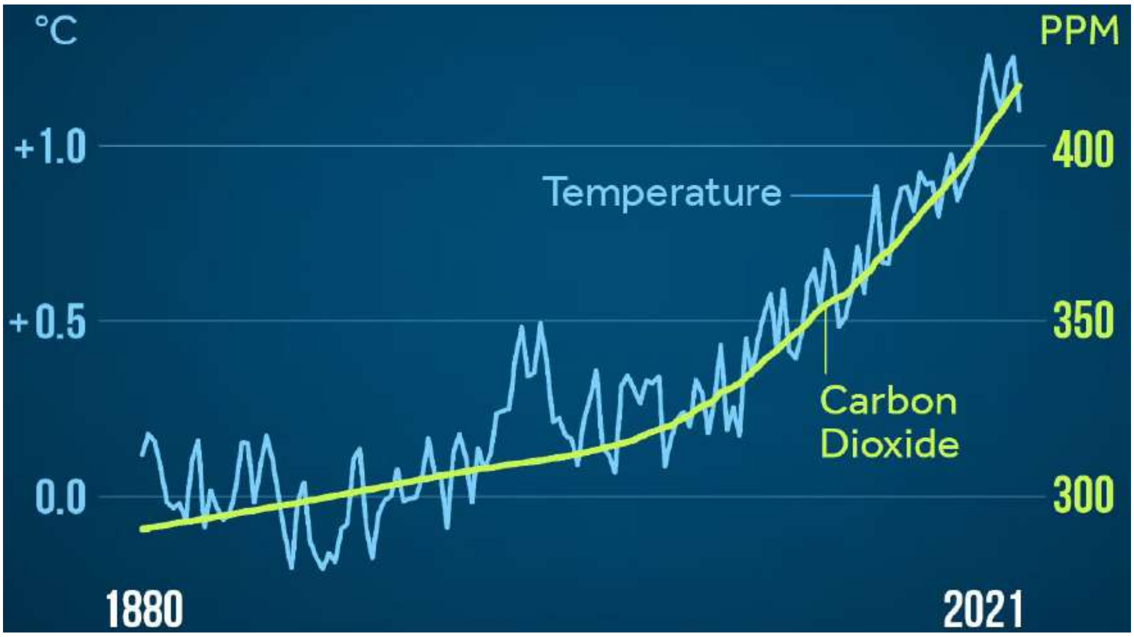


Fig. 1. Global changes in temperature and carbon dioxide concentration CO_2 (https://www.climatecentral.org/graphic/peak-co2-heat-trapping-emissions?graphicSet=Annual%20CO2%20Peak%20and%20Temperature)

According to estimates, the permafrost of the circumpolar regions currently holds more than 1,400 gigatons of carbon dioxide. This amount is almost twice as much as that currently contained in the entire Earth's atmosphere. Rising global temperatures are causing the surface layers of permafrost to melt, releasing these "deposits". Along with CO2, methane is also released into the atmosphere, for which the greenhouse effect is about a hundred times stronger than carbon dioxide.

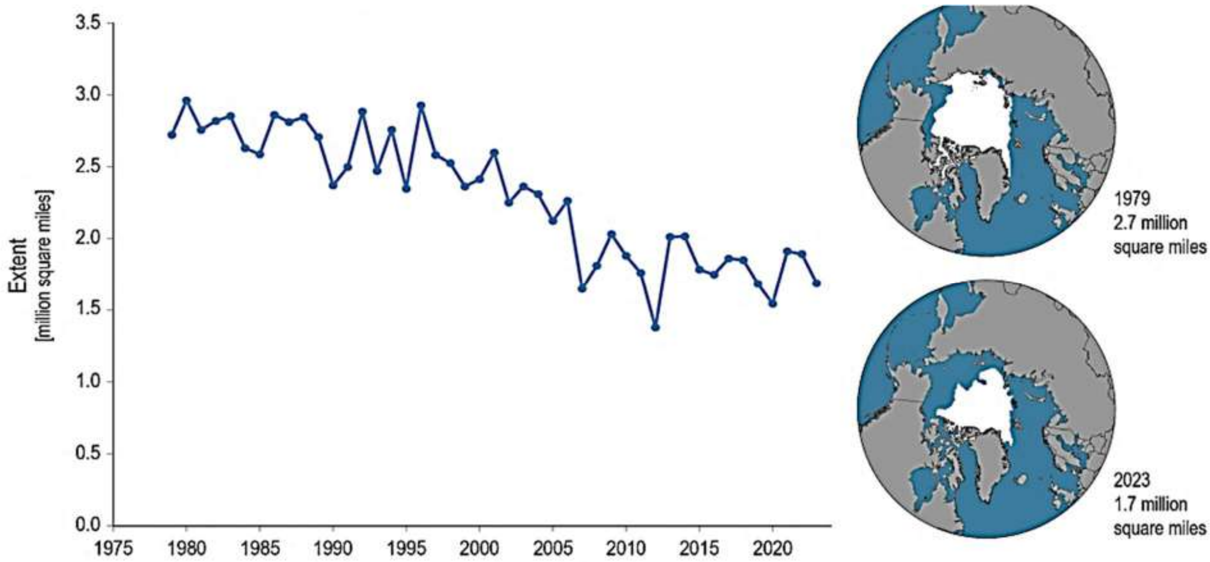


Fig. 2. Shows a 37% decrease in Arctic sea ice extent from September 1979 to September 2023 (https://www.globalchange.gov/sites/default/files/styles/max_1024x1024/public/images/arctic_sea_ice_extent_2024.png?itok=sKt-MOXE)

The graph in Fig. 3 shows that the world ocean level has risen by more than 10 cm from 1870 to mid-2024.

Fig. 3. According to NASA high-resolution satellite measurements, sea level in 2024 was 103.3 mm higher than in 1993, and the rate of rise is accelerating (https://d39raawggeifpx.cloudfront.net/media/0724GLOBALbneGreenSealevelrise10cms.jpg)

The purpose of the study is to show the causes of global climate change and the impact of human activity. To consider the consequences of such changes in Ukraine and the world and to propose actions to reduce the impact of global warming.

3. Main result

Climate change in Ukraine. In Ukraine, the average annual temperature has increased by more than 1.2°C over the past few decades. The rate of change in the average, maximum and minimum temperatures over the past half century has been about 0.3°C for every ten years. Moreover, all seasons in Ukraine have become warmer. Thus, in Ukraine, the average summer temperature has increased by 1.3°C, winter temperature by 0.9°C, spring temperature by 0.9°C, and autumn temperature by 0.4°C. The largest temperature increases occurred in January (by 2.3°C) and July (by 1.4°C). With the increase in the average global temperature, extremely high temperature values have become more frequent in Ukraine; and warming in the warm seasons has become longer and more frequent.

Therefore, droughts are intensifying, the water content of lakes and rivers is decreasing, and extreme weather phenomena that were not previously typical for Ukraine are observed more often. It is believed that by the middle of the 21st century, every second summer season will be dry, and the average annual air temperature is expected to increase by more than 1.5°C. In recent years, the water level in the rivers of Ukraine in summer periods has been lower than the norm in previous years. It is also expected that in the following years the amount of precipitation in summer will decrease, and droughts will become more frequent [14].

Compared with the base period of 1961-1990, in the last three decades there has been a noticeable redistribution of precipitation both by seasons and by regions of Ukraine. And although the average value of precipitation per year has not changed significantly, there have been changes in the nature of their precipitation and in their intensity. For example, sometimes almost a monthly norm of precipitation fell within a few hours. And during another almost monthly period, rains can only sometimes barely drip, and then rainless weather was observed.

Such an increase in average monthly temperature values, an increase in moisture evaporation and a decrease in the amount of atmospheric precipitation should lead to a change in surface moisture regimes, to a further decrease in surface water runoff in rivers and water supply in certain regions of Ukraine [11]. Estimates show that the greatest decrease in runoff will be observed for the river basins of the Dnieper tributary Pripyat, as well as the Dniester and Southern Bug. By the end of the 21st century, their water content may decrease by a third. According to forecasts for the period 2030-2040, water in the Dnieper River will be 30% less, and in the Dniester River – by 37%.

Water runoff in small rivers is also gradually decreasing. And, for example, on the rivers of Polissya, the climatically determined increase in water flow at the end of winter threatens the formation of persistent spring floods; and the increase in water flow in the rivers of the Western region of Ukraine may manifest itself in the formation of catastrophic floods on the mountain rivers of the Carpathians. That is, climate change increases the likelihood of more frequent floods and droughts. This makes agriculture, transport, energy, and the social sphere more vulnerable [12]. After all, these are the industries that are highly dependent on water resources. This can also lead to a decrease in crop yields and cause certain problems in the operation of nuclear power plants. Let us recall that nuclear power in Ukraine supplies consumers with more than half of the electricity, and it requires constant cooling. Therefore, a decrease in the water content of rivers may cause a high risk of overheating of reactors at nuclear power plants.

Main risks of climate change for Ukraine. In Ukraine, there are three main agroclimatic zones - Polissya, forest-steppe and steppe. This classification was introduced based on the balance between the amount of precipitation and the amount of accumulated heat. Since now the ratio between the average annual temperature and the amount of accumulated heat has changed, the above-mentioned agroclimatic zones have also changed their boundaries. According to updated synoptic data, these zones are gradually moving further and further north. Estimates show that an increase in the average annual temperature by 1°C shifts the boundary of the above-mentioned agroclimatic zones by approximately one hundred kilometers in the northerly direction. Since over the past few decades the average temperature has increased by more than 2°C, their boundaries have shifted by approximately two hundred kilometers.

The results of many studies also indicate a number of risks from sea level rise due to climate change for the coastal areas of the southern regions of Ukraine. According to estimates, in 2100, we should expect flooding of an area of about 650 thousand hectares, and taking into account seasonal flooding of the sea, these areas increase to 1 million hectares. The Kherson and Odesa regions and the Crimean Peninsula will be most affected. Rising sea levels in the Black and Azov Seas will threaten the flooding of many important industrial facilities, infrastructure, residential areas, and cultural heritage sites. Coastal regions will experience significant changes, even the death of some ecosystems. Even some higher educational institutions in the Kherson and Odessa regions, as well as a number of sea trade ports, are in the zone of possible predicted flooding.

However, some studies show that the Earth's climate should now also demonstrate trends opposite to the above. After a hot period, the climate has been gradually cooling over the past 50 million years. Analysis of solar activity also indicates that the amount of solar energy [11] received by the Earth has begun to decrease since the 1960s (Fig. 4). But despite this, global temperatures continue to rise significantly. That is, global warming is now most likely caused not by natural climate change and not by the activity of the Sun.

A decrease in solar activity over a long period of time is called a Great Solar Minimum. The last such phenomenon led to the so-called Little Ice Age, which lasted from the 16th to the 19th centuries. But modern human-induced warming is six times greater than the effect of the possible cooling that occurred during the Great Solar Minimum. That is, temperatures continue to rise.

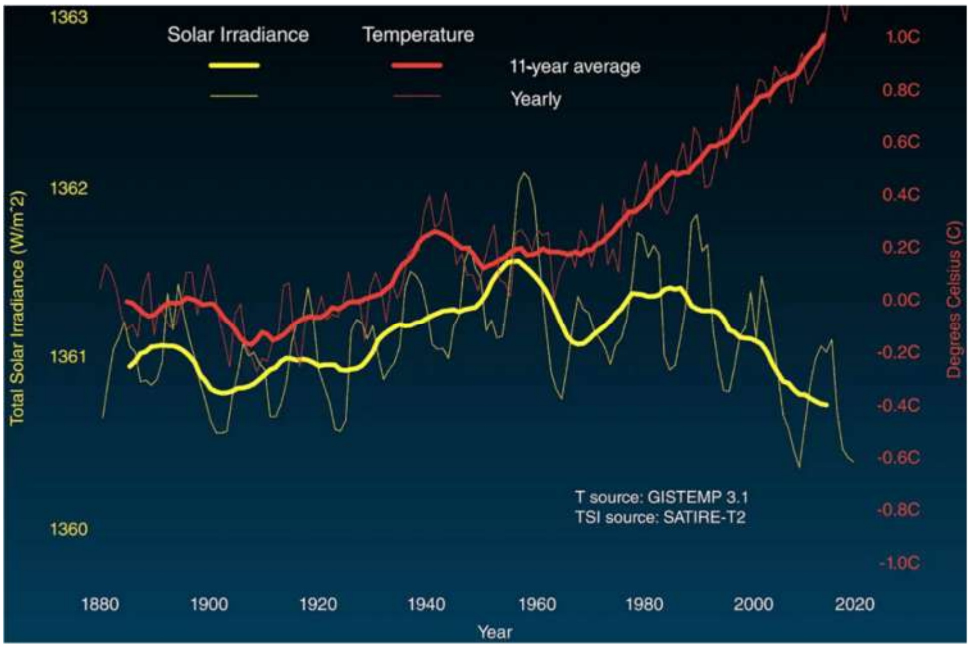


Fig. 4. Comparison of global changes in surface temperature (red line) and solar energy received by the Earth (yellow line) in 1880-2020 (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f1/Solar_irradiance_and_temperature_1880-2018.jpeg)

After all, global temperature mainly depends on how much energy the planet receives from the Sun and how much it radiates back into space. And currently, the average global surface temperature is about +15°C. In the past, a drop in global temperature by one or two degrees caused the already mentioned Little Ice Age. And 20,000 years ago, during the last glacial maximum, the global temperature was only five degrees lower. This was enough for permafrost to cover most of Europe at that time.

According to a special report by the Intergovernmental Panel on Climate Change, there are two scenarios for further developments: bad and even worse. In the first case, the global change in surface temperature by the end of the 21st century will exceed 1.5 degrees Celsius, in the second – it will exceed 2°C. The impact of climate change is felt on every continent and in the oceans. However, these changes are not spread evenly across the planet, so different parts of the world will face different impacts. If global temperatures rise by 1.5 degrees, rather than 2 degrees, this could reduce the risks. However, they cannot be avoided completely.

Moreover, if warming exceeds 2 degrees, there are certain tipping points that cannot be corrected, even if warming is reduced to 1.5 degrees. For example, the melting of the Greenland and Antarctic ice sheets is such a tipping point. In both scenarios, climate change will lead to a significant increase in extreme hot days. The amount of heavy precipitation in some regions, especially at high latitudes in the Northern Hemisphere, will also increase, leading to frequent flooding. Some regions, such as the Mediterranean, will become drier [1]. But sea levels will continue to rise in both scenarios. Because of this, the coast and many islands will be flooded. Increasing ocean acidity will lead to the extinction of marine animals and the destruction of food chains. The weather will become more extreme: hurricanes, storms, fires will be stronger and more frequent. All this will cause a decrease in crop yields, a change in animal habitats, loss of water supplies and significant economic consequences.

Actions to reduce the impact of global warming. To stop global warming, humanity is taking certain measures. Ukraine is one of seven countries that, together with the countries of the European Union, have pledged to reduce their greenhouse gas emissions by at least 40% by 2030 compared to 1990. According to the generally accepted rating "Climate Change Performance Index" for 2019, Ukraine ranked 17th out of 61 countries in terms of the effectiveness of combating climate change. Although, it is clear that our state received such high ratings not because of an effective climate policy, but because of the impact of the political and economic crisis in previous years. Many experts criticize the lack of a coal phase-out plan and emphasize that the “Low-carbon Development Strategy of Ukraine until 2050” adopted in 2018 does not provide for an absolute reduction in greenhouse gas emissions compared to the current level.

Conclusions. Observational data indicate that drought-like weather conditions have begun to prevail in Ukraine, and their intensity is increasing. And with the expected increase in air temperature, even by 1.5°C, in 2025-2050 every second season may be dry. In recent years, the water level in the rivers of Ukraine during the summer period has been lower than normal. Along with more frequent droughts and a decrease in precipitation in summer periods, the situation is getting worse.

The above outlines a list of prospects for further research on the possible impact of climate change in Ukraine on changes in water resources, changes in the boundaries of agroclimatic zones, risks for agriculture, transport, energy, flooding of coastal regions, etc.

Conflict of interest and ethics. The authors declare that they have no conflicts of interest. The authors also declare full compliance with all rules of ethics for journal research, namely regarding the anonymity of human participation and/or consent to publication.

Acknowledgements. The authors declare that there is no special funding for this work.

References

1. Babych A.O. (2014). *Drought, dry and dust storm during the period of global climate change*. **1**. Vinnytsia: Dilo. 468 p.

2. Feigen B. (2016). *The Great Warming: Climate Change and the Rise and Fall of Civilizations*. Kyiv : Nika-Center. 272 p.

3. Morozhenko A.V., Nevodovsky P.V., Vidmachenko A.P. (2014). *Effects of variations in stratospheric ozone and aerosol on the global and local climate of the Earth.* 4 Ukrainian Conference GEO-UA. Earth observation for sustainable development and security, May 26-30, 2014, Kyiv. Ukraine. P. 61-62.

4. Morozhenko O.V., Vidmachenko A.P., Nevodovskyi P.V., et al. (2017). *Monitoring of Global Climate Change in the Earth from the Moon.* 17th Ukrainian Conference on Space Research, Odessa, Aug. 21- 25. 2017: abstracts. P. 47.

5. Nevodovsky P., Vidmachenko A., Morozhenko A., et al. (2014). *The problems of studying of the stratospheric aerosol influence on global climate change and Earth weather by ultraviolet polarimetry*. XIII International Scientific Conference "INSTRUMENTATION: Status and Prospects". April 23-24. 2014, Kyiv. Ukraine. P. 46-47.

6. Nevodovskyi P., Morozhenko O., Vidmachenko O., et al. (2015). *Tiny Ultraviolet Polarimeter for Earth Stratosphere from Space Investigation.* IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS). 24-26 September 2015, Warsaw, Poland. Proceedings, **1**. P. 28-32. https://doi.org/10.1109/IDAACS.2015.7340695

7. Nevodovskyi P.V., Morozhenko A.V., Vidmachenko A.P., et al. (2014). *The base model of ultraviolet polarimeter (UVP) as a tool to study the impact of changes in stratospheric aerosol on the global and local climate of Earth.* 4 Ukrainian Conference GEO-UA. Earth observation for sustainable development and security, May 26-30, 2014, Kyiv, Ukraine. P. 62-63.

8. Skrynyk O.A. (2020). *Spatial interpolation of climatological data taking into account the topographic and physical-geographical features of the territory of Ukraine*. Ukrainian Geographical Journal. **2**. P. 13–19. https://doi.org/10.15407/ugz2020.02.013

9. Steklov A.F., Vidmachenko A.P., Miniailo N.F. (1983). *Seasonal variations in the atmosphere of Saturn.* Soviet Astronomy Letters. **9**(2). P. 135-136.

10. Vid'machenko A.P., Morozhenko A.V., Yatskiv Ya.S. (2012). *An overview of major factors that define global changes of the Earth climate.* Earth Systems Change over Eastern Europe/ Eds. P.Ya. Groisman, V.I. Lyalko. K: Akademperiodyka. 2012. P. 190-239. https://doi.org/10.15407/akademperiodyka.195.488

11. Vidmachenko A.P. (2016). *Seasonal changes on Jupiter: 2. Influence of the planet exposure to the Sun*. Kinematics and Physics of Celestial Bodies. **32**(6), p. 283-293.

12. Vidmachenko A.P., Morozhenko A.V. (2012). *Remote monitoring of global climate change over the territory of Ukraine and the Earth as a whole to improve the reliability of the forecast weather for agriculture*. Abstracts of International Scientific Conference on the 80th anniversary of the Department of Energy and Automation "Problems of development of Energy Systems and automation in agriculture." 25-26 October 2012. Kyiv. The Cabinet of Ministers of Ukraine, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine. 2012. P. 15-16

13. Vidmachenko A.P., Morozhenko O.V., Yatskiv Ya.S. (2010). *Global changes in the Earth's climate*. In book: Earth systems change over eastern Europe, Chapter: 2.2.4, Publisher: Kyiv, Naukova Dumka, Editor: Lyalko V.I. P. 254-306.

14. Voropai G.V., Yatsyk M.V., Mozol N.V., et al. (2020). *Peculiarities of the formation of the water-thermal regime of drained soils under climate change conditions.* Visn. agrarian science. No. **1**. P. 68–74.

УДК 504.04:551.582:551.583

Причини, наслідки та протидії змінам клімату в Україні і світі

Анатолій Відьмаченко[1], Олександр Мозговий[2]

*Анотація***.** Сучасні стрімкі зміни клімату Землі відбуваються через значне підвищення глобальної середньої температури. У цих змінах приймають участь парникові гази. Концентрації вуглекислого газу, метану, оксиду азоту в атмосфері наразі є найбільшими за останні 800000 років. Для протидії цій кліматичній кризі розглядають необхідність досягти вуглецевої нейтральності до середини XXI ст. Від середини XIX ст. через спалювання величезних обсягів викопного палива концентрація парникових

газів в атмосфері почала різко зростати. І концентрація CO_2 зросла від 280 ppm (часток на мільйон) до понад 400 ppm. Середня глобальна температура з 1880 р. зросла на 1.1°C. В Україні зміни температури в останні півстоліття становили близько 0.3°C за десятиліття. Рівень води в річках України у літні періоди стає все нижчим від норми в попередні роки. Оцінено що найбільше зниження стоків спостерігається в річкових басейнах Прип'яті, Дністра і Південного Бугу. На річках Полісся кліматично обумовлене зростання водного стоку у кінці зими загрожує формуванню стійких весняних паводків; зростання водних стоків в річках Західного регіону України проявляється у формуванні катастрофічних повеней на гірських річках Карпат. Кліматичні зміни збільшують імовірність частіших і повеней, і посух. Це робить вразливішим сільське господарство, транспорт, енергетику і соціальну сферу. Адже саме ці галузі є сильно залежними від водних ресурсів. Через зростання середньорічної температури агрокліматичні зони полісся, лісостепу і степу змінили свої межі, перемістившись на північ до 200 км. Від підвищення рівня моря внаслідок зміни клімату у південних областях України до 2100 р. слід очікувати затоплення території площею від 650 тис. до 1 млн. га. Якщо глобальна зміна температури на кінець XXI ст. перевищить 1.5°C, то зміна клімату призведе до значного збільшення екстремальних спекотних днів і рівень моря продовжить підвищуватися. Підвищення кислотності океанів призведе до вимирання морських тварин і руйнування ланцюгів харчування. Урагани, шторми, пожежі будуть сильнішими і траплятимуться частіше. Усе це викликатиме зменшення врожайності сільськогосподарських культур, зміні ареалів тварин, втраті запасів води і значним економічним наслідкам.

Ключові слова: глобальні зміни клімату, температура повітря, водний режим річки, кількість опадів, річковий басейн.

Список використаних джерел

1. Babych A.O. Drought, dry and dust storm during the period of global climate change. Vol. 1. Vinnytsia : Dilo, 2014. 468 p.
2. Feigen B. The Great Warming: Climate Change and the Rise and Fall of Civilizations. Kyiv : Nika-Center, 2016. 272 p.
3. Morozhenko A.V., Nevodovsky P.V., Vidmachenko A.P. Effects of variations in stratospheric ozone and aerosol on the global and local climate of the Earth. *4 Ukrainian Conference GEO-UA. Earth observation for sustainable development and security,* May 26-30, 2014. Kyiv. Ukraine. P. 61-62.
4. Morozhenko O.V., Vidmachenko A.P., Nevodovskyi P.V., Choliy V.Ya. et al. Monitoring of Global Climate Change in the Earth from the Moon. *17th Ukrainian Conference on Space Research,* Odessa, Aug. 21-25. 2017: abstracts. P. 47.
5. Nevodovsky P., Vidmachenko A., Morozhenko A., Geraimchuk M., Ivakhiv O. The problems of studying of the stratospheric aerosol influence on global climate change and Earth weather by ultraviolet polarimetry. *XIII International Scientific Conference "INSTRUMENTATION: Status and Prospects"*. April 23-24, 2014. Kyiv, Ukraine. P. 46-47.
6. Nevodovskyi P., Morozhenko O., Vidmachenko O., Ivakhiv O., Geraimchuk M., Zbrutskyi O. Tiny Ultraviolet Polarimeter for Earth Stratosphere from Space Investigation. *IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS)*. 24-26 September 2015, Warsaw, Poland. Proceedings, 1. P. 28-32.
DOI: https://doi.org/10.1109/IDAACS.2015.7340695
7. Nevodovskyi P.V., Morozhenko A.V., Vidmachenko A.P., Geraymchuk M.D., Ivakhiv O.V., Delec A.S. The base model of ultraviolet polarimeter (UVP) as a tool to study the impact of changes in stratospheric aerosol on the global and local climate of Earth. *4 Ukrainian Conference GEO-UA. Earth observation for sustainable development and security*, May 26-30, 2014, Kyiv. Ukraine. P. 62-63.
8. Skrynyk O.A. Spatial interpolation of climatological data taking into account the topographic and physical-geographical features of the territory of Ukraine. *Ukrainian Geographical Journal.* No. 2. 2020. P. 13–19. DOI: https://doi.org/10.15407/ugz2020.02.013
9. Steklov A.F., Vidmachenko A.P., Miniailo N.F. Seasonal variations in the atmosphere of Saturn. *Soviet Astronomy Letters*. Vol. 9. No 2. 1983. P. 135-136.

10. Vid'machenko A.P., Morozhenko A.V., Yatskiv Ya.S. (An overview of major factors that define global changes of the Earth climate. Earth Systems Change over Eastern Europe/ Eds. P.Ya. Groisman, V.I. Lyalko. K : Akademperiodyka, 2012. P. 190-239. DOI: https://doi.org/10.15407/akademperiodyka.195.488

11. Vidmachenko A.P. Seasonal changes on Jupiter: 2. Influence of the planet exposure to the Sun. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. Vol. 32. No. 6. 2016. P. 283-293.

12. Vidmachenko A.P., Morozhenko A.V. Remote monitoring of global climate change over the territory of Ukraine and the Earth as a whole to improve the reliability of the forecast weather for agriculture. *Abstracts of International Scientific Conference on the 80th anniversary of the Department of Energy and Automation "Problems of development of Energy Systems and automation in agriculture."* 25-26 October 2012. Kyiv. The Cabinet of Ministers of Ukraine, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine. 2012. P. 15-16.

13. Vidmachenko A.P., Morozhenko O.V., Yatskiv Ya.S. Global changes in the Earth's climate. *In book: Earth systems change over eastern Europe, Chapter: 2.2.4, Publisher*: Kyiv. Naukova Dumka, 2010. Editor: Lyalko V.I., p. 254-306.

14. Voropai G.V., Yatsyk M.V., Mozol N.V., Stetsyuk M.G., Zosymchuk M.D. Peculiarities of the formation of the water-thermal regime of drained soils under climate change conditions. *Visn. agrarian science.* No. 1. 2020. P. 68–74.

Про авторів / About the authors

Анатолій Відьмаченко, доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України, професор кафедри фізики Національного університету біоресурсів і природокористування України, головний науковий співробітник відділу фізики субзоряних і планетних систем Головної астрономічної обсерваторії НАН України; вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна;

Anatoliy Vidmachenko, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine, Professor of the Department of Physics of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Chief Researcher of the Department of Physics of Substellar and Planetary Systems of the Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, 15 Heroiv Oborony Str., Kyiv, 03041, Ukraine;

Олександр Мозговий, кандидат технічних наук, доцент, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, Національний транспортний університет, вул. М. Омеляновича-Павленка,1, м. Київ, 01010, Україна;

Oleksandr Mozghovyi, Candidate of Science in Engineering, Associate Professor, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, National Transport University, 1, Mykhaila Omelianovycha – Pavlenka Str. Kyiv 01010, Ukraine;

Отримано / Received 02.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 21.04.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 73–82.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 73–82.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 523.482

Про внутрішню будову карликової планети Плутон

Анатолій Відьмаченко[1], Олександр Мозговий[2], Юлія Божок[3]

[1] Національнийуніверситет біоресурсів і природокористування України, кафедра фізики; Головна астрономічна обсерваторія НАН України, відділ фізики субзоряних і планетних систем, м. Київ, Україна
avidmachenko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0523-5234

[2] Національний транспортний університет, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, м. Київ, Україна
mavimfto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0797-8779

[3] Національний транспортний університет, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, м. Київ, Україна
bozhok2008@bigmir.net
https://orcid.org/0009-0009-8956-2539

Анотація. Температура на поверхні Плутона змінюється від 33 К до майже 60 К. Своїми розмірами й масою Плутон є значно меншим від усіх великих планет у Сонячній системі та ще й від семи супутників навколо цих планетних тіл. Хоча ця віднедавна карликова планета у 2.5 рази більша та майже у 14 разів масивніша від найбільшого тіла у Головному поясі астероїдів – іншої карликової планети – Церери. Доволі точне значення діаметра Плутона у 2376±32 км вдалося отримати у 2015 році, ґрунтуючись на даних, отриманих апаратурою космічного апарата «New Horizons». Але про будову надр Плутона відомо все ще дуже мало. Певні висновки щодо їхнього складу зроблено із значення середньої густини карликової планети, яке становить 1.86±0.01 г/см^3. Тому можна вважати, що внутрішня структура Плутона повинна бути диференційованою, й на близько 65% складатися з каменю та льоду; здебільшого це повинен бути азотний та водяний лід. Ядро у Плутона повинне бути щільним і складатися із скелястого матеріалу. Діаметр цього ядра повинне бути близьким до 1700 км. Його може оточувати льодяна мантія товщиною від 100 до понад 200 км. На початку свого утворення, під дією розпаду радіоактивних елементів у ядрі, льоди могли розтанути. І в ті часи між мантією і скелястим ядром Плутона міг утворитися океан з рідкої води. Джерелами тепла могла бути акреція речовини на початку його утворення, розпад радіоактивних елементів та припливні деформації з боку його супутника Харона. Припускають, що на початку свого існування Плутон міг зіткнутися з деяким тілом порівняних розмірів. Це могло привести до утворення навколо Плутона існуючої системи супутників. Недавно припустили, що гори Піккар Монс та Райт Монс можуть бути злиттям багатьох сучасних кріовулканів. Це може вказувати на сучасне досить потужне джерело тепла на Плутоні.

Ключові слова: Плутон, карликова планета, водяний лід, внутрішня будова, припливні деформації.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-02

1. Вступ

Своїми розмірами й масою Плутон поступається не тільки так званим великим планетам у Сонячній системі, а ще й деяким із їх супутників (рис. 1). Він виявився меншим від семи супутників планет: Каллісто, Титана, Іо, Ганімеда, Тритона, Європи та Місяця.

Наприклад, маса Плутона є меншою від маси Місяця майже у шість разів; його діаметр становить тільки 2/3 від діаметра природного супутника Землі. Але він аж у 2,5 рази є більшим і в 14 разів масивнішим від іншої карликової планети – Церери, яка є найбільшим космічним тілом у Головному поясі астероїдів. У той же час, серед відомих транснептунових об'єктів карликова планета Плутон має найбільший діаметр. Хоча за своєю масою він майже на четверть поступається іншій карликовій планеті – Еріді, котра розташовується в так званому розсіяному диску [13]. Більш-менш точне значення діаметра Плутона у 2376±32 км вдалося отримати тільки у 2015 році, ґрунтуючись на спостережних результатах, які отримані апаратурою з космічного апарата «New Horizons» [12, 16]. Сплюснутість поверхні Плутона виявилась меншою 1% [16].

2. Постановка проблеми

Але про будову надр цієї карликової планети відомо все ще дуже мало. Певні висновки щодо приблизного її складу можна зробити виходячи зі значення середньої густини; вона становить 1.86±0.01 г/см^3 [16]. Тому можна вважати, що Плутон має складатися із каменю та льоду. А виходячи із значної поширеності у Сонячній системі води, то лід там здебільшого має бути водяний. Доля кам'яної частини може становити майже 65 %.

Мета статті: описати внутрішню будову карликової планети Плутон на основі аналізу останніх даних про неї.

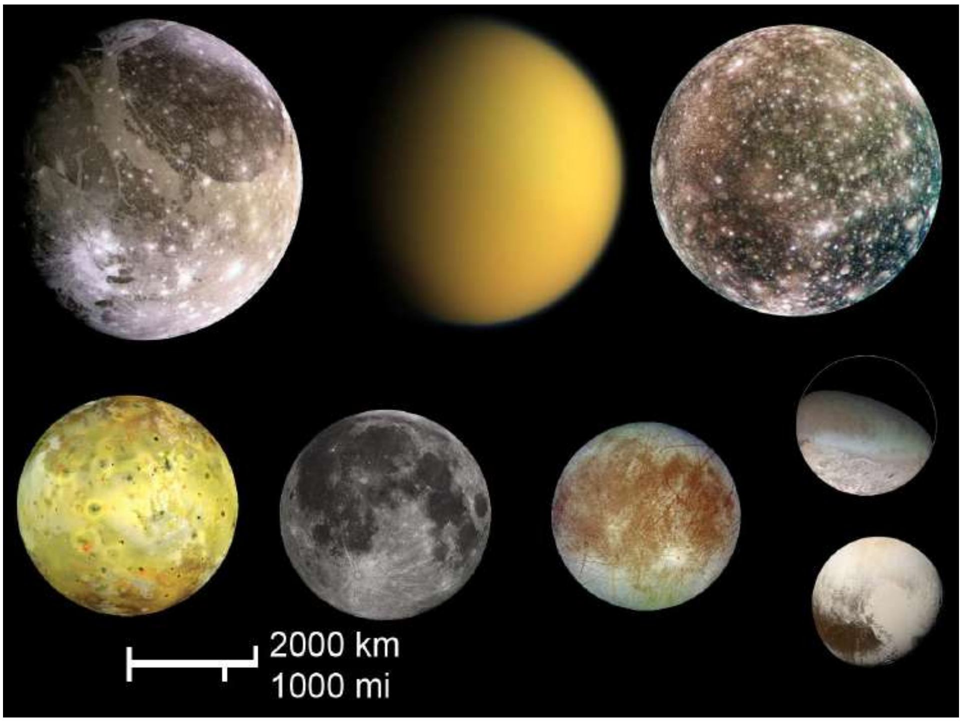


Рис. 1. Плутон (внизу, праворуч) порівняно із найбільшими супутниками у Сонячній системі (зліва направо та зверху вниз): Ганімед, Титан, Каллісто, Іо, Місяць, Європа та Тритон (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/23/Pluto_compared2.jpg)

3. Основні результати

Більшість супутників навколо великих планет та більших астероїдних тіл мають дифернційовану внутрішню структуру (рис. 2). Карликова планета Плутон, можна вважати, повинна мати подібну до них внутрішну структуру. Тобто, Плутон повинен мати досить щільне ядро, яке, скоріше всього, складається зі скельного матеріалу. Таке ядро має бути оточеним льодяною мантією. Дуже імовірно, що значення діаметра ядра повинне становити близько до двох третин від діаметра самого Плутона. Тобто, розмір ядра має становити близько до 1700 км. На межі мантії та ядра може розташовуватися льодовий прошарок із товщиною в межах від сотні до понад двох сотень кілометрів.

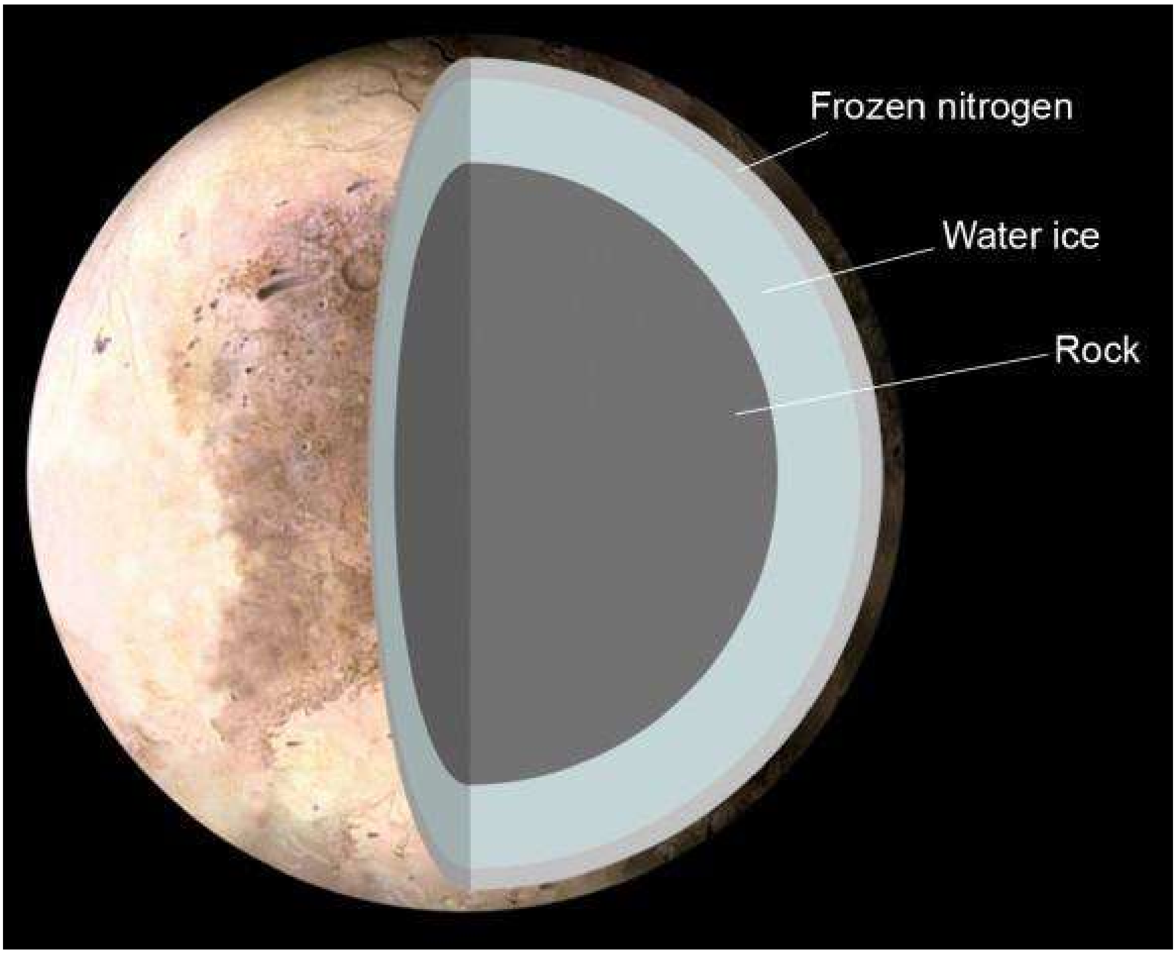


Рис. 2. Можлива внутрішня структура Плутона (https://www.universetoday.com/wp-content/uploads/2008/05/Internal_Structure_of_Pluto.jpg)

За деяких умов, на початку свого утворення, при розпаді поблизу центральної частини ядра радіоактивних елементів, мантійний лід міг навіть розтопитися, так що скельні породи мали б відокремитися від нього у його центральній частині. При таких умовах цілком можливо, що між скелястим ядром Плутона та мантією у ті далекі часи міг навіть утворитись величезний океан із розталої води. Й у випадку якщо б така модель для теплових змін внутрішнього стану Плутона була б правдоподібною, то така послідовність подій могла б певним чином відобразитись і на особливостях змін на видимому поверхневому шарі даного небесного тіла. Наприклад, наявність океану з рідкої води під верхньою частиною мантії могла була б викликати деякі зміни температурного градієнта у мантії й привести до відчутних змін напруги у шарі близькому до поверхні.

В свою чергу, такі ефекти мали б викликати добре видимі розриви та здавлювання на окремих частинах видимого рельєфу. Це могло б в ті далекі часи призвести до виникнення на поверхні Плутона розломів, які мали б вкрити усю кулю планетного тіла. А після таких подій на поверхні Плутона могли б появитись і водний лід, замерзлий азот та силікати.

Виходячи із вищесказаного, Плутон колись міг мати деякі джерела тепла. Серед них можна вказати на акрецію речовини на початку його утворення, на розпад радіоактивних елементів (котрий певною мірою може тривати й у даний момент), а також деякі періодичні припливні деформації, викликані його найбільшим супутником Хароном у ті далекі часи, коли вони ще не були одним боком повернуті один до одного.

Також припускають, що на початку свого існування Плутон міг зіткнутися з іншим тілом порівняних розмірів. Саме тоді таке зіткнення могло призвести до утворення навколо нього існуючої в даний час системи супутників. У ті далекі часи таке зіткнення також могло здійснити помітний внесок до нагріву надр карликової планети.

Скоріше всього, отриманого тепла цілком могло вистачити не тільки на плавлення льодів, але й на їх відокремлення від потужного кам’яного ядра [1]. Такі глобальні зміни могли призвести до диференціації надр Плутона, унаслідок чого його кам'янисте ядро змогло стати оточеним мантією із криги товщиною у декілька сотень кілометрів. Відповідно до проведених модельних розрахунків, отриманого при цьому тепла мало навіть вистачити на утворення під поверхнею океану з рідкої води, саме так, як це зараз має місце в надрах деяких із супутників навколо планет-гігантів [11, 19].

Отримані на сьогодні спектральні результати спостережень вказують на те, що у деяких місцях лід із води зараз виходить на поверхню Плутона. Проте, дуже часто, він може бути замаскованим тонким покровом із інших летких льодів [4]; майже на 98% цим льодом є азотний лід.

Окрім згаданих речовин, на поверхні Плутона вдалося виявити замерзлий метан (згідно отриманих оцінок, його може бути від 0.4 % [8] до 3% [18]) і оксид вуглецю (0.01-0.2% [8]); також знайдено домішки деяких складніших сполук, які утворюються з метану й азоту під дією жорстких складових сонячного випромінювання. До них відносяться, наприклад, етан [7], деякі більш важкі нітрильні та вуглеводневі сполуки [3], а також такі високомолекулярні сполуки як толіни, які надають поверхні Плутона та деяких інших далеких від Сонця тіл коричневих відтінків [4]. Деякі із поширених на таких поверхнях замерзлих речовин часто зовсім не мають забарвлення. Тому вкриті такими речовинами ділянки поверхні Плутона є дуже світлими (рис. 3).

До таких речовин відносяться монооксид вуглецю, азот, меншою мірою – метан. Усі вони в умовах Плутона вирізняються значною леткістю, і тому здатні до сезонного переміщення його поверхнею. Також це суттєво впливає на забарвлення всієї поверхні [5].

Лід із води при температурах на поверхні Плутона має величезну міцність. І тому саме із водяного льоду утворюються деталі рельєфу з висотами у декілька кілометрів. А оскільки лід з води є ще й легким, то своєрідні айсбергові льодяні утворення, які «плавають» у помітно важчих, але більш текучих азотних льодах, також складаються із води [6].

Відмітимо, що метановий лід є ще легшим [9]. Проте, на відміну навіть від замерзлого оксиду вуглецю CO, метан дуже важко розчиняється в замерзлому азоті [3]. По цій причині подекуди, метан може існувати на поверхні Плутона в чистому вигляді [8].

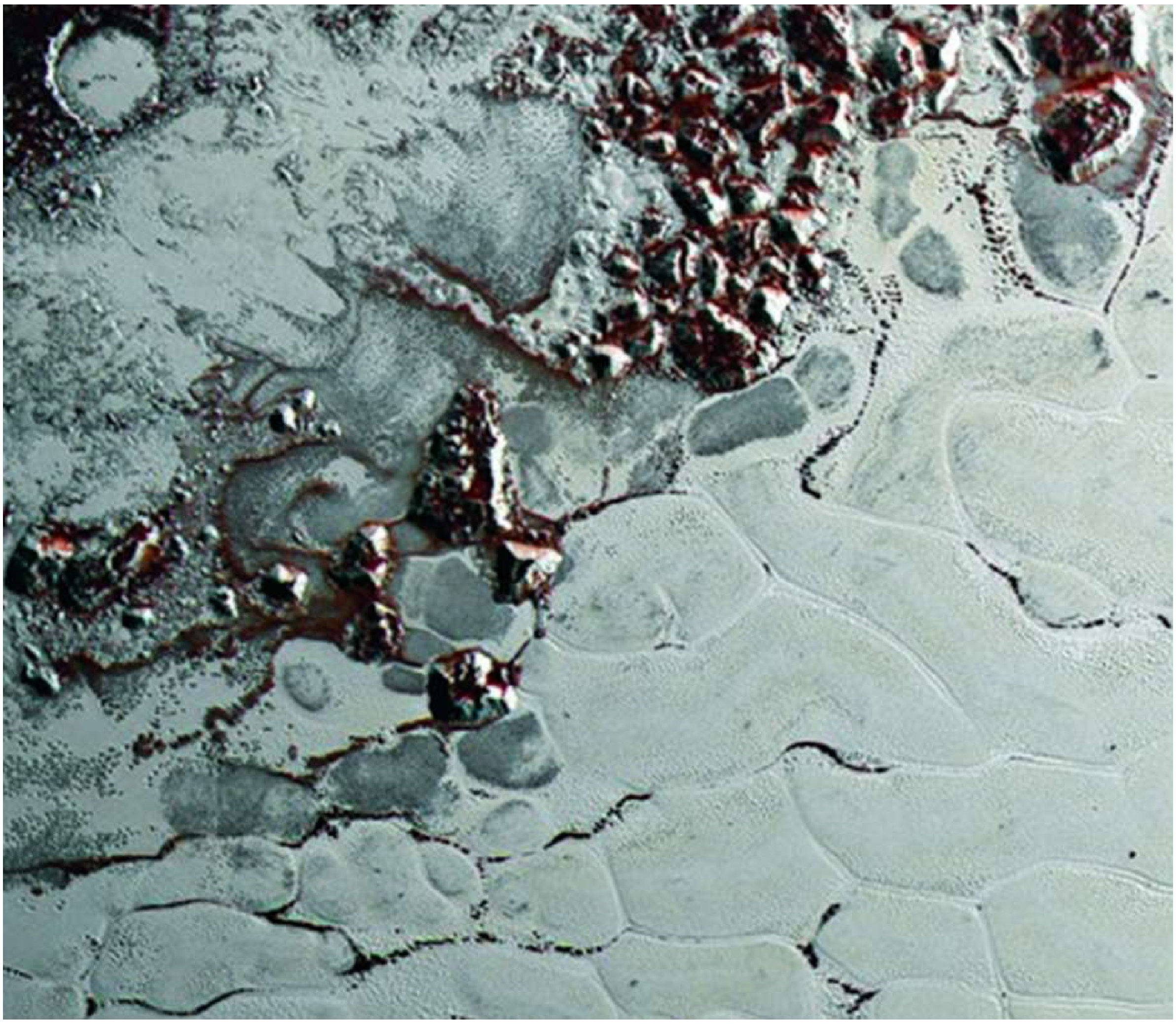


Рис. 3. Гори на краю рівнини Sputnik Planitia (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/23/Pluto%E2%80%99s_Heart_-_Like_a_Cosmic_Lava_Lamp.jpg)

Оскільки Плутон розташований майже в 40 разів далі від Сонця, ніж наша Земля, то притоки сонячної енергії на ньому слабкіші у 1600 разів. Значення температури на плутоновій поверхні є досить різним на різних ділянках: від менше 35 К до майже 60 К. При цьому, на місцевості темних кольорів спостерігаються більші значення температури, тоді як на яскравій – менші. Подібні відмінності являються наслідком відмінностей у характеристиках поглинання сонячного випромінювання, а також того, що яскраві поверхні є суттєво багатшими на замерзлі гази. До того ж, їх випаровування додатково охолоджуватиме цю ж частину поверхні.

У роботі [14] подано припущення, що гори Райт Монс і Піккар Монс насправді є злиттям багатьох менших сучасних кріовулканічних утворень (рис. 4). І це може свідчити про існування сучасного джерела тепла на Плутоні на рівнях, котрі ще зовсім недавно вважалися неможливими.

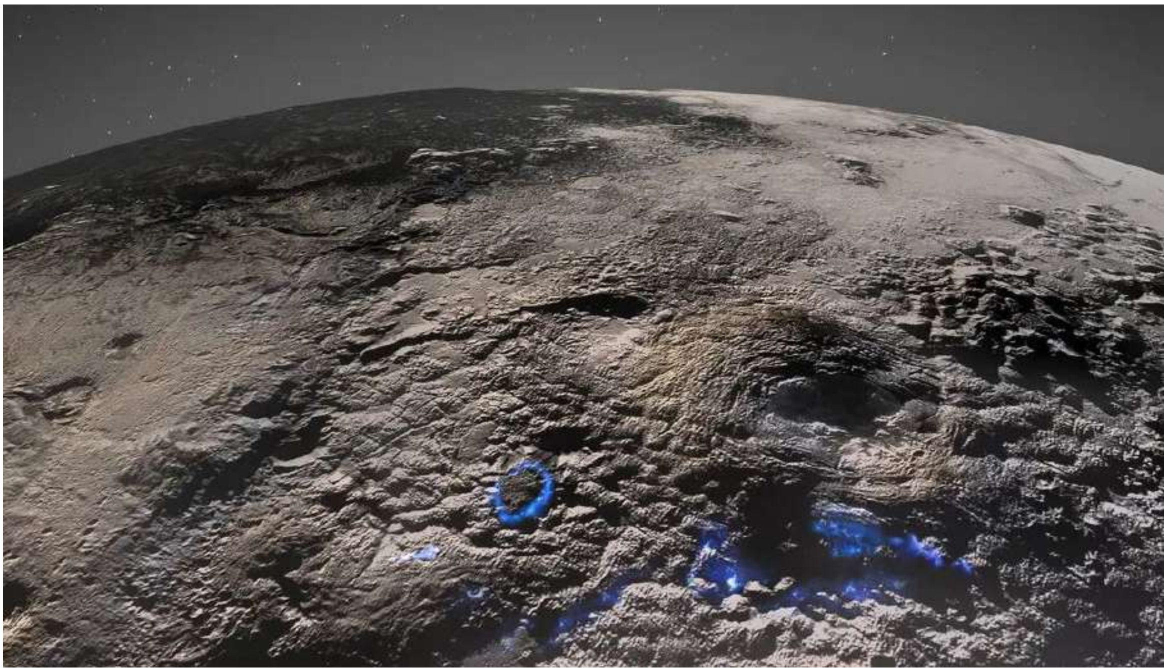


Рис. 4. На зображеннях Плутона, зроблених апаратурою космічного апарата «New Horizons», виявлено недавню активність крижаних вулканів (виділено синім кольором) (https://static01.nyt.com/images/2022/03/29/science/29sci-pluto1/29sci-pluto1-jumbo.jpg?quality=75&auto=webp)

Висновки. Отримані дані про карликову планету Плутон дозволяють припустити, що його внутрішня будова має бути диференційованою. Ядро має бути щільним і оточене льодяною мантією. Карликова планета отримує дуже мало сонячної енергії, але на зображення Плутона, які зроблені апаратурою космічного апарата «New Horizons», виявлено недавню активність крижаних вулканів, що може вказувати на сучасне досить потужне джерело тепла на Плутоні.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Barr A. C., Collins G. C. Tectonic activity on Pluto after the Charon-forming impact. *Icarus*. 2015. Vol. 246. P. 146–155. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.03.042
2. Bierson C., Nimmo F., Stern S. A. Evidence for a hot start and early ocean formation on Pluto. *Nature Geoscience*/ 2020. Vol. 769, № 7. P. 468–472. DOI: https://www.nature.com/articles/s41561-020-0595-0
3. Cruikshank D. P., Grundy W. M., DeMeo F. E. et al. The surface compositions of Pluto and Charon. *Icarus*. 2015. Vol. 246. P. 82–92. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.05.023
4. Grundy W. M., Binzel R. P., Buratti B. J., et al. Surface compositions across Pluto and Charon. *Science*. 2016. Vol. 351 (6279). P. aad9189. DOI: http://dx.doi.org/10.1126/science.aad9189
5. Grundy W. M., Olkin C. B., Young L. A., et al. Near-infrared spectral monitoring of Pluto's ices: Spatial distribution and secular evolution. *Icarus*. 2013. Vol. 223, № 2. P. 710–721. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.01.019
6. Hand E. Late harvest from Pluto reveals a complex world. *Science*. 2015. Vol. 350 (6258). P. 260–261. DOI: https://doi.org/10.1126/science.350.6258.260

7. Holler B. J., Young L. A., Grundy W. M., et al. Evidence for longitudinal variability of ethane ice on the surface of Pluto. *Icarus*. 2014. Vol. 243. P. 104–110. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.09.013
8. Lellouch E., de Bergh C., Sicardy B., et al. Exploring the spatial, temporal, and vertical distribution of methane in Pluto's atmosphere. *Icarus*. 2015. Vol. 246. P. 268–278. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.03.027
9. Moore J. M., McKinnon W. B., Spencer J. R., et al. The geology of Pluto and Charon through the eyes of New Horizons. Science. 2016. Vol. 351 (6279). P. 1284–1293. DOI: http://dx.doi.org/10.1126/science.aad7055
10. Morozhenko A.V., Ovsak A. S., Vid'machenko A. P., Teifel V. G., Lysenko P.G. Imaginary part of the refractive index of aerosol in latitudinal belts of Jupiter's disc. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2016. Vol. 32. P. 30–37. DOI: http://dx.doi.org/10.3103/S0884591316010062
11. Morozhenko A.V., Vid'machenko A. P. Polarimetry and Physics of Solar System Bodies Photopolarimetry in Remote Sensing. *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute* (Yalta, Ukraine. 20 September - 4 October 2003). P. 369–384.
12. Nimmo F., Umurhan O., Lisse C. M., et al. Mean radius and shape of Pluto and Charon from New Horizons images. Icarus. 2017. Vol. 287. P. 12–29. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.icarus.2016.06.027
13. Sicardy B., Ortiz J. L., Assafin M., et al. Size, density, albedo and atmosphere limit of dwarf planet Eris from a stellar occultation. *European Planetary Science Congress Abstracts: journal*. 2011. P. 137.
14. Singer K. N. Large-scale cryovolcanic resurfacing on Pluto. *Nature Communications*. 2022. Vol. 13, № 1. P. 1542. DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2207.06557
15. Steklov A. F., Vidmachenko A. P., Miniailo N. F. Seasonal variations in the atmosphere of Saturn. *Soviet Astronomy Letters*. 1983. Vol. 9 (Mar.-Apr.). P. 135–136.
16. Stern S. A., Bagenal F., Ennico K., et al. The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons. *Science*. 2015. Vol. 350 (6258). P. id.aad1815. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aad1815
17. Stern S. A., Grundy W., McKinnon W. B., et al. The Pluto System After New Horizons. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2018. Vol. 56. P. 357–392. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.05669
18. Tegler S. C., Cornelison D. M., Grundy W. M., et al. Methane and Nitrogen Abundances on Eris and Pluto. *Bulletin of the American Astronomical Society*. 2010. Vol. 42. P. 984. DOI: https://10.1088/0004-637X/725/1/1296
19. Vid'Machenko A. P. Giant planets – Theoretical and observational aspects. *Astronomicheskii Vestnik*. 1991.Vol. 25, № 3. P. 277–292.
20. Vidmachenko A. P. Seasonal variations in the optical characteristics of Saturn's atmosphere. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 1999. Vol. 15, № 5. P. 320–331.
21. Vidmachenko A. P. Sedna: the history of the discovery and its features. *Astronomical almanac*. 2005. Vol. 52. P. 201–212.
22. Vidmachenko A. P. Dwarf planets (to the 10th anniversary of the introduction of the new class of planets). *Astronomical almanac*. 2015. Vol. 62. P. 228–249.
23. Vidmachenko A. P. Features of surface topography and the geological activity of Pluto. *18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists* (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May, 26-27, 2016). P. 12–14.
24. Vidmachenko A. P. The floating ices on the surface of Pluto. *18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists* (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May 26-27 2016). P. 10–12.
25. Vidmachenko A. P. Modern volcanic activity on the Moon. *20 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists* (May 23-24, 2018, Uman, Ukraine). P. 5–7.
26. Vidmachenko A. P. Pluto (to the 90th anniversary of the discovery of the planet). *Astronomical almanac*. 2019. Vol. 66. P. 217–229.
27. Vidmachenko A. P. Features of seasonal changes on Pluto. *Proceedings of the 8th International scientific and practical conference, Science, innovations and education: problems and prospects* (March 9-11, 2022, Tokyo, Japan). Chapter 17. P. 108–116.
28. Vidmachenko A. P. About discovering and getting of all new information about the now dwarf planet Pluto. *Proceedings of the XIII International Scientific and Practical Conference «Modern science: fundamental and applied aspects»* (December 30-31, 2024, Beijing. China). P. 20–26.
29. Vidmachenko A. P. Features of Pluto's rotation around its axis and around the Sun. *Sciences of Europe*. 2025. Vol. 156. P. 24–28.
30. Vidmachenko A. P. Physical parameters of Pluto according to the results of remote observations and the earliest data from the flyby trajectory. *Proceedings of the 6th International scientific and practical conference "Scientific achievements of contemporary society"* (January 10-12, 2025, London, United Kingdom). Chapter 60. P. 312–320.

31. Vidmachenko A. P. The chemical composition of Pluto's atmosphere. *The Proceedings of the 1st International Scientific and Practical Conference «Modern problems of science and technology»* (January 20-22, 2025, Tallinn, Estonia). Section: Physical and mathematical sciences. P. 62–68.
32. Vidmachenko A. P. The earliest data on the general characteristics of Pluto's topography. *Proceedings of the 5th International scientific and practical conference "Science in the modern world: innovations and challenges"* (January 23-25, 2025, Toronto, Canada). Chapter 35. P. 202–211.
33. Vidmachenko A. P., Steklov A. F. Features of volcanic structures on Venus. *Proceedings of the 9th International scientific and practical conference "Modern directions of scientific research development"*, 2022. P. 195–204.
34. Vidmachenko A. P., Vidmachenko H. A. Is it dangerous asteroids? *Astronomical almanac*. 2007. Vol. 53. P. 195–207.

UDC 523.482

On the internal structure of the dwarf planet Pluto

Anatoliy Vidmachenko, Oleksandr Mozghovyi, Yuliia Bozhok

Abstract. The temperature on the surface of Pluto varies from 33 K to almost 60 K. In terms of size and mass, Pluto is much smaller than all the major planets in the Solar System and even the seven satellites around these planetary bodies. Although, this recent dwarf planet is 2.5 times larger and almost 14 times more massive than the largest body in the Main Asteroid Belt - another dwarf planet - Ceres. A fairly accurate value for the diameter of Pluto of 2376±32 km was obtained in 2015, based on data obtained by the New Horizons spacecraft. But very little is still known about the structure of Pluto's interior. Certain conclusions about their composition are made from the value of the average density of the dwarf planet, which is 1.86±0.01 g/cm3. Therefore, it can be assumed that the internal structure of Pluto should be differentiated, and about 65% consist of rock and ice; mostly it should be nitrogen and water ice. Pluto's core should be dense and consist of rocky material. The diameter of this core should be close to 1700 km. It can be surrounded by an icy mantle with a thickness of 100 to more than 200 km. At the beginning of its formation, under the influence of the decay of radioactive elements in the core, the ices could melt. And at that time, an ocean of liquid water could have formed between the mantle and the rocky core of Pluto. The sources of heat could be the accretion of matter at the beginning of its formation, the decay of radioactive elements and tidal deformations from its satellite Charon. It is assumed that at the beginning of its existence, Pluto could have collided with somebody of comparable size. This could have led to the formation of the existing satellite system around Pluto. Recently, it has been suggested that the Piccard Mons and Wright Mons mountains may be the merger of many modern cryovolcanoes. This may indicate a modern, fairly powerful heat source on Pluto.

Keywords: Pluto, dwarf planet, water ice, internal structure, tidal deformations.

References

1. Barr, A. C., Collins, G. C. (2015). *Tectonic activity on Pluto after the Charon-forming impact*, Icarus, **246**, 146–155. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.03.042
2. Bierson, C., Nimmo, F., Stern, S. A. (2020). *Evidence for a hot start and early ocean formation on Pluto*, Nature Geoscience, **769** (7), 468–472. https://www.nature.com/articles/s41561-020-0595-0
3. Cruikshank, D. P., Grundy, W. M., DeMeo, F. E. et al. (2015). *The surface compositions of Pluto and Charon*, Icarus, **246**, 82–92. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.05.023
4. Grundy, W. M., Binzel, R. P., Buratti, B. J., et al. (2016). *Surface compositions across Pluto and Charon,* Science, **351** (6279), aad9189. http://dx.doi.org/10.1126/science.aad9189
5. Grundy, W. M., Olkin, C. B., Young, L. A., et al. (2013). *Near-infrared spectral monitoring of Pluto's ices: Spatial distribution and secular evolution,* Icarus, **223** (2), 710–721. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.01.019
6. Hand, E. (2015). *Late harvest from Pluto reveals a complex world,* Science, **350** (6258), 260–261. https://doi.org/10.1126/science.350.6258.260
7. Holler, B. J., Young, L. A., Grundy, W. M., et al. (2014). *Evidence for longitudinal variability of ethane ice on the surface of Pluto*, Icarus, **243**, 104–110. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.09.013
8. Lellouch, E., de Bergh, C., Sicardy, B., et al. (2015). *Exploring the spatial, temporal, and vertical distribution of methane in Pluto's atmosphere*, Icarus, **246**, 268–278. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.03.027

9. Moore, J. M., McKinnon, W. B., Spencer, J. R., et al. (2016). *The geology of Pluto and Charon through the eyes of New Horizons. Science*, **351** (6279), 1284–1293. http://dx.doi.org/10.1126/science.aad7055
10. Morozhenko, A.V., Ovsak, A. S., Vid'machenko, A. P., Teifel, V. G., Lysenko, P.G. (2016). *Imaginary part of the refractive index of aerosol in latitudinal belts of Jupiter's disc*, Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **32**, 30–37. http://dx.doi.org/10.3103/S0884591316010062
11. Morozhenko, A.V., Vid'machenko, A. P. (2003). *Polarimetry and Physics of Solar System Bodies Photopolarimetry in Remote Sensing*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (Yalta, Ukraine. 20 September - 4 October 2003), 369–384.
12. Nimmo, F., Umurhan, O., Lisse, C. M., et al. (2017). *Mean radius and shape of Pluto and Charon from New Horizons images*, Icarus, **287**, 12–29. http://dx.doi.org/10.1016/j.icarus.2016.06.027
13. Sicardy, B., Ortiz, J. L., Assafin, M., et al. (2011). *Size, density, albedo and atmosphere limit of dwarf planet Eris from a stellar occultation*, European Planetary Science Congress Abstracts: journal, 137.
14. Singer, K. N. (2022). *Large-scale cryovolcanic resurfacing on Pluto*, Nature Communications, **13** (1), 1542. http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2207.06557
15. Steklov, A. F., Vidmachenko, A. P., Miniailo, N. F. (1983). *Seasonal variations in the atmosphere of Saturn*, Soviet Astronomy Letters, **9** (Mar.-Apr. 1983), 135–136.
16. Stern, S. A., Bagenal, F., Ennico, K., et al. (2015). *The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons*, Science, **350** (6258), id.aad1815. https://doi.org/10.1126/science.aad1815
17. Stern, S. A., Grundy, W., McKinnon, W. B., et al. (2018). *The Pluto System After New Horizons*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **56**, 357–392. https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.05669
18. Tegler, S. C., Cornelison, D. M., Grundy, W. M., et al. (2010). *Methane and Nitrogen Abundances on Eris and Pluto*, Bulletin of the American Astronomical Society, **42**, 984. https://doi:10.1088/0004-637X/725/1/1296
19. Vid'Machenko, A. P. (1991). *Giant planets – Theoretical and observational aspects*, Astronomicheskii Vestnik, **25** (3), 277–292.
20. Vidmachenko, A. P. (1999). *Seasonal variations in the optical characteristics of Saturn's atmosphere*, Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **15** (5), 320–331.
21. Vidmachenko, A. P. (2005). *Sedna: the history of the discovery and its features*, Astronomical almanac, **52**, 201–212.
22. Vidmachenko, A. P. (2015). *Dwarf planets (to the 10th anniversary of the introduction of the new class of planets)*, Astronomical almanac, **62**, 228–249.
23. Vidmachenko, A. P. (2016). *Features of surface topography and the geological activity of Pluto*, 18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May, 26-27, 2016), 12–14.
24. Vidmachenko, A. P. (2016). *The floating ices on the surface of Pluto*, 18 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists (National Aviation University, Kyiv, Ukraine, May 26-27 2016), 10–12.
25. Vidmachenko, A. P. (2018). *Modern volcanic activity on the Moon*, 20 International scientific conference Astronomical School of Young Scientists (May 23-24, 2018, Uman, Ukraine), 5–7.
26. Vidmachenko, A. P. (2019). *Pluto (to the 90th anniversary of the discovery of the planet)*, Astronomical almanac, **66**, 217–229.
27. Vidmachenko, A. P. (2022). *Features of seasonal changes on Pluto*, Proceedings of the 8th International scientific and practical conference, Science, innovations and education: problems and prospects (March 9-11, 2022, Tokyo, Japan), Chapter 17, 108–116.
28. Vidmachenko, A. P. (2024). *About discovering and getting of all new information about the now dwarf planet Pluto*, Proceedings of the XIII International Scientific and Practical Conference «Modern science: fundamental and applied aspects» (December 30-31, 2024, Beijing. China), 20–26.
29. Vidmachenko, A. P. (2025). *Features of Pluto's rotation around its axis and around the Sun*, Sciences of Europe, **156**, 24–28.
30. Vidmachenko, A. P. (2025). *Physical parameters of Pluto according to the results of remote observations and the earliest data from the flyby trajectory*, Proceedings of the 6th International scientific and practical conference "Scientific achievements of contemporary society" (January 10-12, 2025, London, United Kingdom), Chapter 60, 312–320.
31. Vidmachenko, A. P. (2025). *The chemical composition of Pluto's atmosphere*, The Proceedings of the 1st International Scientific and Practical Conference «Modern problems of science and technology» (January 20-22, 2025, Tallinn, Estonia), Section: Physical and mathematical sciences, 62–68.
32. Vidmachenko, A. P. (2025). *The earliest data on the general characteristics of Pluto's topography*, Proceedings of the 5th International scientific and practical conference "Science in the modern world: innovations and challenges" (January 23-25, 2025, Toronto, Canada), Chapter 35, 202–211.

33. Vidmachenko, A. P., Steklov, A. F. (2022). *Features of volcanic structures on Venus*, Proceedings of the 9th International scientific and practical conference “Modern directions of scientific research development”, 195–204.
34. Vidmachenko, A. P., Vidmachenko, H. A. (2007). *Is it dangerous asteroids?*, Astronomical almanac, **53**, 195–207.

Про авторів / About the authors

Анатолій Відьмаченко, доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України, професор кафедри фізики Національного університету біоресурсів і природокористування України, головний науковий співробітник відділу фізики субзоряних і планетних систем Головної астрономічної обсерваторії НАН України; вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна;

Anatoliy Vidmachenko, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine, Professor of the Department of Physics of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Chief Researcher of the Department of Physics of Substellar and Planetary Systems of the Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, 15 Heroiv Oborony Str., Kyiv, 03041, Ukraine;

Олександр Мозговий, кандидат технічних наук, доцент, кафедра інформаційно-аналітичної діяльності та інформаційної безпеки, Національний транспортний університет, вул. М. Омеляновича-Павленка,1, м. Київ, 01010, Україна;

Oleksandr Mozghovyi, Candidate of Science in Engineering, Associate Professor, Department of Information and Analytical Activities and Information Security, National Transport University, 1, Mykhaila Omelianovycha – Pavlenka Str. Kyiv 01010, Ukraine;

Юлія Божок, доцент кафедри транспортного права та логістики, Національний транспортний університет, вул. М. Омеляновича-Павленка,1, м. Київ, 01010, Україна;

Yuliia Bozhok, Associate Professor, Department of Transport Law and Logistics, National Transport University, 1, Mykhaila Omelianovycha – Pavlenka Str. Kyiv 01010, Ukraine.

Отримано / Received 02.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 21.04.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ

Theory and methods of teaching mathematics, computer science, physics and astronomy

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 83–92.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 83–92.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 373.5.091.27:51

Розвиток критичного мислення школярів засобами олімпіадної математики

Михайло Білик[1], Євгенія Калашнікова[2], Ігор Калашніков[3]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра алгебри та методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
bilmisha2@gmail.com
https://orcid.org/0009-0000-7177-9582

[2] Український державний університет імені Михайла Драгоманова,
кафедра вищої математики, м. Київ, Україна
evgeniak885@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0274-7031

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра алгебри та методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
ihor.kalashnikov@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7961-8134

Анотація. В публікації розглянуто роль математичних олімпіад у розвитку критичного мислення школярів, зокрема учнів 5-го класу. Проаналізовано переваги та можливі ризики участі молодших школярів у таких інтелектуальних змаганнях. Вказано на те, що олімпіадні задачі сприяють розвитку логічного мислення, навичок аналізу, креативності та стійкості до стресу.

В межах підготовки до публікації, було проведено відбірковий тур VII Всеукраїнської олімпіади імені Юлії Здановської. В публікації також наведено конкретні завдання олімпіади, та спрогнозовано їхній вплив на формування математичних компетентностей учнів. Обґрунтовано важливість створення сприятливого середовища для навчання, що допомагає дітям отримувати задоволення від процесу розв'язування задач та сприяє інтересу до математики.

Ключові слова: критичне мислення школярів, олімпіада з математики.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-08

1. Вступ

Математичні олімпіади — це чудова можливість для школярів продемонструвати свої здібності, розвинути логічне мислення та навчитись нестандартних підходів розв'язування задач.

Олімпіадною математикою в Україні займалось чимало науковців, зокрема В'ячеслав Андрійович Ясінський — автор багатьох науково-методичних праць, присвячених підготовці учнів і студентів до математичних змагань. Автор і співавтор книг: «Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування» [3], «Секрети підготовки до Всеукраїнських та Міжнародних олімпіад. Геометрія» [5], «Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра» [4], та інші.

Але, навіть з огляду на вище сказане, наразі досить часто можна почути запитання: чи потрібні п'ятикласникам такі інтелектуальні змагання як олімпіади з математики?

Це запитання спонукає чимало дискусій серед учителів, батьків і навіть учнів.

На нашу думку, дискусійність цього питання є наслідком недостатнього висвітлення аргументів, на користь зайнятості олімпіадною математикою школярів. Хоча в науковій літературі періодично аналізується наш досвід, а також досвід інших країн по роботі з обдарованими дітьми, наприклад, [1], пояснюється необхідність формування інтересу учнів до математичної задачі та процесу її розв'язування [2].

Але, публікації розглянуті вище, і аналогічні до них, як правило, проектуються на вузьке коло читачів, тому на нашу думку статті методичного характеру, можна привязувати до конкретних подій. Нижче нами розглянуто умови, за яких участь молодших школярів у математичних олімпіадах може бути для них корисною. А також наведемо приклад, одного з варіантів відбіркового туру, для пятикласників VII Всеукраїнської олімпіади для учнів 5 — 7 класів імені Юлії Здановської, що проходив у Вінниці 27 лютого 2025 року.

2. Постановка проблеми

В сучасній освіті критичне мислення є однією з ключових навичок, необхідних для успішного навчання та розвитку особистості. Проте традиційний навчальний матеріал в шкільних підручниках математики та методика його вивчення не завжди сприяють достатньому розвитку цієї навички.

Саме олімпіадна математика, яка містить нестандартні задачі процес розв'язування яких включає: логічне мислення, аналіз різних стратегій розв'язування, інтуїцію та інше, може стати ефективним засобом формування критичного мислення школярів.

Основна проблема полягає в тому, що:

- недостатня увага приділяється розвитку критичного мислення в рамках стандартного курсу математики;
- олімпіадна математика використовується переважно для підготовки учнів до змагань, а її потенціал у формуванні мислення не завжди реалізується;
- відсутні чіткі методики інтеграції олімпіадних задач у загальний процес навчання для розвитку критичного мислення.

Метою даної статті є аналіз того, яким чином олімпіадна математика може стати ефективним інструментом для розвитку критичного мислення школярів та як її можна інтегрувати в навчальний процес.

3. Основні результати

1. Проаналізовано роботу з обдарваними до математики дітьми в Україні.

2. Створено добірку завдань для учнів п'ятого класу, які брали участь у відбірковому турі VII Всеукраїнської олімпіади імені Юлії Здановської.

3. Проведено відбірковий тур вказаної олімпіади, та проаналізовоно отримані результати.

Якщо задаватись запитанням: які переваги надає п'ятикласнику участь в олімпіадах з математики? Отримаємо відповідь з декількох пунктів, підтверджених багатьма випадками.

1. У таких дітей краще розвинуте логічне та критичне мислення. Математика — це не лише обчислення, а насамперед, вміння послідовно будувати правильні міркування. Олімпіадні задачі часто відрізняються від стандартних шкільних вправ, вимагаючи нестандартного підходу й креативності. Такі завдання допомагають дітям мислити ширше, аналізувати детально умови задач й знаходити ефективні способи розв'язання. Ці вміння залишаються учневі надалі не лише на уроках математики, а й у повсякденному житті.

2. Формування наполегливості та цілеспрямованості. Підготовка до олімпіади навчає учнів систематичній праці, умінню працювати над складними завданнями й не здаватися при перших труднощах. Успішне розв'язання складної задачі приносить радість і впевненість у власних силах. Це формує у дітей важливі риси характеру: наполегливість, відповідальність та бажання досягати результатів.

3. Мотивація до навчання. Для багатьох учнів участь в олімпіаді — це шанс проявити себе, отримати визнання серед однокласників та учителів. Перемоги, а навіть і участь у таких заходах мотивують дітей більше цікавитися предметом, ставити перед собою нові цілі й досягати їх.

4. Розвиток навичок роботи в стресових умовах. Олімпіади проводяться у форматі змагань із часовими обмеженнями. Це вчить школярів зосереджуватися, швидко приймати рішення й раціонально розподіляти час. Такі навички корисні не лише в навчанні, але й у багатьох життєвих ситуаціях.

Звісно, можливі недоліки та ризики олімпіадного руху, виокремимо деякі з них.

1. Ризик втрати інтересу через складність завдань. Надто складні задачі можуть призвести до того, що дитина відчує розчарування й втратить інтерес до математики. Дуже важливо підбирати завдання відповідно до віку й підготовки учнів, щоб олімпіада приносила задоволення, а не стрес.

2. Надмірний тиск з боку дорослих. Іноді батьки чи вчителі можуть занадто наполягати на участі й високих результатах, що створює психологічний тиск на дитину. Олімпіада має сприйматися як цікава пригода, а не як обов'язок чи боротьба за перше місце.

3. Конкуренція замість командного духу. Хоча здорове суперництво може бути корисним, надмірна орієнтація на перемогу іноді призводить до зайвої конкуренції, що не завжди корисно в такому віці. Важливо наголошувати на цінності самого процесу розв'язування задач і задоволенні від навчання.

Отже, — як зробити олімпіаду корисною для п'ятикласників?

◦ Добір цікавих і посильних завдань. Завдання мають бути не лише складними, але й цікавими, такими, щоб дитина отримувала задоволення від їхнього розв'язання.

Процес розв'язування має розширювати кругозір учня, формувати у нього нові вміння та навички.

◦ Підтримка замість тиску. Дорослі мають підтримувати й заохочувати дітей, допомагати їм справлятися з труднощами без надмірних вимог.

◦ Сприйняття олімпіади як гри. Для молодших школярів важливо, щоб олімпіада асоціювалася з грою, можна сказати, — з пригодою.

◦ Обговорення результатів. Після олімпіади доцільним є разом із дітьми розглянути задачі, похвалити за зусилля й проаналізувати помилки без осуду.

З вище сказаного, бачимо, — олімпіади з математики можуть бути дуже корисними для п'ятикласників, якщо вони проводяться з урахуванням вікових особливостей дітей і спрямовані не лише на результат, а й на розвиток інтересу до предмета. Важливо створити таку атмосферу, в якій дитина почуватиметься комфортно, отримуватиме задоволення від процесу й розвиватиме важливі навички. Пам'ятаймо: головне — не перемога, а цікавість до знань та бажання вчитися!

Нижче розглянемо задачі відбіркового туру VII Всеукраїнської олімпіади для 5 — 7 класів імені Юлії Здановської, який проходив у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського у 2025 році.

Задача №1. (7 балів) Із двох селищ одночасно назустріч один одному вирушили велосипедист і пішохід. Пішохід рухався зі швидкістю 3 кілометри за годину, що в 4 рази менше від швидкості велосипедиста. Знайдіть відстань між селищами, якщо велосипедист і пішохід зустрілися через 3 години після початку руху.

Такі задачі в п'ятому класі виконують кілька важливих функцій у розвитку учнів.

1. Розвиток логічного мислення. Учні вчаться аналізувати умову задачі, визначати, що дано і що потрібно знайти. Це допомагає формувати ланцюжки логічних міркувань.

2. Формування навичок роботи з часом, швидкістю та відстанню. Ці задачі знайомлять учнів із практичними поняттями з повсякденного життя: як пов'язані швидкість, час і відстань. Це допомагає розуміти реальні ситуації (наприклад, коли і куди можна встигнути, дійти чи доїхати).

3. Ведеться підготовка до абстрактного мислення. Хоч у п'ятому класі ще не вивчають алгебру повноцінно, подібні задачі розвивають уміння складати рівняння і працювати з невідомими величинами.

4. Розвиток уважності та вміння читати умову. Щоб правильно розв'язати задачу, потрібно уважно читати умову, виділяти ключові аспекти, й уникати зайвих деталей.

5. Формування навичок застосування знань у різних контекстах. Учні вчаться використовувати знання з математики для розв'язання життєвих ситуацій.

6. Мотивація та інтерес до математики. Подібні задачі можуть зацікавити учнів, показуючи, що математика — це не лише формули, а й інструмент для розв'язування практичних задач.

Такі задачі готують учнів до вивчення більш складних тем у старших класах, формуючи основу для подальшого вивчення математики та їх загального розвитку.

Відповідь до даної задачі: 45 кілометрів.

Задача №2. На урок фізкультури Аліна, Богдан, Віка і Гріша прийшли в однотонних футболках і шортах, синього або червоного кольору. У Аліни і Богдана футболки сині, а шорти різного кольору. У Віки і Гріші футболки різного кольору, а шорти червоні. Також відомо, що у хлопчиків футболки різні за кольором, і шорти теж за кольором різні. Хто з дітей в якій одежі?

Задачі такого гатунку призначені розвивати у дітей навички створення зручних моделей до досить складних ситуацій.

В даному випадку моделлю текстової задачі є таблиця, яка допомагає укомпактнити умову задачі, організувати інформацію та знайти логічні зв'язки між елементами представленими в умові.

Як бачимо, таблиця дозволяє легко знайти взаємозв'язки між іменами дітей та кольорами футболок і шортів.

	Аліна	Богдан	Віка	Гріша
Футболка	Синя	Синя	Синя	Червона
Шорти	Червоні	Сині	Червоні	Червоні

Такі вправи розвивають вміння аналізувати ситуацію, знаходити невідомі дані на основі наявних фактів, а також формулювати правильні висновки.

Із створеної таблиці одразу видно, хто з дітей як вдягнений.

Задача №3. Замість зірочок поставте такі цифри, щоб множення було виконано правильно:

$$\begin{array}{rcccc} & & * & * & * \\ \times & & & * & 2 \\ \hline & & * & 0 & 8 \\ + & * & 6 & * & \\ \hline & * & 1 & 2 & * \end{array}$$

Це класичний приклад криптарфметичної задачі, де потрібно знайти цифри, заховані за зірочками. У таких задачах кожна зірочка відповідає якійсь цифрі від 0 до 9, пропоноване завдання — відновити числа так, щоб множення було правильним.

Як зазвичай розв'язують такі задачі?

Звертають увагу на множення останньої цифри, аналізують переноси при множенні та додаванні, використовують логічні виключення.

Це допомагає звузити можливі варіанти перебору.

Навіщо потрібні такі задачі?

1. Розвиток логічного мислення. Ці задачі вимагають не просто арифметичних обчислень, а й аналізу, пошуку закономірностей і послідовності дій. Учень навчається робити висновки на основі отриманих підказок.

2. Тренування уваги до деталей. Під час розв'язання важливо не пропускати дрібниць. Такі задачі вчать уважності й акуратності.

3. Розвиток терпіння й наполегливості. Розв'язати криптарфметичну задачу не завжди виходить з першого разу. Це чудовий спосіб навчити дітей не здаватися й шукати нові підходи, навіть коли задача здається складною.

4. Сприяння креативному мисленню. Доводиться використовувати різні стратегії — від спроб і помилок до систематичного перебору варіантів. Це розвиває гнучкість мислення та вміння знаходити нестандартні розв'язання.

5. Підготовка до складніших математичних задач. Такі задачі формують навички, які згодом допомагатимуть у подальшому вивченні: математики, природничих наук, програмування.

6. Створення ігрового підходу до навчання. Пропоновані задачі схожі на головоломки, тому захоплюють учнів і допомагають вивчати математику із задоволенням.

Криптарфметичні задачі — це не просто про цифри, а й про розвиток: мислення, уваги, креативності та вміння долати труднощі. Вони роблять математику цікавою, захоплюючою грою, а не просто обчисленнями.

Відповідю до даної задачі є рівність: $254 \cdot 32 = 8128$.

Задача №4 (7 балів) Дано фрагмент шахової дошки на якій розміщено 2 чорних і

2 білих шахових коня, так як показано на малюнку, чи можна поміняти чорних і білих коней місцями (коні ходять за шаховими правилами), і якщо так, то за яку найменшу кількість ходів?

Такого виду задачі передбачають у процесі розв'язування створити математичну модель, а саме, модель у вигляді графа. Розв'язування таких задач формує в учнів специфічні вміння.

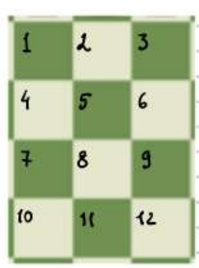
1. Уявляти взаємозв'язки між об'єктами та подіями у вигляді схем. Побудова графа допомагає краще зрозуміти, як об'єкти та події можуть бути пов'язані між собою.

2. Знаходити оптимальні розв'язки. Робота зі схемою допомагає візуалізувати інформацію та краще орієнтуватися в ній.

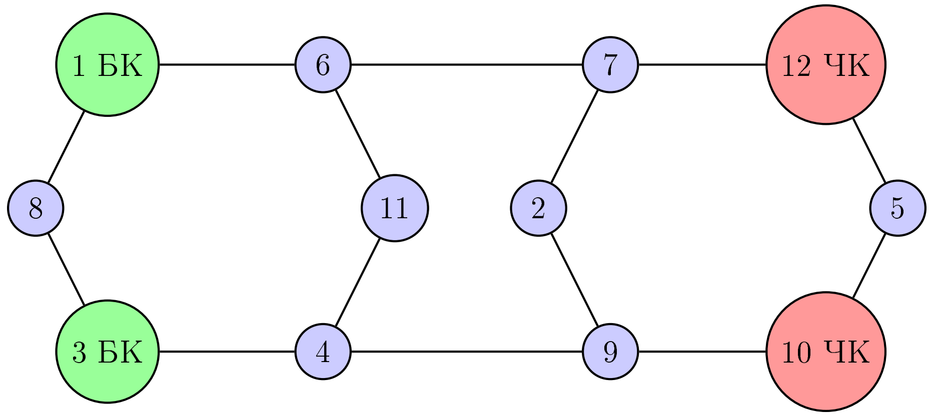
3. Хоча в п'ятому класі учні не знайомі з елементами теорії графів, але такі задачі дають базове розуміння про моделювання реальних ситуацій за допомогою графа.

4. Застосування математики у реальних ситуаціях, такі задачі показують практичність математики, наприклад, у плануванні маршрутів або в процесі розв'язування логістичних задач.

Розв'язуючи цю задачу, змоделюємо вказану ситуацію.



Пронумеруємо клітинки шахової дошки так, як на малюнку вище. Далі схематично покажемо, як може рухатись шаховий кінь. Наприклад, білий кінь (БК) стоїть в кітинці 1, і він може переміститись, за шаховими правилами, в клвтинки з номерами 8, або 6 і так далі. Хід коня на схемі, це рух по ребру, від одного кружечка, до іншого. Тепер, зрозуміло, що поміняти шахові коні місцями можна, наприклад, перемістивши їх по кругу, за 20 ходів. Виникає запитання, чи можна, їх поміняти за меншу кількість ходів?



Виявляється можна: нехай білий кінь (БК), який стоїть на клітинці з номером 3, перейде спочатку на клітинку з номером 4, а потім 11. Потім чорний кінь (ЧК), який стоїть на клітинці з номером 10 за 3 ходи займе його місце, а він за 3 ходи займе місце чорного. Ітак, щоб поміняти два нижніх шаховик коня місцями потрітно зробити 8 ходів:

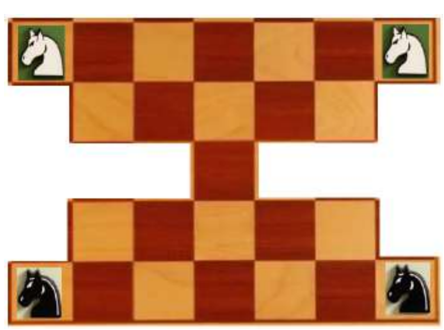
БК: 3 — 4
4 — 11
ЧК: 10 — 9
9 — 4
4 — 3
БК: 11 — 4
4 — 9
9 — 10.

Оскільки схема симетрична, то білого і чорного коня, що стоять на клітинках 1 та 12 відповідно, також можна поміняти за 8 ходів.

Відповідь. Поміняти чорних і білих коней місцями можна. Найменша кількість ходів 16.

Можливі і більш складні ситуації на шаховій дошці, наприклад:

Поміняйте місцями 2 білих і 2 чорних шахових коня місцями на фрагменті шахової дошки за найменшу кількість ходів. Мається на увазі, що шахові коні ходять за шаховими правилами, і потрібно поміняти їх так, щоб білі коні стояли на місці чорних, а чорні на місці білих.

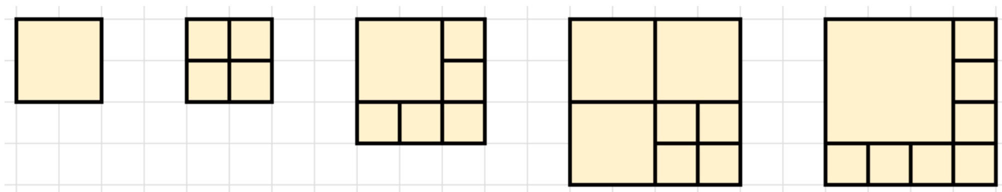


(*Автор задачі: Антон Шишковський*)

Розв'язання цієї задачі пропонуємо здійснити самостійно.

Задача №5. (7 балів) На скільки менших квадратиків можна розділити великий квадрат, горизонтальними та вертикальними лініями, які паралельні до його сторін?

У процесі розв'язування даної задачі спробуємо розділяти квадрат на квадратики. Шляхом логічних міркувань можу отримати: 1, 4, 6, 7, 8, ... квадратиків.



2. Поділить квадрат на 2, 3, або 5 квадратиків не получається. Пояснення учнями п'ятого класу, цього фрагменту розв'язання можуть різнитися, але строгого доведення неможливості поділу на 2, 3, або 5 квадратиків, вимагати не варто.

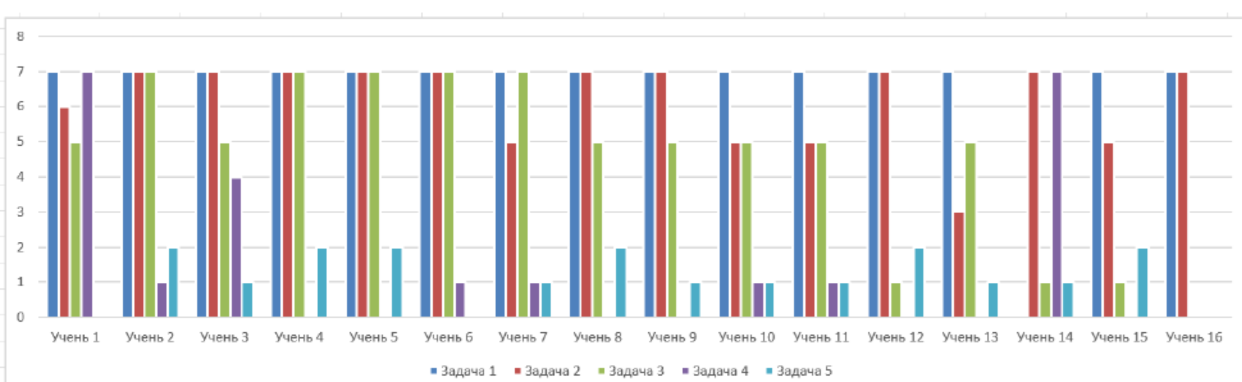
3. Помічаємо, що розділивши квадрат на 4 квадратика, ми, фактично додаємо до конструкції ще 3 квадрата.

Отже, якщо ми вміємо додавати 3 квадрата, то:

$$6+3=9,$$
$$7+3=10,$$
$$8+3=11,$$
$$9+3=12,$$
$$10+3=13,$$
$$\ldots$$

4. Отже ми зможемо розділити квадрат на будь-яке число квадратів, окрім: 2, 3, і 5. Останню фразу можна вважати відповідю.

Висновки. Результат відбіркового туру вказує на те, що з шістнадцяти учасників, першу і другу задачу, це ті задачі, з якими учні зустрічалися у школі на уроках математики, учні в переважній більшості розв'язали. Із завданням №3 впорались на максимальний бал всього 5 учнів. А от останні 2 задачі, саме ті, які вимагають: створення моделей, генерування варіантів розв'язання, викликали в учнів значні труднощі.



Олімпіадна математика має значний потенціал у формуванні критичного мислення школярів, але не завжди реалізується повною мірою в шкільній практиці. Наразі відсутні чіткі методики інтеграції олімпіадних завдань у навчальний процес. Тому, на нашу думку, необхідно продовжити досліджувати, яким чином олімпіадна математика може стати ефективним інструментом для розвитку критичного мислення школярів.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів, а також у процесі дослідження дотримувались всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Наразі підготовкою школярів до олімпіад з математики переймаються їхні рідні, учителі шкіл, учителі відповідних центрів, зокрема: центру професійного розвитку педагогічних працівників Вінницької міської ради, Вінницького міського центру з інтеграції до європейського та світового освітнього простору, та інші, а також викладачі та студенти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Саме цим людям висловлюємо подяку, за багаторічну сумлінну працю в області підготовки учнів до олімпіад з математики. Автори також заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Воєвода А. Л. Особливості роботи з математично обдарованими учнями в державі Ізраїль. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2023» : матеріали IV Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції (10 листопада 2023р., м. Суми). Суми : СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023. С. 13 – 15.
2. Матяш, О. І., Коваль, О. С., Михайленко, Л. Ф. Формування в учнів інтересу до математичних задач та їх розв'язування. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* 2022. С. 103 – 113. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2022-65-103-113
3. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль : Богдан, 2005. 208 с.
4. Ясінський В. А., Панасенко О. Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра. Вінниця : Середняк Т.К., 2015. 272 с.
5. Ясінський В. А., Панасенко О. Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія. Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2014. 224 с.

UDC 373.5.091.27:51

Developing critical thinking in schoolchildren through Olympiad mathematics

Bilyk Mykhailo, Yevheniia Kalashnikova, Ihor Kalashnikov

Abstract. This publication examines the role of mathematical olympiads in the development of critical thinking among schoolchildren, in particular 5th grade students. The benefits and possible risks of younger schoolchildren's participation in such intellectual competitions are analyzed. It is indicated that olympiad tasks contribute to the development of logical thinking, analytical skills, creativity, and stress resistance.

As part of the preparation for the publication, the qualifying round of the VII All-Ukrainian olympiad named after Yulia Zdanovskaya was held. The publication also provides specific tasks of the olympiad and predicts their impact on the formation of students' mathematical competencies. The importance of creating a favorable learning environment that helps children enjoy the process of solving problems and promotes interest in mathematics is substantiated.

Keywords: critical thinking of schoolchildren, mathematics olympiad.

References

1. Voevoda A.L. (2023). *Peculiarities of working with mathematically gifted students in the state of Israel*, Development of intellectual skills and creative abilities of pupils and students in the process of teaching disciplines of the natural and mathematical cycle «ITM*plus — 2023» : materials of the IV International Distance Scientific and Methodological Conference (November 10, 2023, Sumy), SumSPU named after A.S. Makarenko, Sumy, 13 – 15.
2. Matiash, O. I., Koval, O. S., Mykhailenko, L. F. (2022). *Formuvannia v uchniv interesu do matematychnykh zadach ta yikh rozviazuvannia [Forming students' interest in mathematical problems and their solution*, Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy [Modern information technologies and innovation methodologies of education in professional training: methodology, theory, experience, problems], **65**, 103 – 113. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2022-65-103-113
3. Yasinsky V. A. (2025). *Problems of Mathematical Olympiads and Methods of Their Solution*, Bohdan, Ternopil.
4. Yasinsky V. A., Panasenko O. B. (2015). *Secrets of preparing schoolchildren for the All-Ukrainian and International Mathematical Olympiads. Algebra*, Serednyak T.K., Vinnytsia.
5. Yasinsky V. A., Panasenko O. B. (2014). *Secrets of preparing schoolchildren for the All-Ukrainian and International Mathematical Olympiads. Geometry*, OOO «Nilan-LTD».

Про авторів / About the authors

Михайло Білик, аспірант, кафедра алгебри та методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Mykhailo Bilyk, PhD student, Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Євгенія Калашнікова, аспірантка, кафедра вищої математики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна.

Yevheniia Kalashnikova, PhD student, Department of Higher Mathematics, Dragomanov Ukrainian State University, Pirogov, 9, Kyiv, 01601, Ukraine.

Ігор Калашніков, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Ihor Kalashnikov, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematics Teaching Methods, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 30.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 93–103.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 93–103.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 373.5.016:004]:376-056.262

Методичні засади навчання теми «Опрацювання табличних даних» учнів з порушеннями зору в умовах інклюзії

Олена Косовець

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kosovets.op@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8577-3042

Анотація. У статті розглянуто методичні особливості організації навчання теми «Опрацювання табличних даних» шкільного курсу інформатики для учнів з глибокими порушеннями зору в умовах інклюзивного класу. Наголошено на недостатності загальних методичних рекомендацій для ефективної реалізації інклюзивного підходу на рівні окремих предметів, зокрема інформатики. Проаналізовано технічні та методичні аспекти, які забезпечують доступність цифрового середовища для незрячих учнів: використання програм екранного озвучення (NVDA), адаптація навчальних матеріалів підручника з інформатики, подання клавіатурних команд, індивідуалізація навчальних завдань. Наведено приклади адаптованих вправ і фрагментів практичних робіт, що враховують специфіку сприйняття інформації учнями з порушеннями зору. Окреслено підходи до формування цифрової грамотності, розвитку просторового та логічного мислення в інклюзивному середовищі. Запропоновані методичні рішення сприяють створенню доступного та ефективного освітнього простору відповідно до потреб усіх учнів.

Ключові слова: інклюзивна освіта, методика навчання інформатики, опрацювання табличних даних, навчання учнів з глибокими порушеннями зору, екранний диктор, адаптація навчального матеріалу з інформатики.

1. Вступ

В основі міжнародних стандартів прав людини лежить принцип рівноправної участі кожної людини в суспільстві без будь-якої дискримінації. Розвиток інклюзивного навчання для дітей з порушеннями фізичного та/або психічного здоров'я в Україні є не лише сучасною вимогою, але й важливим кроком до забезпечення їхнього права на якісну освіту [1]. Правове підґрунтя інклюзії в освіті визначається чинним законодавством [8-10] та міжнародними документами. Конституція України закріплює право кожного на освіту та обов'язковість повної загальної середньої освіти [9].

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-14

Аналіз наукових публікацій та нормативно-методичних матеріалів свідчить про суттєві зрушення у сфері інклюзивної освіти в Україні, які ґрунтуються на міжнародних стандартах і національному законодавстві. Згідно з дослідженнями, ключовим етапом стало прийняття Концепції розвитку інклюзивного навчання 2010 року, яка заклала правові підстави для створення гнучкої освітньої системи, орієнтованої на потреби дітей з ООП [10]. Цей документ акцентував на необхідності формування індивідуалізованого підходу, медико-соціального супроводу та адаптації навчального середовища.

О. Поступна та В. Шведун, аналізуючи статистичні дані, розглядали розвиток інклюзивної освіти в Україні. Їхнє дослідження показало, що в контексті глобалізації та воєнних реалій України, інклюзивна освіта є довгостроковою стратегією, націленою на створення якісного та доступного соціально-освітнього середовища для всіх, хто цього потребує. [14]

Автори навчального посібника [6] висвітлюють концептуальні засади інклюзивної освіти, міжнародне і національне законодавство з розвитку інклюзивної освіти, зарубіжний досвід впровадження та державно-громадське управління інклюзивною освітою. Особлива увага відведена питанню навчання дитини з особливими освітніми потребами в системі закладів загальної середньої освіти. Автори наголошують на важливості дотримуватись принципів універсального дизайну інклюзивного освітнього середовища, створення команди психолого-педагогічного супроводу дитини з ООП, розробки індивідуальної програми розвитку дитини з ООП, звертають увагу на вдосконалення педагогічних технологія навчання в інклюзивному освітньому середовищі з урахуванням індивідуалізації освітнього процесу, спільного навчання учнів з ООП в інклюзивному класі, подолання навчальних і поведінкових труднощів, оцінювання результатів інклюзивного навчання та адаптації освітнього середовища.

На практиці, створення інклюзивного класу ініціюється керівництвом навчального закладу на основі заяви батьків або законних представників дитини та висновку інклюзивно-ресурсного центру, який оцінює індивідуальні потреби та можливості дитини [6, 7, 16]. Навчання дітей з особливими освітніми потребами (далі ООП) в інклюзивному середовищі має позитивний вплив на їхній особистісний розвиток та соціальну інтеграцію у суспільне життя громади. Активна взаємодія з однокласниками в рамках спільної навчальної програми є ключовим фактором інклюзивного освітнього середовища. Крім того, це створює сприятливу атмосферу для формування толерантного ставлення однокласників, які усвідомлюють цінність різноманітності, а обговорення принципів взаємодопомоги та взаємопідтримки зміцнює їхні соціальні навички.

Науковці Г. Шумський, Й. Смогожевська, П. Григель провели в Польщі лонгітюдне дослідження, спрямоване на порівняння академічних досягнень 1552 учнів без інвалідності в трьох типах освітніх закладів (загальноосвітньому, інклюзивному зі спільною присутністю 3-5 учнів з інвалідністю та інклюзивному з 1-2 учнями з інвалідністю), що виявило відсутність статистично значущих відмінностей у динаміці змін їхніх досягнень з мови та математики протягом восьмимісячного періоду спостереження. Отримані результати свідчать про те, що навчання в інклюзивних класах, незалежно від кількості учнів з інвалідністю, не чинить ані негативного, ані позитивного впливу на академічні успіхи учнів без інвалідності порівняно з навчанням у загальноосвітніх класах. Це має важливе значення для подальшого розвитку інклюзивної освіти, підтверджуючи, що інтеграція учнів з ООП не є перешкодою для академічного прогресу їхніх однолітків без інвалідності. Отримані дані можуть слугувати підґрунтям для прийняття обґрунтованих рішень у сфері освітньої політики та практики інклюзивної освіти. [3]

Я. Ніколаєнко у статті зазначає необхідність координації освітнього процесу з урахуванням рекомендацій та інструкцій щодо організації інклюзивного навчання, зокрема в умовах чинного воєнного стану. У дослідженні розкрито специфіку взаємодії педагогів початкової школи з батьками дітей з ООП, а також виокремлено комплекс взаємопов'язаних факторів, спрямованих на якісне покращення та модернізацію інклюзивної освіти в Україні. Автор наголошує, що створення ефективного інклюзивного освітнього середовища в сучасній початковій школі обумовлено рівнем професійної спроможності педагогів до реалізації поставлених цілей у практичній діяльності. [13]

Дослідниками Л. Потапюк та А. Дендак проведено огляд сучасних наукових напрацювань у цій галузі, визначено основні складники успішного впровадження інклюзивної освіти та висвітлено науково-теоретичні розробки проблем інклюзивної педагогіки. Разом з тим, виявлено низку проблем: недостатнє матеріально-технічне забезпечення, необізнаність адміністрації щодо фінансових ресурсів, низький рівень знань про ефективне використання коштів, недосконалість та неузгодженість нормативно-правової бази, недостатнє державне фінансування розвитку інклюзії та зниження мотивації педагогічних працівників через неадекватну оплату праці. Запропоновано шляхи подолання існуючих проблем: активної участі держави у впровадженні змін, модернізації правових засад для подальшого розвитку інклюзивної освіти, в основі якої має бути створення оптимальних умов для навчання, соціальної адаптації та інтеграції в суспільство дітей з ООП. Отримані результати підкреслюють важливість комплексного підходу до розвитку інклюзивної освіти, що включає не лише теоретичні розробки, але й практичні заходи щодо забезпечення необхідних ресурсів, удосконалення законодавства та підвищення професійної компетентності педагогічних працівників. [15]

Також варто зазначити, що у роботі [2] здійснено аналіз 36 досліджень, присвячених ставленню вчителів початкових шкіл до інклюзивної освіти, що виявив переважно нейтральне або амбівалентне ставлення педагогів до цієї освітньої парадигми. Результати підтверджують попередні висновки про те, що сприйняття інклюзії значною мірою залежить від типу інвалідності учнів, і вчителі звичайних початкових шкіл демонструють неоднозначну підтримку концепції «інклюзії для всіх». При цьому спостерігається практична відсутність досліджень, спрямованих на виявлення ефективних шляхів покращення ставлення вчителів до інклюзивного навчання в останні роки.

2. Постановка проблеми

Імплементація інклюзивної освіти в закладах загальної середньої освіти є вагомим кроком на шляху до забезпечення рівноправного доступу до якісної освіти для всіх категорій учнів, включаючи дітей з ООП. Незважаючи на значний обсяг існуючої методичної літератури, що розкриває загальні засади, підходи та стратегії інклюзивного навчання [6, 7, 11, 13, 15], спостерігається недостатність предметно-орієнтованих методичних рекомендацій, зокрема з інформатики. Універсальні методичні настанови, будучи важливим підґрунтям, часто не забезпечують педагогів конкретними інструментами та алгоритмами дій для ефективної організації освітнього процесу з урахуванням різноманітності нозологій та індивідуальних потреб учнів з ООП.

Метою статті є здійснення аналізу організаційно-методичних засад інклюзивного навчання з урахуванням потреб учнів з особливими освітніми потребами та розроблення практико-орієнтованих методичних рекомендацій для формування предметних компетентностей з опрацювання табличних даних у межах шкільного курсу інформатики в інклюзивному класі закладу загальної середньої освіти.

3. Основні результати

Останніми роками спостерігається зростання кількості методичної літератури, присвяченої загальним засадам інклюзивної освіти, що є позитивною тенденцією в контексті реформування системи загальної середньої освіти. Ці матеріали формують базове уявлення про принципи інклюзії, зокрема про необхідність адаптації освітнього середовища, врахування індивідуальних потреб учнів, налагодження партнерської взаємодії між учасниками освітнього процесу тощо. Проте такого загального підходу недостатньо для ефективної реалізації інклюзивного навчання на рівні окремих навчальних предметів. Зокрема, постає потреба в розробленні предметно-орієнтованих методичних рекомендацій, з акцентом на викладання інформатики учням з ООП в інклюзивних класів закладів загальної середньої освіти. Існуючі напрацювання не дають вичерпної відповіді на питання, яким чином організувати навчання таких учнів роботі з текстовими та табличними даними, алгоритмізацією, програмуванням, а також формуванню цифрових компетентностей загалом. Отже, актуальним є розроблення педагогічних технологій, що враховуватимуть як зміст предмета, так і індивідуальні освітні потреб усіх учнів інклюзивного класу.

Розглянемо приклад організаційно-методичних заходів, спрямованих на здобуття учнями з глибокими порушеннями зору конкретних результатів навчання з опрацювання табличних даних в умовах інклюзії.

У процесі навчання теми «Опрацювання табличних даних» в інклюзивному класі необхідно враховувати як змістову специфіку теми, так і індивідуальні освітні потреби учнів з ООП. Ця тема передбачає формування в учнів навичок створення, форматування та аналізу таблиць у табличному процесорі (наприклад, Microsoft Excel або Google Таблиці), що вимагає розвитку алгоритмічного мислення, логіки, вміння працювати з інтерфейсом програми та просторовою уявою.

З організаційних заходів, важливо забезпечити:

–доступність цифрового середовища (наявність спеціального програмного забезпечення, пристроїв із допоміжними функціями – екранні диктори, масштабування, екранна клавіатура тощо);

–диференційовану організацію навчального процесу (робота в парах, групах, індивідуальні завдання);

–створення індивідуальних навчальних траєкторій відповідно до індивідуальної програми розвитку учня.

З методичних заходів, доцільно:

–використовувати мультимодальні інструкції (усні пояснення, аудіальні навчальні матеріали, відео з субтитрами або аудіодискрипцією);

–розбивати завдання на послідовні, чітко сформульовані кроки;

–застосовувати вправи на розвиток логіко-математичних та алгоритмічних операцій через таблиці;

–інтегрувати ігрові або сюжетні елементи для підвищення мотивації;

–забезпечувати зворотний зв’язок за допомогою простих критеріїв оцінювання.

Ефективне опрацювання навчальної теми можливе за умови цілісного підходу до організації інклюзивного навчання, коли адаптації стосуються не лише змісту, а й методів, засобів і форм подання інформації, відповідно до індивідуальних можливостей кожного учня.

Однією з обов’язкових умов організації доступного освітнього середовища для учнів з глибокими порушеннями зору є встановлення та налаштування програми екранного диктора, які забезпечують голосовий супровід українською мовою усіх дій, які виконує учень на комп’ютері. Це дає змогу учню орієнтуватися в інтерфейсі операційної системи та прикладного програмного забезпечення, здійснювати необхідні налаштування і повноцінно працювати, зокрема з табличним процесором.

Сучасні програми звукового супроводу, наприклад, екранний диктор NVDA якісно озвучує текстовий матеріал підручника у форматі pdf. Варто зазначити, що програма екранного диктора не читає навчальні підручники із захистом для pdf-файлів.

Керування всіма процесами на комп'ютері учень з глибокими порушеннями зору здійснює винятково за допомогою відповідних клавіш клавіатури або їхніми сполученнями. Тому навчання має включати систематичне опрацювання клавіатурних команд, які виконують певні дії – навігацію, введення та редагування даних, форматування таблиць, створення формул тощо. У зв'язку з цим доцільним є включення до навчального пояснення не лише опису функціоналу програми, а й конкретних сполучень клавіш, як альтернативного способу виконання відповідних дій. Зазначення клавіатурних команд у навчальних посібниках також підтримує розвиток цифрової грамотності й самостійності учнів з ООП та відповідає рекомендаціям чинного законодавства щодо організації інклюзивного навчання. [12]

Для аналізу навчального матеріалу було обрано підручник з інформатики для учнів 6 класу авторів О. О. Бондаренко, В. В. Ластовецький, О. П. Пилипчук, Є. А. Шестопалов [4]. Наприклад, у наведеному тексті підручника «*В ОС Windows стандартним є запуск програм за допомогою меню Пуск. Для запуску Excel в ОС Windows 7 і далі: Пуск → Всі програми → Microsoft Office → Microsoft Excel*» [4, с. 109] екранний диктор чітко промовляє нестандартний символ «→» як «стрілка вправо» – це є важливим для повного розуміння освітнього контенту учнями з глибокими порушеннями зору.

Автори підручника вдало поєднують у змісті навчального матеріалу написання клавіш клавіатури з відповідними графічними командними кнопками стрічки інструментів, що забезпечують виконання основних команд табличного процесора. Такий підхід відповідає засадам інклюзивної освіти та сприяє створенню доступного освітнього простору, дозволяє реалізувати рівні можливості для всіх учнів у засвоєнні змісту тем, пов'язаних з опрацюванням табличних даних.

Адаптуємо навчальний матеріал підручника з пояснення теми опрацювання табличних даних до потреб учнів з глибокими порушеннями зору. Наприклад, у темі «§ 17. Середовище табличного процесора» [4, с. 110] доцільно доповнити поясненням, що для переходу до вкладок меню учень скористається клавішею F10 (або Alt), для переміщення між вкладками – клавішами зі стрілками ліворуч та праворуч, для роботи з кнопками групи інструментів на обраній вкладці – клавішею табуляція, для переходу між аркушами книги електронної таблиці – клавішами Ctr+Page Up та Ctr+Page Down. Учні знайомляться зі спільними елементами вікна офісних програм за допомогою рис. 1 [4, с. 110]. Наведемо перелік відповідних клавіатурних сполучень (таблиця 1), які уможливлюють доступ учня з глибокими порушеннями зору до даних елементів вікна.

У процесі навчання опрацювання табличних даних учнів з ОПП важливо враховувати труднощі, пов'язані з запам'ятовуванням великої кількості клавіатурних сполучень. Зокрема, при натисканні клавіші Alt у табличному процесорі (наприклад, Excel) на стрічці меню з'являться підказки у вигляді літер і цифр, які слугують навігаційними орієнтирами для подальших дій. Проте, програма екранного доступу (наприклад, NVDA) підказки не озвучує і учні з порушеннями зору не можуть самостійно скористатися ними. У таких випадках вчитель або асистент вчителя усно озвучує або записує відповідні клавіші. Доцільно також заздалегідь підготувати для учня список з переліком основних команд у текстовій формі до кожної теми чи уроку, адаптований до його індивідуальних освітніх потреб.

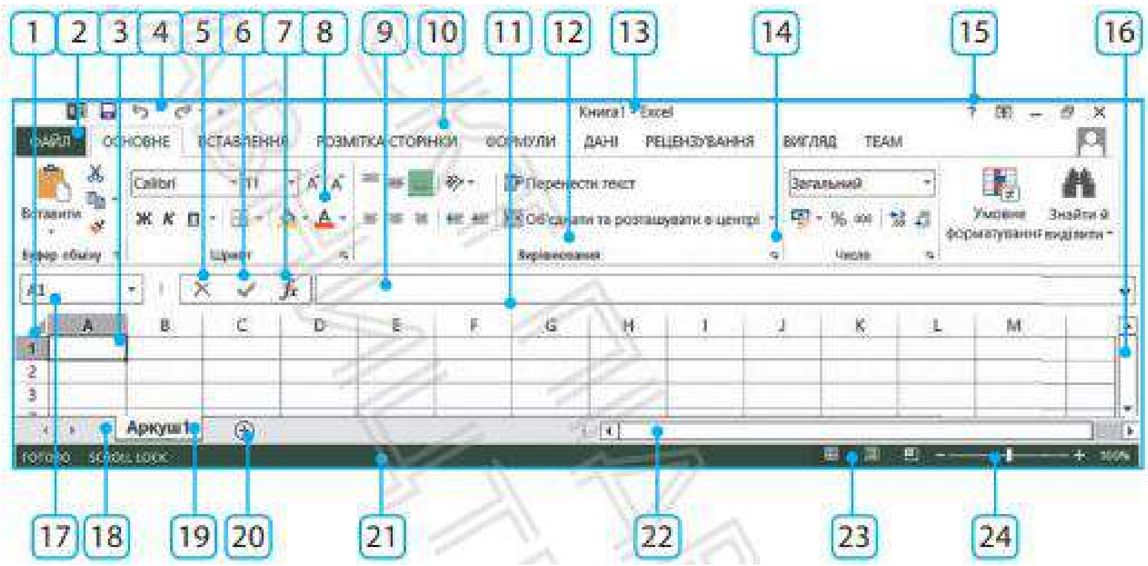


Рис. 1. Елементи вікна електронної таблиці [4, с. 110]

Таблиця 1. Спільні елементи вікна офісних програм

Елементи вікна	**Клавіатурна команда**
2 – вкладка Файл (Офіс)	F10 (або Alt)
4 – панель швидкого доступу	Alt та стрілка вгору
8 – стрічка інструментів	Alt і далі клавішею Tab обирати потрібну кнопку
10 – меню вкладок	Alt та стрілка вправо (щоб перейти назад на вкладки - Alt та стрілка вліво)
12 – група інструментів	Alt і далі клавішею Tab обирати потрібну кнопку
13 – рядок заголовка	Insert та клавіша з літерою T
15 – кнопка довідки	F1
16, 22 – смуги вертикального та горизонтального прокручування відповідно	Ctrl + PageUp, Ctrl + PageDown
23 – кнопки режиму перегляду	Alt та стрілка вправо перейти на вкладку Вигляд, клавішею Tab обрати режим перегляду
24 – засоби масштабування	Alt та стрілка вправо перейти на вкладку Вигляд, клавішею Tab обрати засоби масштабування

Детальніше зупинитись на орієнтації учнів по таблиці. Для озвучення у таблиці адреси комірки потрібно у вікні налаштування екранного диктора NVDA перейти до категорії «Форматування документа» і відмітити у групі «Інформацію про таблицю» команди Таблиці, Заголовки стовбців / рядків та Координати комірок (рис. 2). Після цього екранний диктор буде чітко промовляти адресу комірки, дані різного типу, які містить активна комірка, адресу виокремленого діапазону комірок та введену формулу чи функцію.

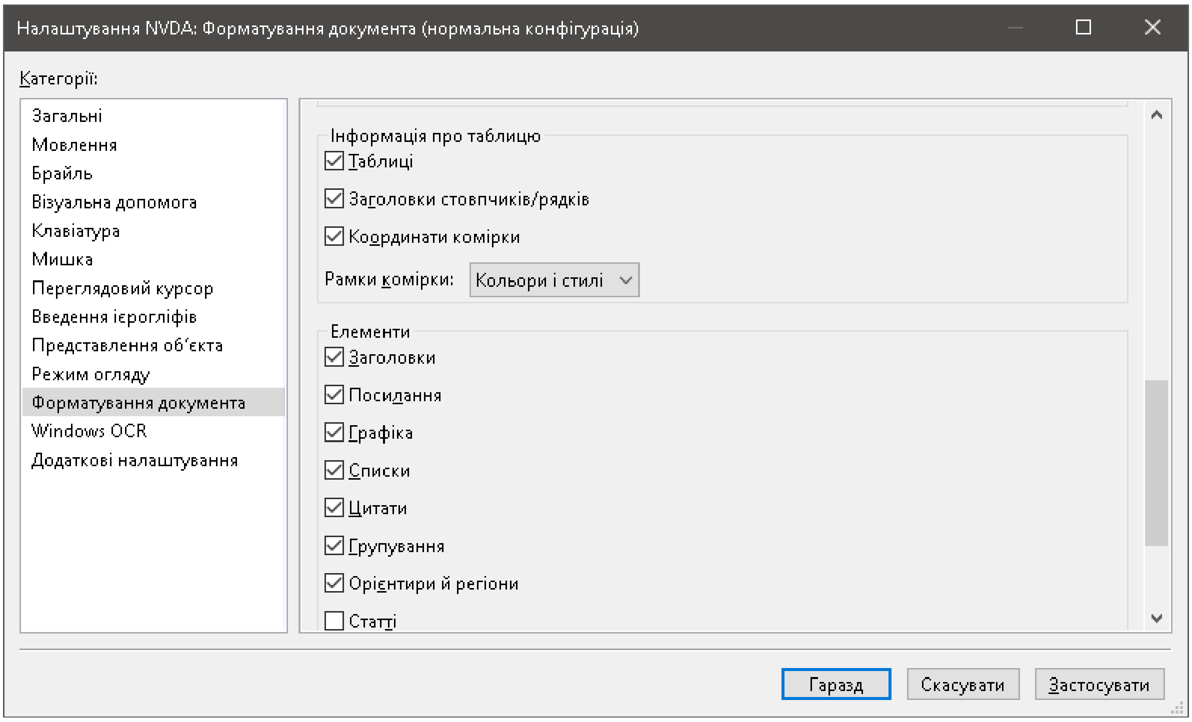


Рис. 2. Діалогове вікно налаштування озвучування електронних таблиць екранним диктором NVDA

Практичні вправи доцільно надавати у вигляді детальної тестової інструкції з назвами клавіатурних команд та чіткою послідовністю виконання дій.

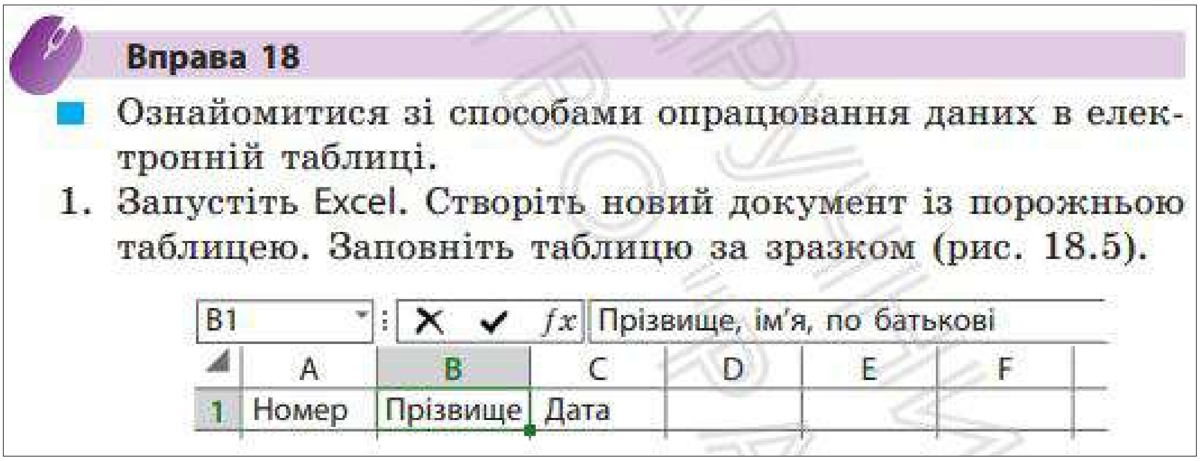


Рис. 3. Приклад вправи для опрацювання табличних даних [4, с. 118]

Приклад адаптованої вправи (доповнення позначено курсовим):

1. Запустіть Excel. Створіть новий файл *за допомогою контекстного меню (Створити → Microsoft Excel Worksheet)* з порожньою таблицею. Заповніть таблицю, *ввівши текст у такі комірки: у комірці A1 текст Номер, B1 текст Прізвище, імя, по батькові, C1 текст Дата.*

2. Зменшіть утричі ширину стовпців A і C *за допомогою клавіші Alt перейти на вкладку Основне, далі клавішею Табуляція обрати команду Формат. Кнопка Формат має згорнутий список команд, який відкривається клавішею пробіл. У цьому списку обрати*

команду Ширина. З'явиться *діалогове вікно з числовим значенням ширини стовбця. Ввести утричі менше числове значення. Для завершення натисни Enter. Якщо текст не повністю поміщається у комірку, екранний диктор озвучить, що комірка переповнена.* Текст у стовпці А видно не повністю, а у С – повністю. Чому?

3. Збільшіть уп'ятеро висоту першого рядка та вчетверо ширину стовпця В. *Вкладка Основне команда Формат → Ширина. У діалоговому вікні Ширина введіть відповідне числове значення.* Заповніть 4 клітинки ПІБ однокласників і однокласниць [4, с. 118].

У темі «§ 20. Формули в електронних таблицях» адаптація стосується пояснення, як працювати з формулами та адресами комірок.

1 спосіб: після знаку дорівнює учень самостійно вводить адреси комірок англійською мовою. Учні, які погано знають англійську розкладку клавіатури, часто допускають помилки у написанні адрес комірок, що негативно впливає на результат розрахунків.

2 спосіб: після знаку дорівнює учень переміщається по таблиці стрілками керування курсором до відповідної комірки, адреса якої автоматично з'явиться у комірці формули. Даний метод має недолік – програма NVDA під час створення формули (функції) не промовляє адреси комірок поза межами активної комірки з формулою. Учень аналізує таблицю, орієнтуються у внесених даних, які потрібно порахувати, і з'ясовує, що, як правило, розрахунок виконуємо в останньому стовбці таблиці, а комірки з даними розташовані перед коміркою з формулою, тобто ліворуч, і щоб «взяти» адресу комірки потрібно переходити вліво на сусідні комірки. Цей спосіб є дієвим і швидким. Після створення формули учень перевіряє правильність її введення, натиснувши клавішу редагування вмісту комірки F2.

Отже, наведені у роботі конкретні рекомендації з опрацювання табличних даних допоможуть вчителю інформатики організувати повноцінне інклюзивне навчання для учнів з глибокими порушеннями зору, що сприятиме їх успішній інформатичній освіті, соціалізації та особистісному розвитку в умовах сучасного освітнього середовища.

Висновки. Зростання обсягу методичної літератури, що розкривають особливості інклюзивної освіти, створює позитивні передумови для формування загального уявлення про інклюзію в системі загальної середньої освіти, однак цього недостатньо для ефективного викладання окремих предметів, зокрема інформатики.

Актуальною є потреба у предметно-орієнтованих методичних розробках, що враховують як специфіку навчального матеріалу, так і індивідуальні освітні потреби учнів з ООП, зокрема з глибокими порушеннями зору.

На прикладі теми «Опрацювання табличних даних» продемонстровано доцільність комплексного підходу до організації інклюзивного навчання, який охоплює адаптацію цифрового середовища, використання спеціалізованого програмного забезпечення (екранного диктора NVDA), а також адаптації методичних матеріалів та практичних завдань.

Ключовими умовами ефективного засвоєння теми для учнів з повною втратою зору є:

–наявність голосового супроводу комп'ютерних дій українською мовою;

–включення до навчальних матеріалів детального опису клавіатурних команд;

–використання покрокових інструкцій і мультимодальних інструкцій;

–створення персоналізованих освітніх траєкторій згідно з індивідуальною програмою розвитку учня.

Наведені приклади адаптованих вправ і технічних налаштувань демонструють можливості ефективного включення учнів з порушеннями зору в опанування складних тем, таких як робота з формулами, форматування та аналіз табличних даних.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у створенні практичних рекомендацій для вчителів інформатики, розробленні спеціалізованих адаптованих навчальних матеріалів та вдосконаленні педагогічних технологій у контексті інклюзивного навчання.

Отже, впровадження інклюзивного навчання в Україні є важливим кроком до забезпечення рівних прав на освіту для учнів з особливими освітніми потребами, що відповідає міжнародним стандартам. Однак, ефективна організація такого навчання потребує від педагогів спеціальних навичок та методичної підтримки, особливо при роботі з учнями з глибокими порушеннями зору. Створення адаптованих навчальних матеріалів, як-от розробка уроків інформатики з урахуванням використання екранних дикторів, є ключовим для повноцінної інтеграції таких учнів в освітній процес та забезпечення їм рівних можливостей у вивченні предмету.

Конфлікт інтересів і етика. Автор заявляє, що не має конфліктів інтересів. Автор також заявляє про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автор заявляє про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Kovtoniuk M. M., Kosovets O. P., Soia O. M., Pinaieva O. Yu., Ovcharuk V. G., Mukhsina K..Modeling the Development Process of Inclusive Education in Ukraine. *IAPGOŚ*. 2022. Vol. 68. P. 48–59 DOI: https://doi.org/10.15804/tner.22.68.2.03
2. Lindner K.-Th., Schwab S., Emara M., Avramidis E. Do teachers favor the inclusion of all students? A systematic review of primary schoolteachers' attitudes towards inclusive education. *European Journal of Special Needs Education*. 2023. Volume 38, Issue 6. DOI: https://doi.org/10.1080/08856257.2023.2172894
3. Szumski G., Smogorzewska J., Grygiel P. Academic achievement of students without special educational needs and disabilities in inclusive education–Does the type of inclusion matter? *PLOS ONE*. 2022. Vol. 17 (7): e0270124. DOI: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0270124
4. Бондаренко О. О., Ластовецький В. В., Пилипчук О. П., Шестопалов Є. А. Інформатика : підруч. для 6 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2023. 256 с.
5. Заярнюк О. В. Інклюзивна освіта в Україні: проблеми та шляхи їх вирішення. *Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету*. Серія: Економіка та управління, 2015. Випуск 11. С. 190–193. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvmgu_eim_2015_11_45
6. Інклюзивна освіта: навчальний посібник. Київ : ТОВ «Агентство «Україна», 2019. 300 с.
7. Колупаєва А. А., Тараненко О. М. Навчання дітей з особливими освітніми потребами в інклюзивному середовищі: навчально-методичний посібник. Харків: Видавничий дім «Ранок», 2019. 304 с.
8. Конвенція про права осіб з інвалідністю від 6 липня 2016 року № 995_g71. База даних «Законодавство України». URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/995_g71#Text
9. Конституція України: Закон України від 1 січня 2020 року № 254к/96-ВР / Верховна Рада України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/254%D0%BA/96-%D0%B2%D1%80
10. Концепція розвитку інклюзивного навчання. URL: https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennya-kontseptsii-rozvitku-inklyuzivnogo-navchannya
11. Костенко Т. М., Гудим І. М. Навчання дітей з порушеннями зору: навчально-методичний посібник. Харків: Видавничий дім «Ранок», 2019. 184 с.
12. Методичні рекомендації щодо організації інклюзивного навчання. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/inkluzyvne-navchannya/2019/08/07/rekomendatsiiorganizatsiya-navchannyaoop.pdf
13. Ніколаєнко Я. М. Сучасні технології інклюзивного навчання в ЗЗСО України. *Вісник науки та освіти*. 2023. Вип. 8 (14). С. 461–470.
14. Поступна О. В., Шведун В. О. Розвиток інклюзивної освіти в Україні через призму статистичних даних. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Актуальні проблеми розвитку українського суспільства. 2024. № 2. DOI: https://doi.org/10.20998/2227-6890.2024.2.19
15. Потапюк Л. М., Дендак А. С. Розвиток інклюзивної освіти в Україні: проблеми та перспективи впровадження. *Педагогічні науки: теорія та практика*. 2023. № 3. С. 7-13. URL: http://journalsofznu.zp.ua/index.php/pedagogics/article/view/3909

16. Як діти з інвалідністю або з ООП та їхні батьки можуть отримати різні послуги. URL: https://nus.org.ua/2021/12/20/yak-dityam-z-invalidnistyu-abo-oop-i-yihnim-batkam-otrymaty-rizni-poslugy/

UDC 373.5.016:004]:376-056.262

Methodological principles of teaching the topic 'Processing tabular data' to students with visual disabilities in inclusive settings

Olena Kosovets

Abstract. The article deals with the methodological features of organising the teaching of the topic 'Processing tabular data' in a school course of computer science for students with profound visual impairments in an inclusive classroom. The author emphasises the insufficiency of general methodological recommendations for the effective implementation of an inclusive approach at the level of individual subjects, in particular, computer science. The technical and methodological aspects that ensure the accessibility of the digital environment for blind students are analysed: the use of screen sound programs (NVDA), adaptation of educational materials of the computer science textbook, addition of keyboard commands, individualisation of educational tasks. Examples of adapted exercises and fragments of practical work that take into account the specifics of information perception by students with visual impairments are given. Approaches to the formation of digital literacy, development of spatial and logical thinking in an inclusive environment are outlined. The proposed methodological solutions contribute to the creation of an accessible and effective educational space that meets the needs of all students.

Keywords: inclusive education, computer science teaching methods, tabular data processing, teaching students with profound visual impairments, screen reader, adaptation of educational material.

References

1. Kovtoniuk, M. M., Kosovets, O. P., Soia, O. M., Pinaieva, O. Yu., Ovcharuk, V. G., Mukhsina, K. (2022). *Modeling the Development Process of Inclusive Education in Ukraine*, IAPGOŚ, **68**, 48–59. https://doi.org/10.15804/tner.22.68.2.03
2. Lindner, K.-Th., Schwab, S., Emara, M., Avramidis, E. (2023). *Do teachers favor the inclusion of all students? A systematic review of primary schoolteachers' attitudes towards inclusive education*, European Journal of Special Needs Education, **38** (6). https://doi.org/10.1080/08856257.2023.2172894
3. Szumski, G., Smogorzewska, J., Grygiel, P. (2022). *Academic achievement of students without special educational needs and disabilities in inclusive education–Does the type of inclusion matter?,* PLOS ONE, **17** (7): e0270124. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0270124
4. Bondarenko, O. O., Lastovetskyi, V. V., Pylypchuk, O. P., Shestopalov, E. A. (2023). *Informatics: textbook for 6th grade of general secondary* education, Ranok Publishing House, Kharkiv. [in Ukrainian]
5. Zayarnyuk O. V. (2015). *Inclusive education in Ukraine: problems and solutions,* Scientific Bulletin of the International Humanitarian University, Series: Economics and Management, **11**, 190–193. [in Ukrainian]. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvmgu_eim_2015_11_45
6. *Inclusive education*: a study guide,Agency Ukraine LLC, Kyiv, 2019. [in Ukrainian]
7. Kolupaieva, A. A., Taranenko, O. M. (2019). *Teaching children with special educational needs in an inclusive environment: a study guide*, Ranok Publishing House, Kharkiv. [in Ukrainian]
8. *Convention on the Rights of Persons with Disabilities* of 6 July 2016, No. 995_g71, Database 'Legislation of Ukraine'. [in Ukrainian]. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/995_g71#Text
9. *The Constitution of Ukraine*: Law of Ukraine of 1 January 2020 No. 254к/96-ВР, Verkhovna Rada of Ukraine. [in Ukrainian]. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/254%D0%BA/96-%D0%B2%D1%80
10. Concept of inclusive education development. [in Ukrainian]. https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennya-kontseptsii-rozvitku-inklyuzivnogo-navchannya
11. Kostenko, T. M., Hudym, I. M. (2019). *Teaching children with visual impairments: a study guide*, Ranok Publishing House, Kharkiv. [in Ukrainian]
12. Methodological recommendations for the organisation of inclusive education. [in Ukrainian]. https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/inkluzyvne-navchannya/2019/08/07/rekomendatsiiorganizatsiya-navchannyaoop.pdf
13. Nikolayenko, Y. M. (2023). *Modern technologies of inclusive education in general secondary schools of Ukraine Bulletin of Science and Education*, **8** (14), 461–470. [in Ukrainian]

14. Postupna, O. V., Shvedun, V. O. (2024). *Development of inclusive education in Ukraine through the prism of statistical data*, Bulletin of the National Technical University 'KhPI', Series: Actual problems of development of Ukrainian society, No. 2. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.20998/2227-6890.2024.2.19
15. Potapyuk L. M., Dendak A. S. (2023). *Development of inclusive education in Ukraine: problems and prospects of implementation*. Pedagogical Sciences: Theory and Practice, **3**, 7–13. [in Ukrainian]. http://journalsofznu.zp.ua/index.php/pedagogics/article/view/3909
16. *How children with disabilities or SEN and their parents can receive different services*. [in Ukrainian]. https://nus.org.ua/2021/12/20/yak-dityam-z-invalidnistyu-abo-oop-i-yihnim-batkam-otrymaty-rizni-poslugy/

Про автора / About the author

Олена Косовець, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Kosovets, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 29.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 104–112.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 104–112.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 371.3:[51+004]:004.5

Застосування інтерактивного середовища Jupyter Notebook при проведенні інтегрованих уроків з інформатики та математики

Ярослав Крупський[1], Галина Ковтонюк[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
krupskyi.ya@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-6324-2697

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukgm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3352-0358

Анотація. У статті розглянуто можливості застосування інтерактивного середовища Jupyter Notebook при проведенні інтегрованих уроків з інформатики та математики. Окреслено переваги середовища, розглянуто приклади завдань та взаємозв'язку з стандартами шкільної освіти.

Ключові слова: Jupyter Notebook, інтегровані уроки, Python, інформатика, математика, STEM-освіта, програмування.

1. Вступ

Питання інтеграції шкільних предметів, розглянуте у контексті історії розвитку науки, має давнє походження й досліджувалося в різних аспектах. Концепція інтеграції навчального матеріалу як складного, багатовимірного та часто суперечливого процесу передбачає аналіз філософських принципів і категорій, що об'єднують усю систему людського знання та виступають універсальними основами для різних наук.

З позиції педагогіки та наукової літератури, інтеграція трактується як процес зближення і взаємодії навчальних дисциплін, спрямований на формування в учнів цілісного бачення наукової картини світу. Потреба в інтеграції обумовлена не лише стрімким зростанням обсягу знань, а й головною метою освіти – гармонійним розвитком і саморозвитком особистості дитини.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-12

У сучасних освітніх системах інтеграція постає як ключовий принцип, що реалізується через створення багатовимірного, узгодженого уявлення про навколишній світ, де поєднуються різні підходи до пізнання реальності. Вона розглядається як дієвий дидактичний засіб для формування цілісного сприйняття світу через об'єднання різних компонентів навчального змісту.

Метою інтегрованого навчання є розвиток у школярів цілісного розуміння навколишнього середовища, активізація їхньої пізнавальної діяльності, стимулювання самовираження та самореалізації, а також формування гармонійної особистості з високим рівнем загальнолюдських цінностей.

Огляд наукових досліджень показує активний розвиток підходів до практичного впровадження інтегрованих уроків у шкільній освіті з використанням цифрових технологій. Питанням інтеграції предметів через інноваційні засоби навчання присвячені праці Конофольської В. В. [5], Дегтярьової Н. В. [6], Т. О. Пахомової, Н. В. Морзе, М. І. Жалдака. Зокрема, дослідники підкреслюють ефективність застосування комп'ютерно-орієнтованих систем, інтерактивних середовищ (наприклад, Jupyter Notebook) [2, 3, 4], які надають можливість об'єднувати теоретичні знання з практичними навичками в рамках одного навчального заняття. Такі підходи сприяють формуванню в учнів міжпредметних компетентностей і підвищенню мотивації до навчання. Прикладами інтегрованих уроків є теми «Розв'язування систем рівнянь засобами програмування на Python», «Побудова графіків математичних функцій за допомогою бібліотек matplotlib у Jupyter Notebook», «Моделювання статистичних даних і обробка результатів експериментів у середовищі інтерактивного програмування».

2. Постановка проблеми

Сучасна система освіти вимагає впровадження нових підходів до організації навчального процесу, які сприяють розвитку міжпредметних компетентностей учнів, підвищенню їхньої мотивації до навчання та формуванню цілісного світогляду. Одним із перспективних напрямів є проведення інтегрованих уроків інформатики та математики. Проте залишається відкритим питання вибору ефективних засобів, що забезпечують одночасне формування теоретичних знань і практичних навичок.

Інтерактивне середовище Jupyter Notebook, яке надає можливість поєднувати текст, код, графіки та математичні обчислення в одному просторі, має значний потенціал для вирішення цього завдання. Разом з тим, використання Jupyter Notebook у шкільній практиці інтегрованого навчання потребує додаткового теоретичного обґрунтування та розробки відповідних методичних рішень.

Мета дослідження полягає у визначенні можливостей використання інтерактивного середовища Jupyter Notebook для проведення інтегрованих уроків з інформатики та математики у закладах загальної середньої освіти.

Для досягнення цієї мети поставлено такі завдання:

- проаналізувати науково-методичні джерела щодо інтеграції предметів та застосування цифрових технологій у навчанні;
- визначити дидактичні переваги середовища Jupyter Notebook для інтегрованих уроків;
- розробити приклади інтегрованих уроків із застосуванням Jupyter Notebook;
- оцінити ефективність запропонованих підходів у контексті активізації пізнавальної діяльності учнів і розвитку міжпредметних компетентностей.

3. Основний результат

Під час проведення інтегрованих уроків з інформатики важливим є використання інтерактивних комп'ютерних середовищ, одним із яких може бути Jupyter Notebook, яке надає викладачу та здобувачам значні переваги завдяки наочності візуалізації графіків, малюнків, а також використанню мультимедійних засобів і інтерактивного програмування. Такі середовища надають можливість автоматизувати математичні обчислення, виконати статистичний аналіз даних або зробити та проаналізувати складні математичні процеси.

Jupyter Notebook є потужним інструментом для реалізації чисельних та аналітичних розрахунків, що надає можливість користувачам активно втручатися в процес обчислень, задаючи необхідні параметри для розв'язання задач. Його інтерактивність та підтримка багатьох мов програмування, таких як Python, роблять його відмінним вибором для розв’язання математичних задач, що можуть бути чітко сформульовані за допомогою математичних термінів. Це надає можливість реалізувати гнучкість обчислень, візуалізацію результатів і дослідження складних моделей, що вигідно відрізняє його від багатьох традиційних програм.

Сучасний розвиток комп’ютерних технологій та інтеграція мультимедійних функцій надають можливість створювати потужні освітні платформи для навчання, серед яких Jupyter Notebook має великий потенціал. Зокрема, він може використовуватись для розв’язання задач з математики, а також для аналізу даних і розв'язання складних обчислень. Використання Jupyter Notebook та мови Python у шкільному навчанні надає можливість інтегрувати його у процес інтегрованих уроків з інформатики та математики, забезпечуючи учнів потужними інструментами для розв'язання задач і виконання інтерактивних вправ.

Основною метою інтеграції шкільних уроків є формування у школярів цілісного сприйняття навколишнього світу, що фактично означає розвиток їхнього світогляду. Такий підхід відкриває значні можливості для ефективного вирішення освітніх і виховних завдань:

1. Формування міжпредметних зв'язків. Інтегрований підхід забезпечує органічне поєднання різних навчальних дисциплін, допомагаючи учням бачити взаємозв'язки між ними. Наприклад, об'єднання інформатики та математики надає можливість учням усвідомити, як математичні знання застосовуються в інформаційних технологіях. Перехід від внутрішньо-предметних до міжпредметних зв'язків дає змогу учням переносити стратегії й підходи з однієї галузі знань до іншої, полегшуючи навчальний процес і сприяючи розумінню цілісності світу. Варто зазначити, що такий перехід потребує сформованої бази внутрішньо-предметних знань, адже без неї перенесення може бути поверхневим і механічним.

2. Посилення практичної орієнтації навчання. Інтеграція надає можливість створювати більше практичних завдань, що вимагають застосування знань з кількох предметів для вирішення реальних проблем, сприяючи закріпленню теоретичних знань через практику.

3. Розвиток критичного мислення. Інтегроване навчання стимулює критичне мислення, оскільки учні мають аналізувати різноманітні ідеї, концепції та підходи з кількох предметних областей.

4. Формування творчого мислення. Об'єднання матеріалу різних дисциплін сприяє розвитку творчості учнів, дозволяючи їм використовувати знання в реальних життєвих ситуаціях. Це сприяє формуванню особистісних якостей, позитивного ставлення до навколишнього середовища, дотримання етичних норм і орієнтації на загальне благо.

5. Стимулювання творчої активності. Інтеграція підтримує розвиток індивідуальної творчості, сприяючи пошуку нових підходів і рішень через об'єднання знань з різних галузей.

6. Формування багатогранного бачення проблеми. Завдяки інтеграції учні навчаються розглядати одну і ту саму проблему з різних позицій, що забезпечує глибше й об'ємніше її розуміння.

7. Підвищення мотивації учнів. Інтегровані уроки активізують пізнавальну діяльність школярів, допомагають зняти напругу та втому, роблять навчальний процес цікавішим і динамічнішим.

Одним із сучасних засобів реалізації інтегрованого підходу в навчанні, зокрема в курсі інформатики, є використання цифрових платформ, що підтримують міжпредметні зв'язки та сприяють розвитку критичного мислення. У цьому контексті особливу увагу заслуговує середовище Jupyter Notebook. Основні можливості Jupyter Notebook у шкільному курсі інформатики:

1. Інтерактивне програмування. Учні можуть створювати і виконувати програми на Python безпосередньо в браузері, редагуючи окремі блоки коду (комірки) і миттєво бачачи результати.

2. Підтримка комбінованого контенту. Окрім коду, у Jupyter Notebook можна додавати текстові пояснення, математичні формули (у форматі LaTeX), малюнки та посилання, що надає можливість створювати комплексні інтерактивні конспекти.

3. Візуалізація даних. За допомогою бібліотек на кшталт Matplotlib або Seaborn учні можуть будувати графіки, діаграми та інші візуальні представлення даних без необхідності використовувати сторонні програми.

4. Робота з математичними обчисленнями. Учні можуть виконувати обчислення будь-якої складності: від простих арифметичних задач до алгебраїчних перетворень, аналізу функцій та побудови графіків.

5. Створення інтегрованих уроків і проєктів. Завдяки можливості поєднувати код, текст і зображення, Jupyter Notebook зручно використовувати для проведення інтегрованих уроків інформатики з математикою, фізикою, біологією тощо.

6. Підтримка різних мов програмування. Хоча найчастіше використовується Python, Jupyter також може працювати з іншими мовами через відповідні ядра (наприклад, R, Julia, C++ тощо).

7. Моделювання та симуляції. Учні можуть створювати моделі процесів, проводити симуляції експериментів, що особливо корисно для прикладних задач з математики чи природничих наук.

8. Зручне середовище для самостійного навчання та практики. Завдяки простому інтерфейсу та інтерактивності учні можуть використовувати Jupyter Notebook для самостійного опрацювання матеріалу, виконання домашніх завдань і створення власних проєктів.

9. Автоматизація розрахунків та аналізу даних. Можливість швидко обробляти великі об'єми даних та виконувати складні обчислення допомагає учням розвивати навички алгоритмічного мислення і роботи з даними.

10. Відкрите програмне забезпечення. Jupyter Notebook є безкоштовним і має велику підтримку спільноти, що надає можливість використовувати готові рішення та розширення для навчальних цілей.

Застосування цих можливостей на практиці відкриває для вчителя перспективи для створення змістовних інтегрованих занять. Розглянемо приклади таких уроків з використанням мови Python у середовищі Jupyter Notebook.

10-й клас. Розділ «Аналіз і візуалізація даних» із застосуванням Jupyter Notebook для розв'язування економічних задач.

Тема уроку: Аналіз і візуалізація даних. Економічні задачі.

Мета уроку: Формування вмінь розв'язувати задачі оптимізації за допомогою Python у Jupyter Notebook.

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Завдання 1. Знайти найбільше значення прибутку підприємства, який виражається цільовою функцією *f(x)*, якщо параметри аргумента лежать в межах 1..5. Зробити схематично малюнок:

$$f\left(x\right)=(0.1x^4+6x^3\text{-}35x^2+15x\text{-}2)*\sin(\frac{x}{2}+\frac{3}{2})+20\to \max, \qquad x=0.5..5$$

Для розв’язання поставленого завдання можна застосувати методи диференціального числення з пошуком критичних точок, проте на даному уроці ми будемо використовувати інструментарій Python у середовищі Jupyter Notebook. На першому етапі оголошується цільова функція, після чого для знаходження її максимального значення в заданому інтервалі використовується вбудована функція minimize_scalar з бібліотеки scipy.optimize, але застосувати її до протилежної функції (тобто з мінусом) – бо ця функція знаходить тільки мінімум, а максимум ми знайдемо як мінімум від -f(x).

Звертається увага на синтаксис запису обмежень у вигляді числового проміжку. У результаті виконання коду автоматично обчислюється точка мінімуму та відповідне значення функції, яке також ілюструється графічно.

Перед початком обчислень максимального значення, необхідно імпортувати відповідні бібліотеки (Рис. 1.)

У разі, якщо під час виконання коду виникає помилка, пов’язана з відсутністю необхідних бібліотек (наприклад, повідомлення ModuleNotFoundError: No module named 'matplotlib' або No module named 'scipy'), необхідно попередньо встановити відповідні пакети. Це легко зробити безпосередньо у робочому середовищі Jupyter Notebook, ввівши в окремій комірці відповідні команди: !pip install matplotlib, !pip install scipy. Після успішного встановлення бібліотек можна повторно виконати код, що використовує функціонал відповідних модулів.

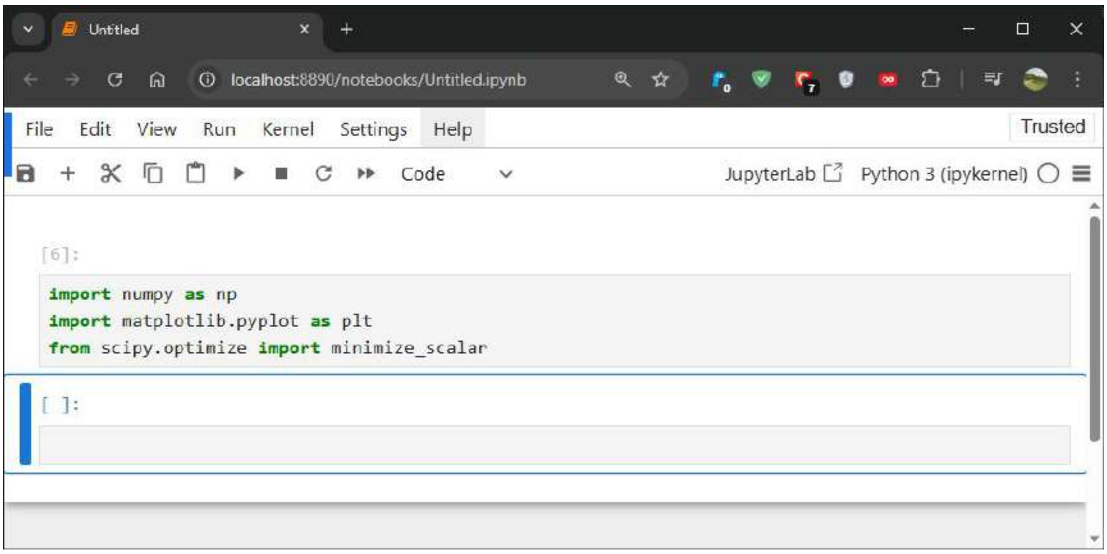


Рис. 1. Імпортуємо необхідні бібліотеки

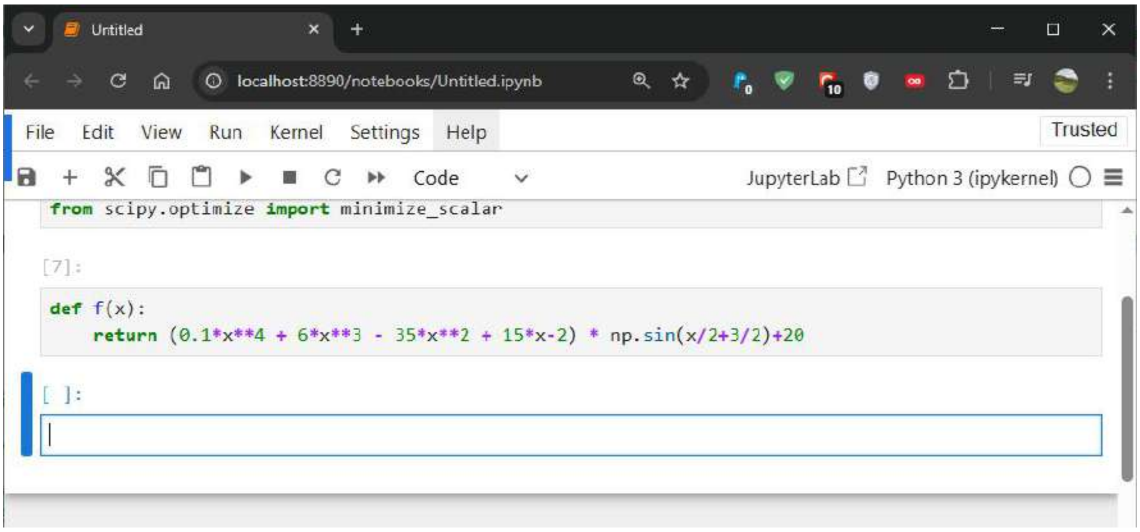


Рис. 2. Задання цільової функції у середовищі Jupyter Notebook

Після задання цільової функції у середовищі Jupyter Notebook (Рис. 2), доцільно запропонувати учням, з метою підвищення наочності результатів, побудувати графік досліджуваної функції. Для цього використовуються бібліотеки numpy та matplotlib, які забезпечують формування числового інтервалу та візуалізацію відповідних значень. Побудову графіка здійснюють за допомогою відповідного шаблону коду, в результаті виконання якого формується графічне зображення початкової функції на заданому проміжку (Рис. 3).

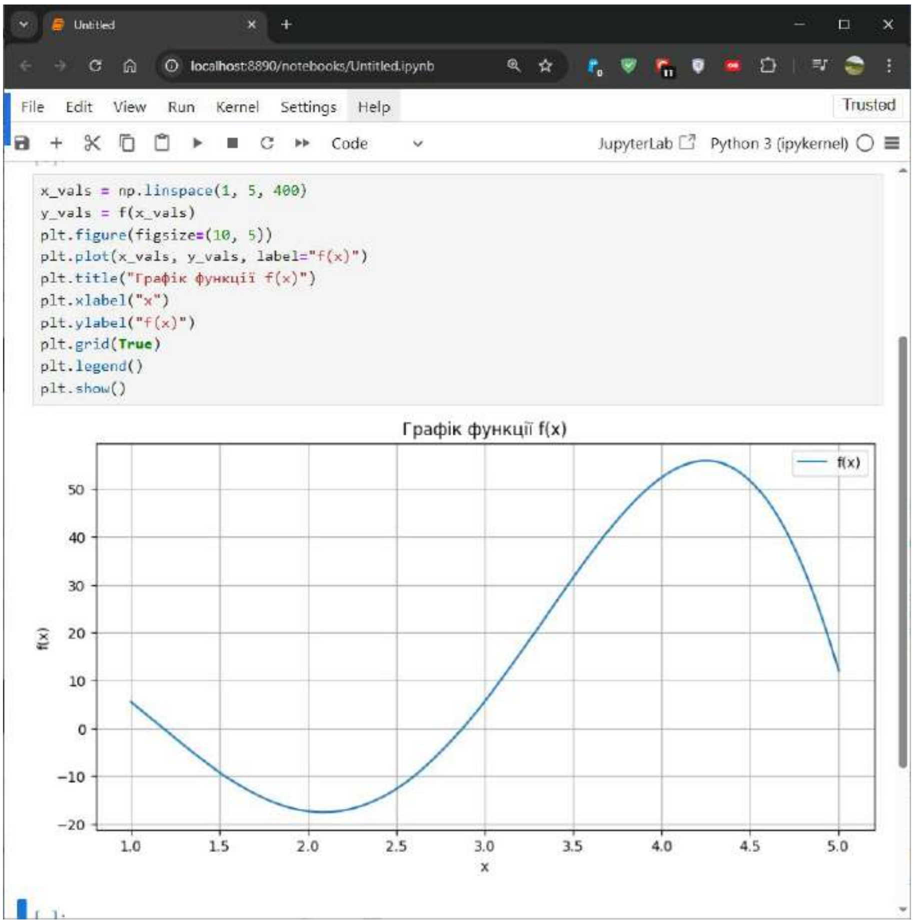


Рис 3. Будуємо графік функції

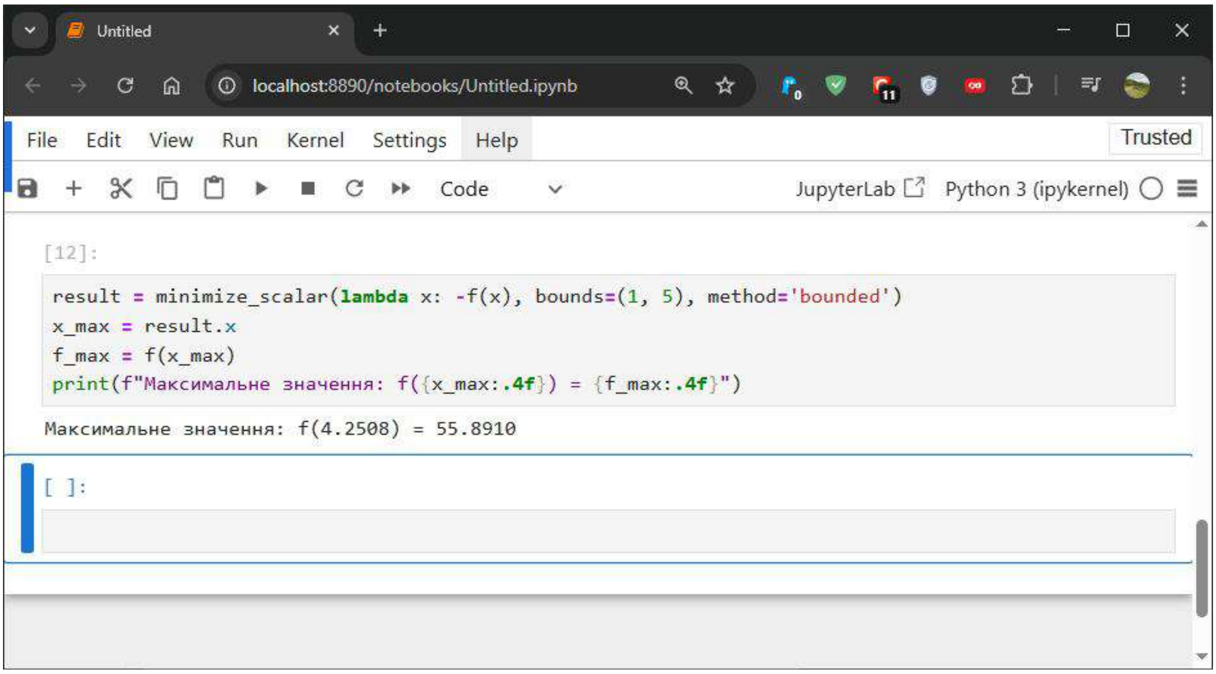


Рис 4. Знаходимо максимум функції на відрізку [0.5; 5]

Як бачимо із обчислень та графіку, функція досягла свого максимального значення при x ≈ 4.25, яке було обчислено автоматично.

Для відображення отриманої точки на графіку скористаємось наступним кодом (Рис. 5.):

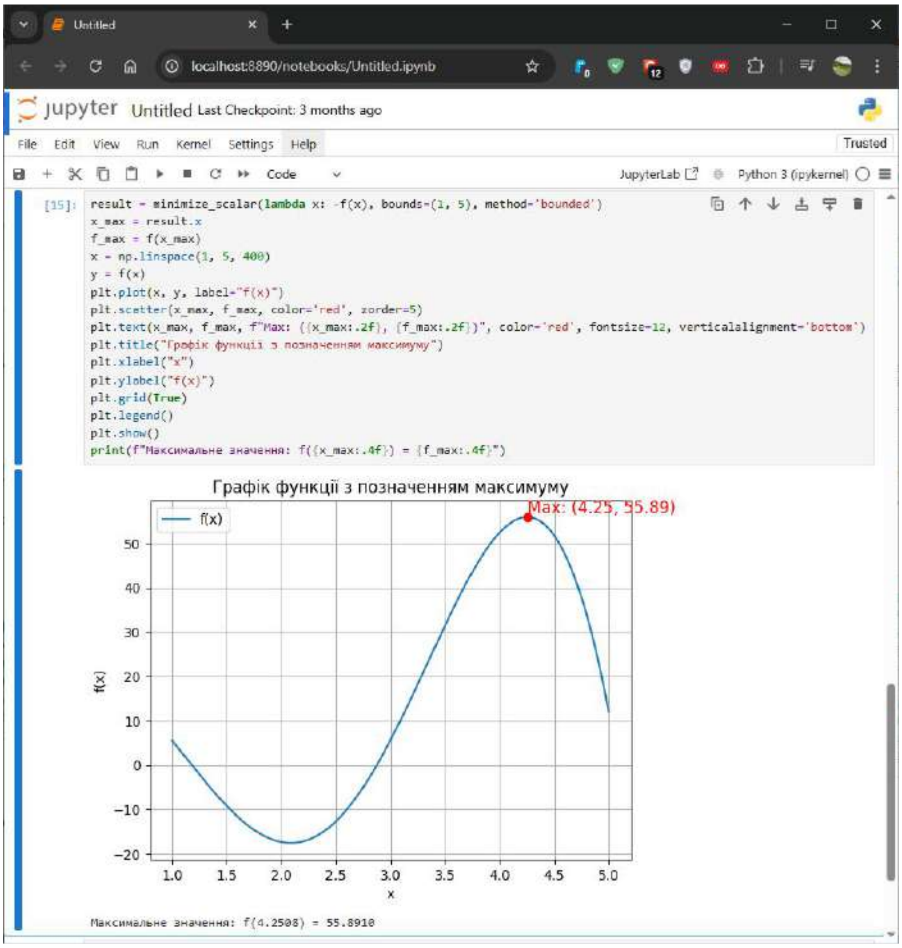


Рис 5. Максимум функції на відрізку [0.5; 5]

Оскільки учні вже знайомі із темою похідна, то на даному уроці можна запропонувати учням самостійно перевірити отриманий результат знаходження найбільшого значення функції на відрізку та перевірити отриманий результат за допомогою диференціального числення, застосувавши правила знаходження похідної та аналізу її знаків. Такий підхід сприяє глибшому розумінню взаємозв'язку між математичним аналізом і програмними засобами.

Висновки. Застосування інтерактивного середовища Jupyter Notebook у контексті інтегрованих уроків з інформатики та математики відкриває нові можливості для глибшого розуміння математичних концепцій через активне застосування обчислювальних інструментів. Використання функцій оптимізації, таких як minimize_scalar з бібліотеки scipy, надає можливість ефективно знаходити екстремуми функцій, що є важливим елементом вивчення теоретичних аспектів аналізу функцій.

Завдяки інтеграції програмних інструментів для побудови графіків та виконання числових обчислень, учні не тільки набувають практичних навичок програмування, але й розвивають критичне мислення, застосовуючи знання з математичного аналізу до реальних задач. Візуалізація результатів на графіках дає можливість наочно спостерігати за змінами функцій, що значно покращує розуміння теоретичних принципів.

Застосування Python та Jupyter Notebook на уроках інтегрованої освіти створює ефективне середовище для навчання, яке відповідає сучасним вимогам стем-освіти. Водночас, це надає можливість формувати у школярів уміння розв'язувати математичні задачі з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, що є важливою складовою сучасної освіти.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Kadar R., et al. A Study of Difficulties in Teaching and Learning Programming: A Systematic Literature Review. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*. 2021. Vol. 10, No. 3. P. 591–605. DOI: http://dx.doi.org/10.6007/IJARPED/v10-i3/11100
2. Кобильник Т. П., Сікора О. В., Жидик В. Б., Шаран, О. В. Python як засіб навчання основ алгоритмізації у закладах загальної середньої освіти. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2022. Т. 89, № 3. С. 16–32. DOI: https://doi.org/10.33407/itlt.v89i3.4896
3. Семеніхіна О. В., Руденко Ю. О. Проблеми навчання програмувати учнів старших класів та шляхи їх подолання. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2018. Т. 66, № 4. С. 54–64. DOI: https://doi.org/10.33407/itlt.v66i4.2149
4. Кобильник Т., Когут У., Жидик В. Методичні аспекти вивчення основ алгоритмізації і програмування мовою python у шкільному курсі інформатики у старших класах. *Фізико-математична освіта*. 2021. Т. 31, № 5. С. 36–44. DOI: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-006
5. Конофольська В. В. Інтегровані уроки з інформатичною складовою як невід'ємна частина сучасної освіти. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова*. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Київ, 2020. Випуск 22 (29). С. 166–172.
6. Дегтярьова Н. та ін. Реалізація диференційованого підходу при навчанні програмуванню мовою python здобувачів загальної середньої освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ «Друк плюс», 2024. Вип. 72. С. 53–60. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-72-53-61
7. Чорна А. В., Сердюк І. М., Онищенко Л. В. Інтегрований урок як сучасна форма навчання інформатики. *Progressive Opportunities and Solutions of Advanced Society: Proceedings of the 1st International Scientific and Practical Internet Conference* (November 16-17, 2023, Dnipro, Ukraine). 2023. С. 162.

UDC 371.3:[51+004]:004.5

Application of the Interactive Environment Jupyter Notebook in Conducting Integrated Lessons in Informatics and Mathematics

Yaroslav Krupskyi, Halyna Kovtoniuk

Abstract. The article examines the possibilities of applying the interactive environment Jupyter Notebook in conducting integrated lessons in informatics and mathematics. The advantages of the environment are outlined, examples of tasks are considered, and its connection with school education standards is discussed.

Keywords: Jupyter Notebook, integrated lessons, Python, informatics, mathematics, STEM-education, programming.

References

1. Kadar, R., et al. (2021). *A Study of Difficulties in Teaching and Learning Programming: A Systematic Literature Review*, International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development, **10** (3), 591–605. http://dx.doi.org/10.6007/IJARPED/v10-i3/11100
2. Kobylnyk, T. P., et al. (2022). *Python as a Tool for Teaching the Basics of Algorithmization in General Secondary Education Institutions*, Information Technologies and Learning Tools, **89** (3), 16–32. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.33407/itlt.v89i3.4896
3. Semenykhina, O. V., Rudenko, Y. O. (2018). *Problems of Teaching High School Students to Program and Ways to Overcome Them*, Information Technologies and Learning Tools, **66** (4), 54–64. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.33407/itlt.v66i4.2149
4. Kobylnyk, T., Kohut, U., Zhydyk, V. (2021). *Methodical Aspects of Studying the Basics of Algorithmization and Programming in Python in the High School Computer Science Course*, Physical and Mathematical Education, **31** (5), 36–44. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-006
5. Konofolska, V. V. (2020). *Integrated Lessons with an Informatics Component as an Integral Part of Modern Education*, Scientific Journal of NPU Named After M. P. Drahomanov, Series 2: Computer-Oriented Learning Systems, **22** (29), 166–172. [in Ukrainian]
6. Dehtiarova, N., et al. (2024). *Implementation of a Differentiated Approach in Teaching Python Programming to General Secondary Education Students*, Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training: Methodology, Theory, Experience, Problems, **72**, 53–60. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-72-53-61
7. Chorna, A. V., Serdiuk, I. M., & Onyshchenko, L. V. (2023). Integrated Lesson as a Modern Form of Teaching Informatics. Progressive Opportunities and Solutions of Advanced Society: Proceedings of the 1st International Scientific and Practical Internet Conference (November 16-17, 2023, Dnipro, Ukraine), 162. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Ярослав Крупський, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Yaroslav Krupskyi, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Галина Ковтонюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Halyna Kovtoniuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 03.05.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 113–123.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 113–123.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147.091.33-022.215:53

Шляхи реалізації дуального навчання під час підготовки майбутнього вчителя фізики

Анатолій Сільвейстр[1], Микола Моклюк[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна
silveystram@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3633-3910

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна
mokljuk@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8717-5940

Анотація. У статті проаналізовано теоретичні засади та практичні шляхи реалізації дуального навчання в процесі підготовки майбутнього вчителя фізики у закладах вищої педагогічної освіти. Автори акцентують увагу на актуальності впровадження дуальної форми навчання в умовах реформування національної системи освіти, зокрема в контексті реалізації Концепції Нової української школи. Зазначено, що існуюча традиційна система підготовки педагогів не забезпечує в повній мірі формування практичних навичок, адаптованих до сучасних умов навчання в школі. Саме дуальне навчання, що поєднує теоретичну підготовку у ЗВО з практичною діяльністю у школах-партнерах, дає можливість суттєво підвищити якість професійної освіти вчителя фізики.

У статті проведено аналіз нормативно-правової бази України щодо впровадження дуального навчання, зокрема Законів України «Про освіту», «Про вищу освіту», Постанови КМУ № 1216 (2019), наказу МОН № 1296 (2020), Концепції розвитку педагогічної освіти (2021). Узагальнено зарубіжний досвід реалізації дуальної освіти в країнах Європейського Союзу, США, Великої Британії, скандинавських країнах, де акцент зроблено на гнучких моделях взаємодії між навчальними закладами і роботодавцями.

Автори окреслюють основні шляхи реалізації дуального навчання в підготовці вчителя фізики: тривала педагогічна практика на базі шкіл, офіційне працевлаштування здобувачів на посаді асистента вчителя, впровадження змішаного навчання, створення спільних навчальних модулів за участю викладачів університету та шкільних учителів, активне використання цифрових технологій і STEM-ресурсів. Розглянуто приклади реалізації таких підходів в українських педагогічних університетах.

У підсумку наголошено, що дуальне навчання є ефективною інноваційною формою організації освітнього процесу, здатною забезпечити якісну професійну підготовку майбутніх учителів фізики, адаптацію до умов сучасної школи та формування високого рівня професійної компетентності. Запропоновано напрями подальших досліджень у цій сфері.

Ключові слова: дуальне навчання, педагогічна освіта, майбутній учитель фізики, практика, професійна підготовка.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-13

1. Вступ

У сучасних умовах реформування освіти в Україні та впровадження концепції Нової української школи особливої ваги набуває підготовка вчителів, здатних ефективно поєднувати теоретичні знання з практичними навичками. Дуальне навчання, яке передбачає інтеграцію академічного навчання з практичною діяльністю, є перспективною моделлю підготовки майбутніх учителів фізики. Цей підхід сприяє формуванню професійної компетентності, адаптації до реальних умов роботи та розвитку інноваційного мислення.

Аналіз літературних джерел з теми дослідження засвідчує високий теоретичний потенціал дуального навчання в педагогічній освіті; чітко окреслені шляхи реалізації, включно з правовими механізмами, методичним забезпеченням та інституційними прикладами; позитивний практичний досвід як в Україні, так і за кордоном, що може слугувати основою для подальшого розвитку системи підготовки вчителів із урахуванням потреб реального освітнього простору.

Зокрема, у працях Золотухіної С.Т. та Лозової В.І. розкрито філософські та психолого-педагогічні підходи до формування професійної компетентності майбутнього вчителя в умовах змін. Авторки підкреслюють, що нова парадигма освіти потребує поєднання академічної освіти з реальним професійним досвідом, що прямо співвідноситься з моделлю дуального навчання [7]

У статті Кулик Т. і Ткаченка М. проаналізовано практичні підходи до організації дуального навчання у ЗВО. Автори пропонують: створення навчально-виробничих кластерів; укладання тристоронніх договорів між ЗВО, здобувачем і закладом-партнером (школою); введення в освітні програми значного обсягу практичної підготовки на базі шкіл. Ці підходи добре адаптуються до підготовки вчителя фізики або іншого предметника [11]

У дослідженнях Гриньової М.В. та Василевської Г.І. описано конкретний досвід впровадження елементів дуального навчання в педагогічних університетах, зокрема через: впровадження модульних практик; стажування в школах на етапі бакалаврату; супровід практики тьюторами та менторами зі шкіл. Авторки підкреслюють, що дуальна модель особливо ефективна для предметів природничо-математичного циклу, де потрібні дослідницькі та проєктні навички [3]

У роботі Шияна Р. проаналізовано практики впровадження дуальної освіти в Європі. Автор наголошує на: необхідності гнучких освітніх програм; інтеграції цифрових платформ для відстеження прогресу здобувача; важливості супроводу з боку шкільного наставника [21]

Маринченко Є.О. у своїй статті акцентує увагу на перевагах дуального навчання в підготовці педагогів професійного навчання, підкреслюючи його роль у поєднанні освіти з виробництвом та підвищенні якості освіти [12].

Кулик Л.О. та Ткаченко А.В. розглядають підготовку майбутніх учителів фізики до організації групової навчальної діяльності учнів, що є важливим аспектом практичної складової дуального навчання [10].

Хоменко Л. аналізує напрямки цифровізації професійної підготовки майбутніх учителів математики та фізики, підкреслюючи необхідність впровадження цифрових технологій у навчальний процес [20].

Гриньов Р.С. пропонує модель дистанційного навчання майбутніх учителів фізики, яка включає теоретичний, технологічний та рефлексійний блоки, що відповідає сучасним вимогам до підготовки педагогів [2].

Миколайко В. зосереджується на підготовці майбутніх учителів фізики до формування дослідницької компетентності учнів із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій, що є важливою складовою сучасної освіти [13].

В Україні створено законодавчі й нормативні умови для розвитку дуальної форми освіти, що можуть бути ефективно адаптовані до педагогічної освіти, зокрема - до підготовки вчителів фізики.

Так, у законі України «Про освіту» [6] вперше надає офіційне визначення дуальної форми здобуття освіти - як такої, що поєднує навчання в закладі освіти з навчанням на робочому місці (ст. 9). Дає змогу реалізовувати дуальне навчання в усіх рівнях освіти, у тому числі й педагогічній.

У статті 6 Законе України «Про вищу освіту»[5] зазначено, що вищі навчальні заклади мають право формувати індивідуальні освітні траєкторії з використанням практичного компоненту. У статті вказується, що є можливість укладати договори з роботодавцями щодо спільної підготовки фахівців що є правовою основою для дуального навчання.

Постанова Кабінету Міністрів України № 1216 від 21.11.2019 року [16] затверджує Положення про дуальну форму здобуття освіти, яке є ключовим нормативним документом. У ньому прописано: механізми організації дуального навчання; обов’язки закладів освіти та роботодавців; можливість створення індивідуального плану навчання; обсяги практичної складової в навчальному процесі.

Методичні рекомендації щодо запровадження дуальної форми здобуття освіти у закладах фахової передвищої та вищої освіти затверджені Наказом МОН № 1296 від 06.11.2020 року [15]. У них зазначено детальні роз’яснення щодо: умов укладання тристоронніх договорів (ЗВО – здобувач – роботодавець); розподілу навчального навантаження; критеріїв оцінювання практичної діяльності здобувача.

Затверджена наказом МОН № 1183 від 15.10.2021 року концепція розвитку педагогічної освіти [8] передбачає посилення практичної складової підготовки педагогів та взаємодію із закладами загальної середньої освіти як частину дуального підходу. Одним із пріоритетів є формування практико-орієнтованої моделі підготовки вчителів, зокрема - вчителів фізики.

Отже, дуальне навчання є актуальним та ефективним підходом у підготовці майбутніх учителів фізики, оскільки забезпечує поєднання теоретичних знань з практичними навичками, сприяє розвитку професійної компетентності та адаптації до сучасних вимог освіти. Впровадження цього підходу в освітній процес потребує подальших досліджень та розробки методичних рекомендацій для його ефективної реалізації.

2. Постановка проблеми

Сучасні виклики у сфері освіти потребують кардинального переосмислення підходів до підготовки педагогічних кадрів, зокрема вчителів загальноосвітніх шкіл. Проблема недостатньої практичної готовності випускників педагогічних закладів вищої освіти до професійної діяльності залишається однією з найгостріших у системі педагогічної освіти. Випускники часто не мають достатнього досвіду взаємодії з учнями, навичок ефективного використання сучасних освітніх технологій, а також не повністю розуміють реальні умови та вимоги шкільного середовища.

Традиційна система підготовки вчителя орієнтована переважно на академічне засвоєння знань, що призводить до розриву між теоретичним навчанням у ЗВО та реальними умовами шкільної практики. У цьому контексті дуальна форма навчання – як інтеграція освітнього процесу у вищому навчальному закладі з практичною підготовкою у партнерських закладах освіти – розглядається як один із найбільш ефективних інструментів вирішення зазначеної проблеми.

Попри наявність нормативно-правових умов для впровадження дуальної освіти в Україні, її реалізація в галузі педагогічної освіти, зокрема в підготовці майбутніх учителів, має фрагментарний характер і потребує глибокого осмислення шляхів її впровадження, ефективних моделей, інституційної взаємодії та педагогічного супроводу. Проблемними залишаються питання: як забезпечити якісну практичну підготовку в умовах дуального навчання, які організаційно-методичні підходи найбільш ефективні, як налагодити стійке партнерство між ЗВО та школами.

Таким чином, актуальною науково-педагогічною проблемою є обґрунтування, розробка та аналіз ефективних шляхів реалізації дуального навчання у процесі підготовки майбутнього вчителя, що сприятиме забезпеченню більш тісного зв'язку між освітнім процесом і професійною діяльністю, підвищенню якості педагогічної освіти в цілому.

Мета статті – проаналізувати теоретико-методологічні засади дуального навчання у процесі професійної підготовки майбутнього вчителя фізики, визначити його роль у формуванні професійних компетентностей, а також окреслити напрями та умови ефективного впровадження дуальної форми навчання в освітній процес педагогічних закладів вищої освіти.

3. Основні результати

Розрізняють такі поняття як «дуальна освіта» та «дуальне навчання» – це споріднені, але різні поняття, які мають свої специфічні характеристики.

Дуальна освіта – це ширший системний підхід до організації освітнього процесу. Вона передбачає інтеграцію теоретичного навчання у закладі освіти з практичною підготовкою на базі підприємства або організації. Зазвичай реалізується на рівні професійної, технічної або вищої освіти. Основною метою є: підготовка фахівців, які відразу готові до роботи на конкретному робочому місці. Як прикладом може слугувати підготовка інженерів, техніків, агрономів тощо [6].

Дуальне навчання – це більш вузьке поняття, що описує метод або модель освітнього процесу в межах окремого освітнього закладу чи програми. Може застосовуватися для організації навчання здобувачів певної спеціальності, зокрема майбутніх учителів. Основний акцент робиться на чергуванні або поєднанні теорії та практики, часто в партнерстві з конкретними установами (наприклад, школами для педагогів). Як приклад, можна розглянути підготовку майбутніх учителів, де теоретичне навчання в університеті доповнюється регулярною педагогічною практикою в школі [15].

Тобто *дуальна освіта* - це загальна освітня система, яка включає практичну підготовку на базі партнерських організацій; *дуальне навчання* - це метод навчання, який інтегрує практичні елементи у межах конкретної програми чи курсу.

Таким чином, дуальне навчання може бути частиною ширшої системи дуальної освіти.

Реалізація системи дуальної освіти та дуального навчання за кордоном має свої особливості залежно від країни та сфери підготовки. Найбільш розвинені системи діють у Німеччині, Швейцарії, Австрії та деяких інших країнах Європи. Ось як це працює в Німеччині, де система дуальної освіти є частиною професійної освіти (Vocational Education and Training - VET). Здобувачі паралельно навчаються в освітніх установах і працюють на підприємствах. Програми тривають від 2 до 3,5 років, де 50-70% часу відведено на практику. Фінансування здійснюється роботодавцями, які виплачують стипендії здобувачам [17].

Серед особливостей дуального навчання можна виділити те, що воно в університетах інтегрується у підготовку інженерів, менеджерів і навіть педагогів. Здобувачі проводять частину часу на стажуванні в партнерських організаціях. За приклад можна взяти компанію Siemens, що забезпечує навчання здобувачів на виробництві з перспективою працевлаштування.

Серед Швейцарського досвіду використання дуальної освіти звертається увага на те, що близько 70% молоді обирають професійні програми, які включають навчання у школі та роботу на підприємствах. Підприємства надають молодим спеціалістам робочі місця, наставництво та можливість отримати практичний досвід.

Щодо особливостей дуального навчання, то у Швейцарії університети прикладних наук пропонують програми, що чергують семестри теорії й практики. Здобувачі беруть участь у реальних проєктах під керівництвом компаній.

Австрійська система дуальної освіти схожа на німецьку модель. Здобувачі поєднують навчання у професійних школах із практикою в компаніях. Особливості дуального навчання реалізуються в університетських програмах через партнерство з компаніями. За таким підходом здобувачі отримують не лише академічні знання, а й робочий досвід.

У США дуальна освіта реалізується через аналоги, що зустрічаються у вигляді програм «Cooperative Education» (Co-op). Здобувачі працюють за спеціальністю під час навчання у коледжах чи університетах. Під час дуального навчання на педагогічних спеціальностях широко використовуються моделі з тривалими стажуваннями в школах (teaching practicums). Яскравим прикладом може бути Массачусетський технологічний інститут, що пропонує здобувачам інженерам програми Co-op із роботою у провідних компаніях.

Скандинавські країни такі як Данія, Швеція та Фінляндія в дуальній освіті широко застосовують професійні програми, що поєднують теорію та практику. Сильний акцент ставлять на навчання у реальному середовищі під час практичної роботи. Для дуального навчання в університетах застосовуються індивідуальні програми практик із гнучким розкладом, що дає можливість адаптувати навчання до потреб роботодавців.

Розвиток дуальної освіти у Великобританії передбачає використання відомих програм «Apprenticeships» за якими навчання на робочих місцях дає можливість отримати сертифікат чи диплом. Передбачено програми для старшокласників, здобувачів коледжів і університетів. У процесі дуального навчання педагогічні факультети організовують тривалі стажування в школах. Робиться акцент на розвиток практичних навичок через реальні викладацькі завдання.

Серед ключових особливостей дуальної системи за кордоном можна виділити [17]:

1. Тісна співпраця з роботодавцями.

2. Фінансова підтримка здобувачів у вигляді стипендій чи зарплат.

3. Законодавча база, що регулює партнерство між освітніми закладами та компаніями.

4. Гнучкість моделей, адаптованих до потреб ринку праці.

Досвід цих країн демонструє ефективність дуальної системи в підготовці конкурентоспроможних фахівців.

Реалізація системи дуальної освіти та навчання в Україні набирає обертів у контексті реформування системи освіти, спрямованої на підвищення її практичної спрямованості та інтеграцію в сучасний ринок праці. Хоча дуальна система є новою для України, вже є приклади її впровадження на рівні професійної та вищої освіти, зокрема [9]:

1. Особливості дуальної освіти в Україні:

- здобувачі одночасно навчаються в освітніх закладах та проходять практику на підприємствах;

- до 70% навчального часу може бути відведено на практичну підготовку;

- освітній процес передбачає тристоронню угоду між здобувачем, навчальним закладом та роботодавцем;

- роботодавці залучаються до розробки освітніх програм, щоб врахувати актуальні потреби ринку праці.

2. Реалізація на рівні професійної освіти:

- центри професійно-технічної освіти активно впроваджують дуальну форму навчання для підготовки фахівців у таких сферах, як машинобудування, аграрний сектор, інформаційні технології тощо;

- партнери великих промислових підприємств, наприклад, «Метінвест», «АрселорМіттал Кривий Ріг», «Укрзалізниця»;

- здобувачі працюють на підприємствах, отримуючи не лише практичний досвід, а й зарплату.

3. Реалізація на рівні вищої освіти. Дуальна форма навчання інтегрується у програми вищих навчальних закладів, таких як:

- Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського (підготовка інженерів із залученням здобувачів до роботи в компаніях-партнерах);

- Український католицький університет (у сфері IT діє модель дуальної освіти, де здобувачі працюють у компаніях під час навчання);

- Національний університет біоресурсів і природокористування України (програми для аграрних спеціальностей у співпраці з фермерськими господарствами).

4. Реалізація у підготовці педагогів. У деяких педагогічних університетах впроваджується модель, де здобувачі частково працюють у школах (асистентами вчителів) під час навчання. Це дає можливість майбутнім учителям фізики, математики чи інших предметів адаптуватися до реального освітнього середовища.

5. Виклики та перспективи. Серед викликів можна виділити наступні:

- низька зацікавленість роботодавців через брак стимулів;

- недостатня інформованість про можливості дуальної освіти;

- недостатня матеріально-технічна база у закладах освіти.

Щодо перспектив, то можна зазначити:

- розширення програм дуальної освіти через залучення міжнародного досвіду;

- законодавче стимулювання роботодавців, наприклад, через податкові пільги;

- активізація співпраці між освітніми закладами та приватним сектором.

Серед успішних прикладів у реалізації системи дуальної освіти можна назвати:

- Дніпровський національний університет залізничного транспорту (співпраця зі «Сіменс» у підготовці інженерів);

- програма «IT Step Academy» (інтеграція навчання та стажування в IT-компаніях).

Реалізація системи дуальної освіти та навчання в Україні продовжує розвиватися, і з кожним роком вона стає важливішою складовою професійної та вищої освіти.

Дуальне навчання під час підготовки майбутнього вчителя фізики полягає в поєднанні теоретичної освіти в закладі вищої освіти з практичною діяльністю в реальних умовах закладу. Цей підхід дає можливість [9]:

1) *поглибити практичні навички* через безпосереднє застосування знань в освітньому процесі;

2) *формувати професійні компетентності*, необхідні для ефективного викладання фізики;

3) *забезпечити адаптацію до роботи в школі*, враховуючи сучасні педагогічні виклики та потреби учнів;

4) *створити можливості для співпраці з роботодавцями*, що сприяє узгодженню теоретичних знань із реальними потребами освіти.

Реалізація дуального навчання у підготовці майбутніх учителів фізики передбачає інтеграцію теоретичного навчання з практичним досвідом, що сприяє формуванню професійних компетентностей. Виділимо основні шляхи впровадження цього підходу включають:

1. *Співпраця з закладами загальної середньої освіти.* Організація практик та стажувань здобувачів у школах дає можливість майбутнім учителям фізики застосовувати теоретичні знання на практиці, розвивати педагогічні навички та адаптуватися до реального освітнього середовища. Наприклад, у межах партнерства між педагогічним університетом та закладами середньої освіти, здобувачі 4 курсів проходять довготривалу педагогічну практику, що включає участь у реальних шкільних заняттях, організацію позакласної діяльності, проведення фізичних експериментів та підготовку учнів до олімпіад. Це дає можливість не лише закріпити знання, а й розвинути навички комунікації з учнями різного віку [7].

2. *Інтеграція сучасних технологій в освітній процес.* Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), таких як цифрові вимірювальні комплекси, віртуальні лабораторії та електронні освітні ресурси, сприяє підвищенню ефективності навчання та розвитку дослідницьких компетентностей здобувачів [4], [19]. Наприклад, у Київському університеті імені Бориса Грінченка впроваджено модель, коли здобувачі проводять лабораторні роботи не в аудиторіях ЗВО, а у спеціалізованих фізичних кабінетах шкіл-партнерів. Під час занять вони користуються обладнанням PASCO та Arduino, а також навчаються, як адаптувати складні експерименти до рівня учнівської аудиторії [12].

3. *Розробка та впровадження гібридних моделей навчання.* Поєднання традиційного та дистанційного навчання дає можливість забезпечити гнучкість освітнього процесу, адаптуватися до різних умов та потреб здобувачів, а також впроваджувати інноваційні педагогічні підходи [14, с. 54-59], [1].

4. *Підвищення кваліфікації викладачів.* Підготовка викладачів до роботи в умовах дуального навчання передбачає освоєння нових методик, технологій та підходів до організації освітнього процесу, що забезпечує якісну підготовку майбутніх учителів фізики.

5. *Розвиток партнерських відносин між закладами освіти та роботодавцями.* Співпраця з роботодавцями у сфері освіти сприяє узгодженню освітніх програм з потребами ринку праці, забезпечує актуальність знань та навичок, які отримують здобувачі, та підвищує їх конкурентоспроможність.

6. *Поєднання навчання у ЗВО з роботою за фахом.* Здобувач офіційно працевлаштовується (на неповну ставку) як асистент або викладач фізики в школі під час навчання. Наприклад, здобувачі старших курсів, які мають успішну академічну успішність, можуть одночасно працювати асистентами вчителів у партнерських школах Чернігівщини. Така модель дає можливість їм отримувати не лише теоретичні знання, але й оплачувану практику, підвищуючи мотивацію до фахового зростання [10].

7. *Проведення спільних навчальних модулів із залученням шкільних педагогів.* У межах деяких курсів до викладання залучаються практикуючі вчителі фізики, які виступають співвикладачами або менторами. Наприклад, у рамках курсу «Методика навчання фізики» проводяться практичні заняття за участі вчителів з базових шкіл міста. Вони демонструють авторські методики викладання, роботу з учнями із різними освітніми потребами та запрошують здобувачів проводити відкриті уроки під їхнім супроводом.

8. *Інтеграція дуальної моделі через гібридне навчання і цифрові ресурси.* Частина навчального процесу відбувається онлайн (теорія), а практична складова реалізується в

школі або лабораторії. Наприклад, у межах проєкту TEMPUS D-PBL (Dual Problem-Based Learning) здобувачі вивчають модуль «Експериментальні методи у фізиці» дистанційно з використанням Moodle, а практичну частину проходять у STEM-лабораторіях міських шкіл. Здобувачі готують онлайн-звіти, а результати експериментів обговорюють разом із викладачами ЗВО та вчителями шкіл під час семінарів [2].

9. *Навчальні фізико-методичні майстерні та воркшопи з елементами дуальності.* Формування творчих груп здобувачів і вчителів для розробки інноваційних уроків, дослідницьких завдань або STEM-проєктів. Наприклад, на базі Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини реалізується міжінституційний проєкт «Фізика 360°», у межах якого здобувачі разом з учителями готують проєкти з дослідницькою складовою: наприклад, створення мобільного додатку для демонстрації механіки тіл або моделі цифрової лабораторії для уроків у сільських школах [13].

Таким чином, шляхи реалізації дуального навчання у підготовці вчителя фізики охоплюють:

- раннє занурення у професійну діяльність;
- гнучке поєднання теорії та практики;
- технологічне оновлення підготовки;
- активну взаємодію з реальними роботодавцями - школами.

Ці підходи не лише підвищують якість освіти, а й формують готовність майбутніх педагогів до викликів сучасної шкільної фізики.

Висновки. Проведене дослідження дає підстави стверджувати, що дуальне навчання є ефективним та актуальним механізмом удосконалення підготовки майбутніх учителів фізики. Його впровадження сприяє формуванню професійної компетентності здобувачів, посиленню практичної спрямованості освітнього процесу, наближенню змісту навчання до реальних потреб загальної середньої освіти.

У межах дуального навчання забезпечується:

- поєднання академічної підготовки з практичною діяльністю в школах-партнерах;
- рання професійна соціалізація майбутнього вчителя фізики;
- розвиток дослідницьких, методичних, технологічних і комунікативних компетентностей;
- адаптація до умов Нової української школи.

Однак впровадження дуальної моделі супроводжується низкою викликів: недостатня інституційна готовність, обмежене фінансування, слабка зацікавленість роботодавців, а також потреба в адаптації освітніх програм до реалій шкільної практики.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на:

1. Розробку моделей дуального навчання з урахуванням специфіки підготовки вчителів фізики, включно з графіками чергування теоретичних і практичних модулів.
2. Аналіз ефективності дуального навчання через емпіричне вивчення досвіду здобувачів, викладачів і шкільних наставників (менторів).
3. Удосконалення механізмів партнерства між ЗВО та школами, зокрема через створення кластерів педагогічної освіти.
4. Інтеграцію цифрових інструментів і STEM-платформ у практичну підготовку майбутніх учителів фізики в умовах дуального навчання.
5. Розробку методичних рекомендацій для впровадження дуального навчання в підготовку педагогів природничо-математичного профілю.
6. Формування правових і економічних стимулів для участі закладів середньої освіти в дуальних програмах на постійній основі.

Таким чином, дуальне навчання є перспективним напрямом реформування педагогічної освіти, що має значний потенціал для формування сучасного, практично підготовленого і конкурентоспроможного вчителя фізики.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Mokliuk M., Popova O., Soroka M., Babchenko Y., Ivashchenko I. Internet technology as one of distance education during pandemic. *International Journal of Health Sciences*. 2022. Vol. 6, No. 1. P. 11–20. DOI: https://doi.org/10.53730/ijhs.v6n1.2981
2. Гриньов Р. С. Система дистанційного навчання майбутніх учителів фізики. *Проблеми сучасних трансформацій. Серія: Педагогіка та психологія*. 2024. URL: https://reicst.com.ua/pmtp/article/view/2024-5-08-01
3. Гриньова М. В., Василевська Г. І. Інноваційні моделі підготовки майбутніх учителів: дуальний підхід. *Педагогіка і психологія*. 2022. №2. С. 12–19.
4. Заболотний В. Ф., Моклюк М. О., Живков О. П. Вивчення законів ідеального газу засобами сучасних освітніх технологій. *Фізика та астрономія в сучасній школі*. 2012. №4. С. 32–36.
5. Закон України «Про вищу освіту». URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18
6. Закон України «Про освіту». URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19
7. Золотухіна С. Т., Лозова В. І. Дуальне навчання у педагогічному освітньому просторі як дискусійна проблема. *ХНПУ ім. Г. С. Сковороди*. 2018. URL: https://dspace.hnpu.edu.ua/items/3e12a177-8d1f-4a7f-94d5-0e8170f61a6a
8. Концепція розвитку педагогічної освіти. 2021. URL: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-koncepciyi-rozvitku-pedagogichnoyi-osviti.
9. Кравченко О. Дуальна освіта в Україні: від концепції до практики. *Молодий вчений*. 2021. №2 (90). С. 64–69. https://doi.org/10.32839/2304-5809/2021-2-90-12
10. Кулик Л. О., Ткаченко А. В. Підготовка майбутніх учителів фізики до організації групової навчальної діяльності учнів. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*. 2023. URL: https://pednauk.cusu.edu.ua/article/view/1603
11. Кулик Т., Ткаченко М. Актуальні аспекти впровадження дуальної освіти у підготовці педагогічних кадрів. *Наукові записки*. 2023. №5. С. 58–63.
12. Маринченко Є.О. Дуальне навчання як важливий складник інноваційної підготовки майбутніх педагогів професійного навчання. *Вісник ЧНУ ім. Б. Хмельницького. Серія: Педагогічні науки.* 2019. URL: https://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/3245
13. Миколайко В. Підготовка майбутнього вчителя фізики до формування дослідницької компетентності учнів із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій. *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Теорія та методика навчання природничих наук*. 2023. №5. С. 60–73. URL: https://intranet.vspu.edu.ua/naturalscience/index.php/journal/article/view/55
14. Моклюк М. О. Методика використання елементів дистанційних технологій у процесі навчання фізики в загальноосвітніх навчальних закладах. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук. 2009. 197 с.
15. Наказ МОН № 1296 від 06.11.2020 року. URL: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-metodichnih-rekomendacij-shodo-zaprovadzhennya-dualnoyi-formi-zdobuttya-osviti-u-zakladah-fahovoyi-peredvishoyi-ta-vishoyi-osviti
16. Постанова Кабінету Міністрів України № 1216 від 21.11.2019 року. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1216-2019-п
17. Романенко В. Дуальна освіта в Україні: адаптація досвіду європейських країн до українських реалій. *Платформа «BUKI»*, 2018. URL: https://buki.com.ua/news/dualna-osvita-v-ukrayini-adaptatsiya-dosvidu-evropeyskykh-krayin-do-ukrayinskykh-realiy
18. Савчук Р. Проблеми і перспективи розвитку дуальної освіти для повоєнного відновлення України. *Professional Pedagogics*. 2024. URL: https://jrnls.ivet.edu.ua/index.php/1/article/view/914
19. Серга Д., Моклюк М. Способи організації та проведення лабораторних робіт з фізики під час дистанційного навчання. *Актуальні проблеми математики, фізики і комп'ютерних наук: зб. наук. пр. / редкол.: С. В. Подолянчук (голова) та ін.; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського.* [Електронне мережне видання]. 2022. Випуск 19. С. 160–165.
20. Хоменко Л. Напрямки цифровізації професійної підготовки майбутніх учителів математики та фізики: зарубіжний та український досвід. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету.* 2023. № 2. С. 145–153. https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2023.282520

21. Шиян Р. Європейський досвід дуальної освіти: імплементація в українську педагогічну систему. *Освітній дискурс*. 2021. №1 (39). С. 44–51.

UDC 378.147.091.33-022.215:53

Ways to implement dual learning during the training of future physics teachers

Anatolii Silveistr, Mykola Mokliuk

Abstract. The article analyzes the theoretical principles and practical ways of implementing dual learning in the process of training future physics teachers in higher pedagogical education institutions. The authors focus on the relevance of implementing dual learning in the context of reforming the national education system, in particular in the context of implementing the Concept of the New Ukrainian School. It is noted that the existing traditional system of teacher training does not fully ensure the formation of practical skills adapted to modern conditions of school education. It is dual learning, which combines theoretical training in higher educational institutions with practical activities in partner schools, that allows significantly improving the quality of professional education of physics teachers. The article analyzes the regulatory and legal framework of Ukraine regarding the implementation of dual learning, in particular the Laws of Ukraine "On Education", "On Higher Education", Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 1216 (2019), Order of the Ministry of Education and Science No. 1296 (2020), Concept of Development of Pedagogical Education (2021). The foreign experience of implementing dual education in the countries of the European Union, the USA, Great Britain, and Scandinavian countries is summarized, where the emphasis is on flexible models of interaction between educational institutions and employers.

The authors outline the main ways of implementing dual education in the training of physics teachers: long-term pedagogical practice on the basis of schools, official employment of students as teaching assistants, implementation of blended learning, creation of joint educational modules with the participation of university teachers and school teachers, active use of digital technologies and STEM resources. Examples of the implementation of such approaches in Ukrainian pedagogical universities are considered.

In conclusion, it is emphasized that dual education is an effective innovative form of organizing the educational process, capable of ensuring high-quality professional training of future physics teachers, adaptation to the conditions of a modern school, and the formation of a high level of professional competence. Directions for further research in this area are proposed.

Keywords: dual education, teacher education, future physics teacher, practice, professional training.

References

1. Mokliuk, M., Popova, O., Soroka, M., Babchenko, Y., Ivashchenko, I. (2022). *Internet technology as one of distance education during pandemic*, International Journal of Health Sciences, **6** (1), 11–20. https://doi.org/10.53730/ijhs.v6n1.2981
2. Grinyev, R. S. (2024). *Distance learning system for future physics teachers*, Problems of modern transformations, Series: Pedagogy and psychology. [in Ukrainian]. https://reicst.com.ua/pmtp/article/view/2024-5-08-01
3. Grinyev, M. V., Vasilevska, G. I. (2022). *Innovative models of training future teachers: a dual approach*, Pedagogy and psychology, **2**, 12–19. [in Ukrainian]
4. Zabolotnyi, V. F., Mokluk, M. O., Zhivkov, O. P. (2012). *Studying the ideal gas laws using modern educational technologies*, Physics and astronomy in a modern school, **4**, 32–36. [in Ukrainian]
5. Law of Ukraine "On Higher Education". [in Ukrainian]. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18
6. Law of Ukraine "On Education". [in Ukrainian]. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19
7. Zolotukhina, S. T., Lozova, V. I. (2018). *Dual education in the pedagogical educational space as a debatable problem,* KhNPU named after G. S. Skovoroda. [in Ukrainian]. https://dspace.hnpu.edu.ua/items/3e12a177-8d1f-4a7f-94d5-0e8170f61a6a
8. Concept of the development of pedagogical education. (2021). [in Ukrainian]. https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-koncepciyi-rozvitku-pedagogichnoyi-osviti
9. Kravchenko, O. (2021). *Dual education in Ukraine: from concept to practice*, Young scientist, **2** (90), 64–69. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32839/2304-5809/2021-2-90-12
10. Kulyk, L. O., Tkachenko, A. V. (2023). *Training of future physics teachers for organizing group educational activities of students*, Scientific notes, Series: Pedagogical sciences. [in Ukrainian]. https://pednauk.cusu.edu.ua/article/view/1603

11. Kulyk, T., Tkachenko, M. (2023). *Current aspects of implementing dual education in the training of pedagogical personnel*, Scientific notes, **5**, 58–63. [in Ukrainian]
12. Marynchenko, E. O. (2019). *Dual education as an important component of innovative training of future teachers of vocational education*, Bulletin of the B. Khmelnytskyi National University of Kyiv, Series: Pedagogical sciences. [in Ukrainian]. https://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/3245
13. Mykolayko, V. (2023). *Preparation of a future physics teacher for the formation of students' research competence using information and communication technologies*, Scientific notes of Vinnytsia State Pedagogical University named after M. Kotsiubynsky, Series: Theory and methodology of teaching natural sciences, **5**, 60–73. [in Ukrainian]. https://intranet.vspu.edu.ua/naturalscience/index.php/journal/article/view/55
14. Mokluk, M. O. (2009). Methodology of using elements of distance technologies in the process of teaching physics in general educational institutions. Dissertation for the degree of Candidate of Pedagogical Sciences. [in Ukrainian]
15. Order of the Ministry of Education and Science No. 1296 dated 06.11.2020. [in Ukrainian]. https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-metodichnih-rekomendacij-shodo-zaprovadzhennya-dualnoyi-formi-zdobuttya-osviti-u-zakladah-fahovoyi-peredvishoyi-ta-vishoyi-osviti
16. Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 1216 of 21.11.2019. [in Ukrainian]. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1216-2019-п
17. Romanenko, V. (2018). *Dual education in Ukraine: adaptation of the experience of European countries to Ukrainian realities. Platform "BUKI"*. [in Ukrainian]. https://buki.com.ua/news/dualna-osvita-v-ukrayini-adaptatsiya-dosvidu-evropeyskykh-krayin-do-ukrayinskykh-realiy
18. Savchuk, R. (2024). *Problems and prospects for the development of dual education for the post-war reconstruction of Ukraine*, Professional Pedagogics. [in Ukrainian]. https://jrnls.ivet.edu.ua/index.php/1/article/view/914
19. Serga, D., Mokliuk, M. (2022). *Methods of organizing and conducting laboratory work in physics during distance learning*, Current problems of mathematics, physics and computer sciences: collection of scientific works, **19**, 160–165. [in Ukrainian]
20. Khomenko, L. (2023). *Directions of digitalization of professional training of future teachers of mathematics and physics: foreign and Ukrainian experience*, Collection of scientific papers of Uman State Pedagogical University, **2,** 145–153. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2023.282520
21. Shiyan, R. (2021). *European experience of dual education: implementation in the Ukrainian pedagogical system*, Educational discourse. **1** (39), 44–51. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Анатолій Сільвейстр, доктор педагогічних наук, професор, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Anatolii Silveistr, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia, 21001, Ukraine;

Микола Моклюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mykola Mokliuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 01.05.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 124–133.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 124–133.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147.091.33-027.22:53]:623.094:004.896

Вивчення військових технологій як засобів популяризації фізики: від гіроскопа в робототехніці до систем стабілізації танкових гармат та безпілотних літальних апаратів

Сергій Киричик[1], Олександр Мартинюк[2]

[1]Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», кафедра автоматизації технологічних процесів та електрообладнання, м. Харків, Україна
kyrychyks@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-8717-1393

[2]Волинський національний університет імені Лесі Українки, кафедра експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій, м. Луцьк, Україна
martynyuk.oleksandr@vnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-4473-7883

Анотація. У сучасному світі де технології швидко змінюють принципи розвитку економіки, виробництва та оборони, наука фізика стає фундаментом для створення передових рішень у робототехніці, безпілотних системах та високоточній зброї. Це особливо важливо для оборонної промисловості, де наука дозволяє не лише ефективно захищатися, а й отримувати стратегічні переваги. Війна в Україні яскраво продемонструвала актуальність таких знань. Саме тому якісна підготовка молоді у галузі фізики дозволяє не лише зміцнити національну безпеку, а й задавати тенденції технологічного прогресу на світовій арені.

У статті наведено приклад вивчення принципу функціонування гіроскопа й окремих аспектів його використання в освітній робототехніці та безпілотних літальних апаратах (БПЛА). Проаналізовано теоретичні основи роботи автоматизованої системи управління озброєнням танків, зокрема стабілізатора танкової гармати на прикладі вітчизняної машини Т-64. В основі їх функціонування використано закони фізики – від принципів інерції та моменту сили до управління коливальними системами. Вивчення принципів роботи танкового стабілізатора, автоматизованого управління його озброєнням, а також систем керування БПЛА підвищать науковий рівень майбутніх інженерів та педагогів. Такі знання можуть бути ефективно інтегровані у вивчення фізики, радіотехніки, робототехніки, в гуртковій на науково-дослідницькій роботі що спонукатиме здобувачів освіти до навчання та створення власних автоматизованих проєктів.

У межах дослідження були розроблені та апробовані лабораторні роботи з робототехніки здобувачами освіти фізичних спеціальностей та курсантів танкового інституту. Описано методику проведення розроблених лабораторних робіт, та здійснено аналіз їхньої ефективності. Запропоновано методичні рекомендації щодо модифікації лабораторних робіт з урахуванням рівня підготовки здобувачів освітив та наявного обладнання. Це не лише приклад можливостей інтеграції оборонних технологій у освітнє середовище, але і практичні рекомендації для викладачів, які бажають зробити свої заняття цікавішими та ефективнішими.

Ключові слова: автоматизовані системи управління озброєнням, робототехніка, танкова гармата, безпілотний літальний апарат (БПЛА), фізика, гіроскоп, датчик кута.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-10

1. Вступ

Фізика є фундаментальною наукою, що лежить в основі розвитку сучасного суспільства. Її застосування простягається від найпростіших явищ природи до складних технологій, які формують наш світ. Важливість фізики стає особливо помітною в контексті оборонних технологій, де знання цієї науки дозволяє розробляти системи, що забезпечують національну безпеку та збереження життя мільйонів людей. Саме тому популяризація фізики серед молоді набуває ***стратегічного значення***, особливо в умовах сучасних викликів, які стоять перед Україною.

Популяризація фізики як науки має кілька важливих аспектів.

- По-перше, це розвиток критичного мислення та інженерного підходу до вирішення складних завдань;
- по-друге, знання фізичних принципів формує основу для розуміння сучасних технологій, зокрема тих, які використовуються в оборонній сфері.
- по-третє, залучення молоді до вивчення фізики сприяє формуванню висококваліфікованих кадрів, здатних розробляти передові технології, що забезпечують конкурентоспроможність держави на світовій арені.

В умовах війни, яку зараз переживає Україна, оборонні технології стали одним із ключових факторів обороноздатності та збереження державності. Розвиток цих технологій неможливий без глибокого розуміння фізичних явищ. Водночас навчання молоді фізики через призму оборонних технологій не лише підвищує інтерес до цієї науки, але й виховує патріотизм, гордість за досягнення своєї країни та прагнення зробити її сильнішою. Формування у школярів та студентів розуміння значущості військових технологій є важливим елементом підготовки нового покоління, яке буде здатне запобігти повторенню подібних воєнних конфліктів у майбутньому.

Особливу увагу слід приділити безпілотним літальним апаратам (БПЛА) та танковій галузі як найбільш технологічно насичених сферам оборони. Танки відіграють важливу роль у забезпеченні переваги на полі бою, а їх ефективність значною мірою залежить від роботи автоматизованих систем управління озброєнням. БПЛА кардинально змінили зміст ведення військових операцій. Запропоновано тактичні переваги та підвищено оперативну ефективність. Безпілотні апарати використовуються для спостереження, розвідки та ведення цілеспрямованих ударів. Загалом безпілотні системи є прогресивними у військових технологіях, що відображає значні світові інвестиції у їх розвиток [4; 5].

Саме ці аспекти і визначають ***актуальність*** вивчення фізичних принципів роботи стабілізаторів танкових гармат та безпілотних літальних апаратів. У контексті освіти це обумовлено як сучасними викликами, так і перспективами розвитку оборонної галузі України, адже військові технології не лише визначають результативність бойових дій, а й стають символом технологічного прогресу держави.

2. Постановка проблеми

Одним із ключових завдань освіти є формування у молоді розуміння значення фізики як основи для створення інноваційних технологій. Знання фізичних явищ, таких як гіроскопічний ефект чи електромеханічна стабілізація, дозволяють не лише пояснити принципи їх роботи, а й зацікавити здобувачів освіти результатами практичного застосування науки у реальних умовах. У цьому контексті теоретичні та практичні спекти вивчення стабілізаторів є унікальним інструментом для інтеграції міждисциплінарного підходу, що охоплює фізику, інженерію, робототехніку та програмування.

Метою статті є формування мотиваційних матеріалів для вивчення фізики та робототехніки на основі ознайомлення із принципами роботи стабілізаторів танкового озброєння та БПЛА, що допоможе глибше осягнути сутність таких понять, як гіростабілізатор, електромеханічна стабілізація та функціонування замкнених систем керування вогнем. Це дозволить інтегрувати знання у методику навчання, збагачуючи освітній процес прикладами використання наукових принципів у автоматизованих системах управління технікою. Використання прикладів роботи датчиків, пристроїв обробки інформації та виконавчих елементів систем автоматики досліджуючи їхні принципи на лабораторних заняттях дасть розуміння в тому, як фундаментальні фізичні явища стають основою для розробки інноваційних технологій.

3. Основні результати

Стабілізатори танкових гармат є одними з найважливіших елементів сучасної бронетехніки, які забезпечують точність стрільби навіть під час руху. Їхня робота базується на поєднанні механічних, гідравлічних, електричних та оптичних принципах. Нижче розглянуто ключові фізичні явища, що лежать в основі функціонування стабілізаторів, а також принципи їх інтеграції в конструкцію танкових систем [6].

Гіроскопічний ефект. Принцип дії гіроскопа полягає в тому, що під час обертання його ротор створює момент інерції, який протидіє зміні його орієнтації у просторі. У танкових стабілізаторах цей ефект використовується для визначення та компенсації змін кута нахилу гармати у вертикальній площині та повороту башти у горизонтальній площині.

Гіроскоп, будучи важливим компонентом стабілізатора, здатний зберігати орієнтацію осі обертання, незважаючи на зовнішні не значні збурення (безпосередня стабілізація перископічної системи дзеркал прицілу). При значних збуреннях, що викликає помітну прецесію, яка фіксується спеціальним датчиком (обертовим трансформатором), відбувається корекція положення танкового озброєння через електричні або електрогідравлічні виконавчі елементи. Це дозволяє підтримувати стабільність гармати танка в полі зору прицілу, навіть якщо сама машина рухається по нерівній місцевості або маневрує.

Електромеханічна стабілізація. Для компенсації збурень, викликаних рухом танка, у стабілізаторах використовуються електромеханічні системи. Вони складаються із датчиків, які фіксують зміну положення гармати, і виконавчих механізмів, які коригують її позицію. До таких механізмів належать електродвигуни, що працюють у парі з редукторами та гідравлічними приводами. Така система стабілізації працює у реальному часі, постійно аналізуючи дані від датчиків та вносячи корективи у положення гармати. Це забезпечує високу точність стрільби, навіть якщо танк рухається з великою швидкістю чи веде вогонь на пересіченій місцевості, в тому числі по рухомій цілі.

Робота замкнених систем керування. Замкнена система керування є невід'ємною частиною стабілізатора. Вона забезпечує постійний зворотний зв'язок між датчиками та виконавчими механізмами. Така система працює за принципом мінімізації помилки: датчики вимірюють поточний стан системи, порівнюють його із заданими параметрами, а потім передають сигнал на корекцію положення гармати. Завдяки швидкодії та точності замкнених систем керування стабілізатори можуть ефективно реагувати на будь-які зовнішні впливи, зберігаючи стабільність гармати.

Інтеграція законів фізики в інженерні системи. Стабілізатори танкових гармат демонструють, як фізичні закони можуть бути інтегровані у складні інженерні системи. Використання принципів механіки, таких як моменти інерції, сили тертя та гідравлічний тиск, дозволяє створювати надійні та ефективні стабілізатори. Наприклад, гідравлічні приводи забезпечують необхідну силу для утримання гармати у стабільному положенні, а електричні датчики допомагають зчитувати навіть найменші зміни у положенні гармати.

Використання сучасних матеріалів. Для створення стабілізаторів використовуються передові матеріали, які забезпечують їхню довговічність і надійність. Зокрема, корпуси стабілізаторів виготовляють із легких, але міцних сплавів, які витримують значні механічні навантаження. Крім того, електричні компоненти створюються з матеріалів, стійких до температурних перепадів і вібрацій.

Значення стабілізаторів у бойових умовах. Ефективність стабілізаторів гармат безпосередньо впливає на результативність бойових дій. Завдяки їм танки можуть вести точний вогонь навіть під час руху, що забезпечує перевагу на полі бою. У сучасних умовах, коли війна вимагає швидкої адаптації до змін, стабілізатори стають критично важливим елементом бронетехніки.

Гіроскопічні системи стабілізації у системах безпілотних літальних апаратів. Гіроскопічні системи стабілізації (ГСС) широко застосовують у різних системах летальних апаратів (ЛА), і зокрема – у системах безпілотних літальних апаратів (БПЛА). Технології БПЛА в останні роки стрімко розвивалися, і тепер вони набули повсюдного поширення як серед любителів, так і у професійній, особливо, військовій сфері. Дуже поширені невеликі БПЛА – дрони. Вони використовуються, наприклад, для фото- та відеофільмування з висоти. У різних галузях промисловості набули поширення як невеликі дрони, так і безпілотні повітряні судна, що використовуються, зокрема, для перевезення вантажів, моніторингу місцевості та гасіння пожеж. Але і в тому, і в іншому випадку до системи стабілізації та навігації БПЛА входять гіроскопи або гіроскопічні модулі. Гіроскопи визначають зміни кутів тангажу, крену та курсу, після чого ця інформація подається на контролер, що дозволяє стабілізувати БПЛА. Причому, крім трьохосьових систем іноді застосовуються також шестиосьові системи гіроскопічної стабілізації, що дозволяє БПЛА нерухомо зависати в повітрі або плавно спускатися вниз. Інерційна навігаційна система (ІНС), що включає гіроскопи, дозволяє визначати координати і положення БПЛА в просторі навіть у разі відсутності супутникового сигналу. Окремим випадком гіроскопічного пристрою є гіровертикаль – пристрій, що дозволяє визначати справжню вертикаль або площину горизонту для об'єктів, що рухаються. Найпростішою гіровертикаллю може вважатися триосьовий гіроскоп. Але без коригувальних пристроїв його головна вісь поступово змінюватиме свій напрямок через обертання Землі. Тому гіровертикаль в основному застосовують з маятниковою або індикаторною системою корекції.

В авіації гірокомпаси, по суті, є роторними гіроскопами і використовуються для визначення координат літака в просторі за відсутності орієнтирів (наприклад, в умовах високої хмарності). Без гірокомпасів неможлива робота систем автоматичного пілотування. Окремо встановлені гіроскопи застосовують для визначення відхилень курсу, крену та тангажу. Якщо повітряне судно почне відхилятися від курсу, а також кренитися в поздовжній або поперечній площині, датчик це зафіксує. Також використовується електронний гіроскоп з контролером, який дозволяє задати допустиме відхилення від курсу. Якщо повітряне судно відхилиться від курсу на недопустиме значення, система подасть відповідний сигнал на центральний комп'ютер.

Гіроскопічний датчик набору Lego Mindstorms EV3 та його використання в робототехнічних проєктах. Гіроскопічний датчик набору Lego Mindstorms EV3 (Рис. 1) [3] призначений для вимірювання кута обертання робота або швидкості обертання. На корпусі датчика нанесено дві стрілки, які визначають площину, в якій має працювати датчик. Тому важливо правильно встановити датчик на роботизовану платформу. Кут і швидкість може бути позитивними чи негативними. Обертання за годинниковою стрілкою є позитивним, а обертання проти годинникової стрілки – негативним. При підключенні гіроскопічного датчика до модуля EV3, необхідно забезпечити його нерухомість. Для найкращих результатів, треба використовувати режим «Скидання» перед кожним рухом.

Рис. 1. Гіроскопічний датчик набору Lego Mindstorms EV3

У таблиці 1 показано програмні блоки та режими, які можна використовувати з гіроскопічним датчиком.

Таблиця 1

Програмні блоки та режими гіроскопічного датчика

Блок	Режим	Використання
Очікуваня	Порівняння	Зачекати, доки кут або швидкість обертання не досягне певного значення.
	Зміна	Зачекати, доки кут чи швидкість обертання не зміниться на певне значення.
Цикл	Гіроскопічний датчик	Повторити послідовність блоків, доки кут або швидкість обертання не досягне певного значення.
Якщо...то	Гіроскопічний датчик – Порівняння	Вибрати між двома послідовностями блоків на основі кута або швидкості обертання.
Гіроскопічний датчик	Вимірювання	Виміряти кут та/або швидкість обертання та отримати результат.
	Порівняння	Порівняти кут або швидкість обертання з граничним значенням і отримати.
	Скидання	Скинути кут обертання на нуль.
Реєстрація даних	Кут. Швидкість.	«Реєстрація даних».

Найперше, сформуємо базову модель робота та обладнаємо її гіроскопічним датчиком. Запропонуємо виконати таке завдання: написати програму руху робота по квадрату з довжиною сторони квадрата, що дорівнює довжині кола, тобто довжині колеса робота. Для програмування використаємо програмне середовище «LEGO Mindstorms EV3 Education Software». Перед початком руху скинемо датчик в 0, використавши блок «Гіроскопічний датчик» (Рис.2 (блок 1), включимо обидва мотори на 1 оберт (блок 2). Для повороту робота на 90 градусів скористаємося гіроскопічним датчиком: використовуючи програмний блок 3 «Незалежне керування моторами», змусимо робота обертатися вправо навколо своєї осі. Використовуючи програмний блок «Очікування» в режимі «Гіроскопічний датчик» , будемо чекати, поки значення кута повороту не досягне 90 градусів (блок 4), а тоді вимкнемо мотори (блок 5). Використовуючи програмний блок «Цикл» в режимі «Підрахунок», повторимо кроки, наприклад, два рази.

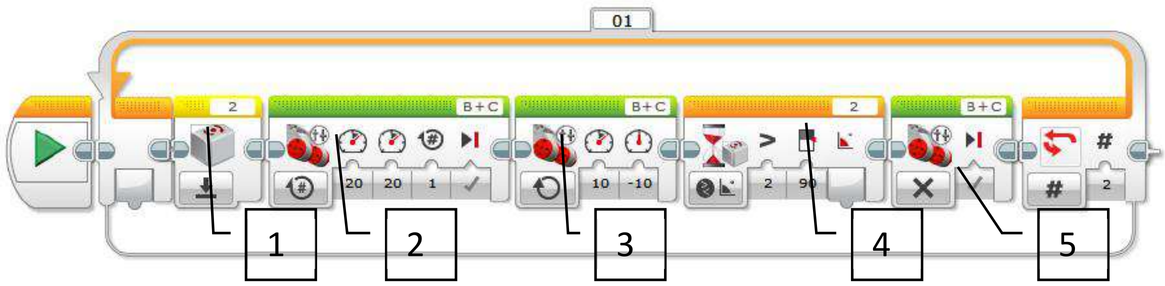


Рис. 2. Програма руху робота по квадрату

Аналогічно, таку ж програму рекомендуємо сформувати в середовищі EV3 Classroom. Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс на основі популярної мови програмування Scratch забезпечує можливість здобувачам освіти швидко навчитися формувати складні програми.

Розглянемо приклад інструктивних матеріалів для виконання **лабораторного дослідження властивостей гіроскопа**. Метою лабораторної роботи є поглиблення і закріплення теоретичних знань по фізичній суті процесів, що відбуваються у триступеневому гіроскопі, а саме: 1) дослідити явище прецесії та визначити вплив зовнішнього моменту на її швидкість; 2) переконатися у тому, що триступеневий гіроскоп є найпростішим стабілізатором [1; 2].

У процесі виконання роботи мета досягається шляхом відпрацювання теоретичних відомостей та практичного завдання. Звіт виконаної роботи оформляється у вигляді заповнення таблиці, побудові графіків залежності, написанні висновку та відповідей на контрольні запитання. Загальні теоретичні відомості містять інформацію про гіроскопічний ефект, будову триступеневого гіроскопа, кінематичні схеми гіроскопів у карданових підвісах та властивості: стійкість і прецесію.

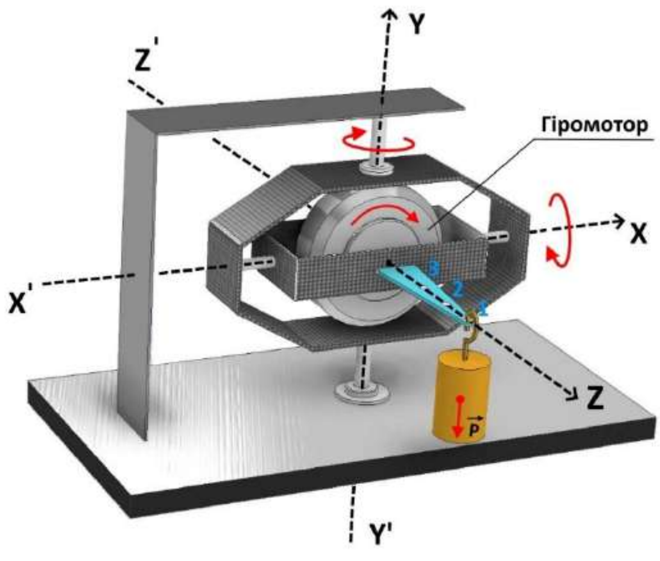


Рис. 3. Експериментальна установка для дослідження триступеневого гіроскопа

Експериментальна установка (рис. 3) складається із швидкообертового гіромотора, який змонтовано так, що він може обертатись навколо горизонтальної осі *X-X'*. До внутрішньої рамки закріплений важіль із трьома отворами для підвішування тягарця заданої маси ($m_{\text{т}}$ = 0,065 кг) у різних положеннях.

Гіромотором є асинхронний електродвигун з коротко замкнутою обмоткою ротора. Живлення трифазної обмотки статора, яка з'єднана по схемі зірки, подається від мережі змінного струму із напругою 36 В. Збільшення числа обертів ротора, а тим самим і його кутової швидкості, досягається шляхом зміщення в статорі трифазної двополюсної обмотки (число пар полюсів P=1), при цьому живлення обмотки здійснюється змінним струмом частотою 400 Гц.

Після підготовки експериментальної установки до роботи, здобувачі освіти подають трифазну напругу 36 В частотою 400 Гц. Через 2 хв, коли гіромотор набере постійної кутової швидкості, необхідно розірвати коло живлення (від'єднати розетку від вилки). Потім необхідно закріпити тягарець в отвір 1. Визначити швидкість прецесії, для чого виміряти за допомогою секундоміру час, за який вісь гіроскопу зробить один повний оберт повний оберт навколо осі Y.

Закріпити почергово тягарець в отвір 2 і отвір 3. Повторити попередні дії. Розрахувати зовнішні моменти для 3-х положень тягарця, (для різних значень радіусів). Перевірити правильність твердження, що кутова швидкість прецесійного руху залежить від величини зовнішнього моменту. Побудувати відповідні графіки залежності, та, використовуючи відповідні формули, розрахувати число обертів гіроскопу, його кутову швидкість, момент інерції та кінетичний момент. Порівняти значення кутової швидкості ротора і зовнішньої рамки гіроскопа, зробити необхідні висновки.

Загальні відомості щодо комплексу управління озброєнням.

Для аналізу просторових коливань танка використовується інерційна система координат X, Y, Z, нерухома відносно землі (рис. 4). Координатні системи корпусу, башти та озброєння (гармати) позначено відповідно індексами к, б, о. У першому наближенні складний просторовий рух корпусу танка прийнято розглядати як поступальний разом із його центром мас Ок та обертальний навколо точки Ок. Положення центра мас в інерційній системі координат характеризується радіус-вектором.

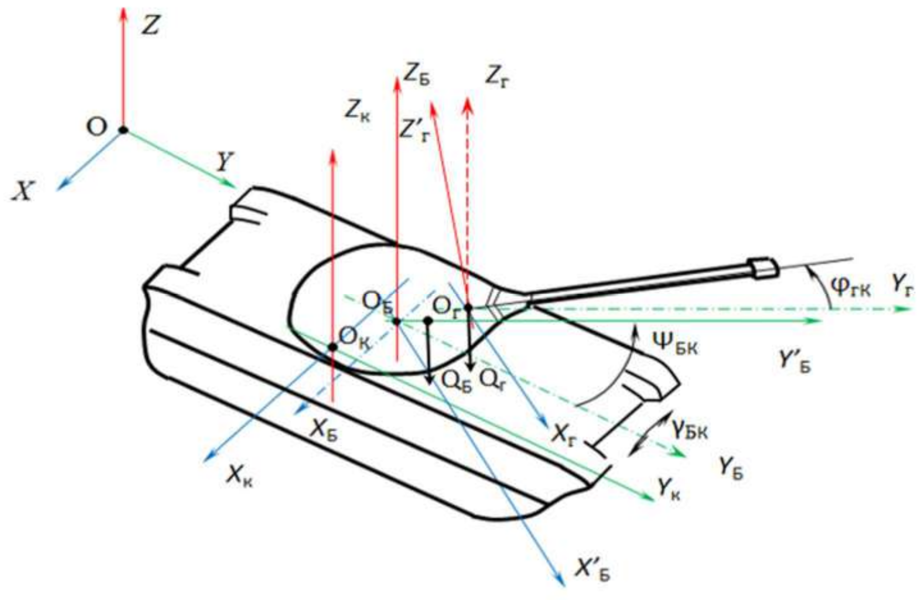


Рис. 4. Координатні системи танка

Змінні складові радіус-вектора називаються відповідно поперечними X, поздовжніми Y та вертикальними Z лінійними коливаннями. Обертання корпусу характеризується трьома незалежними координатами, за які прийнято три кута Ейлера (φ, γ, ψ). У першому наближенні їх значення визначають кутові коливання корпусу: φ – поздовжні кутові коливання (навколо осі $O_к X_к$), γ – поперечні кутові коливання (навколо осі $O_к Y_к$), ψ – горизонтальні кутові коливання (навколо осі $O_к Z_к$). Параметри лінійних і кутових коливань кожного типу машин визначаються експериментально для найбільш імовірних умов руху. Під час бойових дій гармата завжди має кут підняття $\varphi_{ГК}$ відносно корпусу, а башта може бути повернута на кут $\psi_{БК}$. Кутові коливання озброєння визначають на підставі даних про кутові коливання корпусу та матриці переходу від координатної системи $X_К$, $Y_К$, $Z_К$ до координатних систем гармати (озброєння) $X_Г$, $Y_Г$, $Z_Г$ або башти $X_Б$, $Y_Б$, $Z_Б$.

Дослідження властивостей гіроскопа як стабілізатора і датчика кутових відхилень. Гіроскоп у танковій системі озброєння стабілізує дзеркала перископічного блоку прицілу, забезпечуючи їх фіксацію у заданих площинах під час руху машини. Коли бойова машина переміщається гіроскоп компенсує коливання корпусу, утримуючи лінію прицілювання стабільною. Це дозволяє навіднику проводити точне спостереження та вести прицільний вогонь.

В такому гіростабілізаторі роль гіроскопа виконує гіромотр, який обертається на високій швидкості та зберігає свою орієнтацію в просторі. Якщо корпус танка нахиляється або змінює своє положення, система зчитує зміну кутового положення ротора і передає відповідні сигнали на електромеханічний привід стабілізації дзеркал перископа прицілу.

Крім стабілізації дзеркал прицілу, гіроскопи використовують як датчики крену танка. Вони вимірюють кути нахилу корпусу щодо горизонталі, передаючи сигнал на електромеханічний або електрогідравлічний привід, який компенсує зміни положення гармати у просторі забезпечуючи стабільну її орієнтацію в просторі. Це дозволяє вести точний вогонь з ходу.

Висновки. Отже, інтеграція вивчення військових технологій у освітній процес сприяє не лише популяризації фізики, а й вихованню патріотизму серед молоді. Здобувачі освіти отримують можливість побачити реальні приклади внеску своїх співвітчизників у зміцнення оборонної потужності країни. Це формує у них почуття гордості за свою державу та бажання стати частиною її технологічного розвитку. Тому, популяризація фізики через військові технології є актуальним та стратегічно важливим завданням для української освіти.

Перспективи у подальших дослідженнях вбачаємо у розробленні методичного та технологічного забезпечення зазначеної проблематики та вивчення пропозицій щодо використання сучасних цифрових комплексів.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бондарук П. А., Серпухов О. В., Касімов А. М., Горбов О. М., Кривошапка А. І. Автоматизовані системи управління озброєнням. Навчальний посібник. Частина 1. Харків: Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», 2019. 404 с.
2. Бондарук П. А., Серпухов О. В., Касімов А. М., Александрова Т. Є., Макогон О. А. Автоматизовані системи управління озброєнням. Навчальний посібник. Частина 2. Харків: Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», 2023. 306 с.
3. Lego Mindstorms EV3. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Lego_Mindstorms_EV3
4. Глотов В. М., Фис М. М., Колесніченко В. Б., Гуніні А. В. Застосування БПЛА у військовій справі та аерознімання. Монографія. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2022. 196 с.
5. Мартинюк О. С., Мосійчук В. О. Особливості використання безпілотних літальних апаратів для виявлення теплових втрат. *Комп'ютерні технології: сучасні реалії та перспективи: Тези доповідей VI міжвузівського науково-практичного семінару, (м. Луцьк, 16 грудня 2020 р).* Луцьк: ЛІРоЛ Університету «Україна», 2020. С.71–74.

6. Сиротенко А. М. Підготовка комплексу озброєння танка до застосування. Практичний посібник. Харків: Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», 2005. 190 с.

UDC 378.147.091.33-027.22:53]:623.094:004.896

Studying military technologies as a means of popularizing physics: from gyroscope in robotics to stabilization systems for tank guns and unmanned aircraft

Serhii Kyrychyk, Oleksandr Martyniuk

Abstract. In the modern world where technologies are rapidly changing the principles of economic development, production and defense, the science of physics is becoming the foundation for creating advanced solutions in robotics, unmanned systems and high-precision weapons. This is especially important for the defense industry, where science allows not only to effectively defend itself, but also to gain strategic advantages. The war in Ukraine has clearly demonstrated the relevance of such knowledge. That is why high-quality training of young people in the field of physics allows not only to strengthen national security, but also to set trends in technological progress on the world stage.

The article provides an example of studying the principle of operation of a gyroscope and certain aspects of its use in educational robotics and unmanned aerial vehicles (UAVs). The theoretical foundations of the automated tank armament control system, in particular the tank gun stabilizer, are analyzed using the example of the domestic T-64 vehicle. The laws of physics are used as the basis for their operation – from the principles of inertia and moment of force to the control of oscillatory systems. Studying the principles of operation of a tank stabilizer, automated control of its weapons, as well as UAV control systems will increase the scientific level of future engineers and teachers. Such knowledge can be effectively integrated into the study of physics, radio engineering, robotics, in research circles, which will encourage students to study and create their own automated projects.

As part of the study, laboratory work on robotics was developed and tested by students of physical specialties and cadets of the tank institute. The methodology for conducting the developed laboratory work is described, and their effectiveness is analyzed. Methodological recommendations are proposed for modifying laboratory work, taking into account the level of training of students and available equipment. This is not only an example of the possibilities of integrating defense technologies into the educational environment, but also practical recommendations for teachers who want to make their classes more interesting and effective.

Keywords: automated weapons control systems, robotics, tank gun, unmanned aerial vehicle (UAV), physics, gyroscope, angle sensor.

References

1. Bondaruk P. A., Serpukhov O. V., Kasimov A. M., Gorbov O. M., Kryvoshapka A. I. (2019). *Automated weapons control systems*: textbook, part 1, Military Institute of Tank Troops of the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv. [in Ukranian]
2. Bondaruk P. A., Serpukhov O. V., Kasimov A. M., Aleksandrova T. Ye., Makogon O. A. (2023). *Automated weapons control systems*: textbook, part 2, Military Institute of Tank Troops of the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv. [in Ukranian]
3. Lego Mindstorms EV3. https://uk.wikipedia.org/wiki/Lego_Mindstorms_EV3
4. Glotov V. M., Fis M. M., Kolesnichenko V. B., Gunini A. V. (2022). *Application of UAVs in military affairs and aerial photography:* monograph, Lviv Polytechnic Publishing House, Lviv. [in Ukranian]
5. Martyniuk O. S., Mosiychuk V. O. (2020). *Features of the use of unmanned aerial vehicles to detect heat losses. Computer technologies: modern realities and prospects*, abstracts of reports of the VI interuniversity scientific and practical seminar (Lutsk, December 16, 2020), LIRoL of the University «Ukraine», Lutsk, 71–74. [in Ukranian]
6. Syrotenko A. M. (2005). *Preparation of the tank armament complex for use:* practical manual, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv. [in Ukranian]

Про авторів / About the authors

Сергій Киричик, лейтенант Збройних Сил України, викладач, кафедра автоматизації технологічних процесів та електрообладнання, Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», вул. Полтавський шлях, 192, м. Харків, 61098, Україна;

Serhii Kyrychyk, Lieutenant of the Armed Forces of Ukraine, Lecturer, Department of Automation of Technological Processes and Electrical Equipment, Military Institute of Tank Troops of the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», 192 Poltavsky Shlyakh St., Kharkiv, 61098, Ukraine;

Олександр Мартинюк, доктор педагогічних наук, професор, кафедра експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій, Волинський національний університет імені Лесі Українки, пр. Волі, 13, м. Луцьк, 43025, Україна;

Oleksandr Martyniuk, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Department of Experimental Physics, Information and Educational Technologies, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Voli Ave., Lutsk, 43025, Ukraine.

Отримано / Received 26.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ

Theory and methods of vocational education

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 134–150.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 134–150.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 712:51

Математичні ландшафтні парки як платформа для математичного моделювання, наукових досліджень та популяризації математики

Любов Тютюн[1], Олена Косовець[2], Олена Соя[3], Мар'яна Ковтонюк[4]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
tiutiun.la@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-9466-8746

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kosovets.op@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8577-3042

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

[4]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukmm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7444-1234

Анотація. Стаття присвячена проблематиці створення та функціонування ландшафтного математичного парку як інноваційної платформи для математичного моделювання, наукових досліджень та популяризації математики. Математичні парки розглядаються як унікальні простори, що поєднують наукові знання з естетичними аспектами, перетворюючи математичні концепції на інтерактивні експонати та арт-об'єкти. Ідея авторів дозволяє гармонійно поєднати минуле й сьогодення: визначні здобутки математики візуалізувати засобами сучасних досягнень у галузі використання цифрових технологій в освіті.

У статті досліджено математичні парки та здійснено їх класифікацію. Автори виділили два основні типи: ландшафтні (реальні) та віртуальні освітні математичні парки. Вивчено потенціал інноваційних підходів для популяризації математики серед молоді шляхом використання інтерактивних методів навчання та прикладних досліджень на стику математики та інформатики.

Автори представили у статті власний проєкт «Математичний сквер «Платонові тіла», який взяв участь у конкурсі «Бюджет громадських ініціатив Вінницької міської об'єднаної територіальної громади» (м. Вінниця, Україна).

У статті досліджено специфіку використання ландшафтного математичного парку в процесі підготовки бакалаврів математики та інформатики. Зазначено, що такі парки сприяють не лише формуванню математичної культури майбутніх фахівців, а й розвитку ключових компетентностей, зокрема здатності до самостійного навчання, ефективного використання знань, а також умінь працювати із

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-07

системами комп'ютерної математики, програмним забезпеченням для опрацювання 3D-графіки. Це, своєю чергою, підвищує ефективність освіти, самоосвіти та професійної діяльності фахівців.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у створенні віртуального освітнього математичного парку як платформи для математичного моделювання, наукових досліджень; у спорудженні на території університету ландшафтного математичного парку мініатюр, надрукованих на 3D-принтері, та його інформаційному супроводі; дослідженні впливу участі студентів у роботі віртуальних лабораторій на формування їхньої математичної, інформатичної та педагогічної культури.

Ключові слова: математичний парк, ландшафтний математичний парк, математичне моделювання, наукові дослідження, 3D-моделювання, 3D-друк, популяризація математики.

1. Вступ

Роль математики в житті кожної людини, безумовно, колосальна. Вона в усі часи мала незаперечне культурне й практичне значення, її роль у технічному й економічному розвитку суспільства важко переоцінити. Сьогодні кожний має усвідомлювати, що математика є ефективним інструментом моделювання й дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності, базовим компонентом загальної та професійної освіти сучасної людини, дієвим засобом розвитку мислення, просторової уяви, наукового світогляду особистості, невіддільною частиною загальнолюдської культури. Якісна математична освіта є необхідною умовою успішного опанування цілою низкою важливих для економіки та суспільства спеціальностей.

Результати національного мультипредметного тесту в Україні [1] та Programme for International Student Assessment (PISA) [2] свідчать про наявність проблем у математичній освіті багатьох розвинених країн. Актуальності цій проблемі додають різні зовнішні чинники: епідемії світового масштабу, збройні конфлікти, екологічні та економічні негаразди. Тому науковці та викладачі в освітніх системах держав вчаться швидко реагувати на зміни зовнішнього середовища, зокрема, це організація навчального процесу в дистанційному та змішаному форматах із застосуванням цифрових технологій та віртуальних інтерактивних можливостей для представлення різноманітного навчального контенту.

Низка розвинених країн приділяє значну увагу популяризації математики, зокрема створенню так званих наукових парків. Серед наукових парків виділимо математичні парки як дивовижні місця для прогулянок, де наука переплітається з мистецтвом і природою.

Серед найвідоміших і найвідвідуваніших парків є – Науковий центр Онтаріо в Торонто [3], Національний музей математики (MoMath) у Нью-Йорку [4], Партисипативний музей «Не торкатися заборонено» в Буенос-Айресі [5], Чиказький дитячий музей на озері Мічиган [6], Музей математики в Приверно [7], Сад Архімеда: Музей математики у Флоренції [8], Математичний центр Математикум у Гіссені [9], математичний парк, створений на честь відомого математика Шрініваса Рамануджана в Індії [10], Перший державний «Музей науки» Малої академії наук України в Києві [11], Музей математики в Києві [12].

Сучасні технології відкривають нові можливості для навчання та популяризації науки. Яскравим прикладом такої доступності є віртуальні екскурсії математичними парками. Студенти з різних куточків світу можуть одночасно відвідати найвідоміші математичні парки, не витрачаючи кошти на подорожі та проживання. Крім того, віртуальні екскурсії можна проводити в будь-який зручний час, що забезпечує індивідуалізацію освітнього процесу.

Відвідувачі віртуальних екскурсій занурюються у світ математики, не виходячи з дому. Завдяки інтерактивним елементам, таким як 3D-моделі, панорамні знімки та відео, студенти можуть візуалізувати складні математичні концепції та побачити, як вони втілюються в реальні об'єкти. Це сприяє глибшому розумінню матеріалу та підвищує мотивацію до навчання математики. Інтерактивні елементи віртуальних екскурсій роблять навчання цікавішим та ефективнішим. Студенти можуть самостійно досліджувати експонати, відповідати на запитання та виконувати завдання, що сприяє розвитку їхнього критичного мислення, творчих здібностей та навичок самостійної роботи. Віртуальні екскурсії математичними парками також є потужним інструментом для популяризації науки. Вони демонструють, що математика – це не лише сукупність абстрактних формул, а й прекрасне мистецтво, яке оточує нас у повсякденному житті. Це допомагає подолати стереотипи про математику як складну і нудну науку.

2. Постановка проблеми

Ґрунтовний аналіз науково-дослідницьких праць та ресурсів, що містять матеріали про сучасні наукові парки [3-13], дозволив у дослідженні довести, що ландшафтний математичний парк є платформою для математичного моделювання, наукових досліджень та популяризації математики у межах університетського середовища. Розгляд публікацій, присвячених питанню, що вивчається у періодичних виданнях філософського, психолого-педагогічного та методичного спрямування [14-17] є підґрунтям для визначення понятійно-категоріального апарату та аналізу, систематизації й узагальнення наявного досвіду, обґрунтування теоретичних засад дослідження, розроблення і втілення авторських задумів.

Мета статті полягає в пошуку й дослідженні можливостей та умов створення, розвитку і функціонування ландшафтних математичних парків для математичного моделювання, наукових досліджень, популяризації математики, мотивації вивчення й практичного застосування знань у математичній освіті шляхом реалізації через інноваційні ресурси прикладних досліджень у галузі математики та інформатики.

3. Основні результати

В освітньому просторі підготовки бакалаврів і магістрів математики та інформатики звернемо увагу на формування й створення так званого математичного парку. Великий тлумачний словник сучасної мови слово «парк» тлумачить як «великий сад спеціального призначення, звичайно відкритий для відвідувачів» [18]. Колектив авторів під терміном «математичний парк» розуміє природну або віртуальну територію з підготовленою інфраструктурою, на якій демонструється зв'язок математики з природою та суспільством. Головна мета створення математичного парку – показати, що математика є основою закономірностей природи та суспільства, викликати не лише позитивні емоції відвідувачів, захват, подив і насолоду від математичних об'єктів, а й бажання вивчати математику. Математичний парк розділимо на дві взаємопов'язані частини: ландшафтний математичний парк і віртуальний освітній математичний парк (рис. 1).

Рис. 1. Структурна модель проєктування й моделювання математичних парків (авторська розробка)

Ми розуміємо, що реалізація масштабних ландшафтних проєктів вимагає вкладення значних коштів. Дослідження показують, що на земній планеті створено відносно небагато таких парків.

У світі відомий Центр науки в Онтаріо, який знаходиться в Торонто (Канада) [3]. У ньому розміщено 850 експонатів. Кількість відвідувачів вражає: 1 мільйон на рік. Центр науки в Онтаріо – один із найстаріших та найвідоміших наукових музеїв. Відкрився ще у 1969 році і з того часу його відвідали понад 50 мільйонів людей. Саме в нього найбільший досвід роботи з інтерактивними експонатами й навіть є своє виробництво. Науковий центр оживляє науку завдяки унікальним враженням, викликаючи цікавість, креативність і подив. Він уважно слідкує за новинками в науці та освіті, реагує на зміни в зацікавленнях відвідувачів. Кожні 5 років повністю оновлюється їхня експозиція. Найцікавіші експонати центру: гра Меморі з фотографіями дітей, механізм для демонстрації інженерного планування, платформа для стоп кадр анімації, наукові цікавинки та ін. (рис. 2).

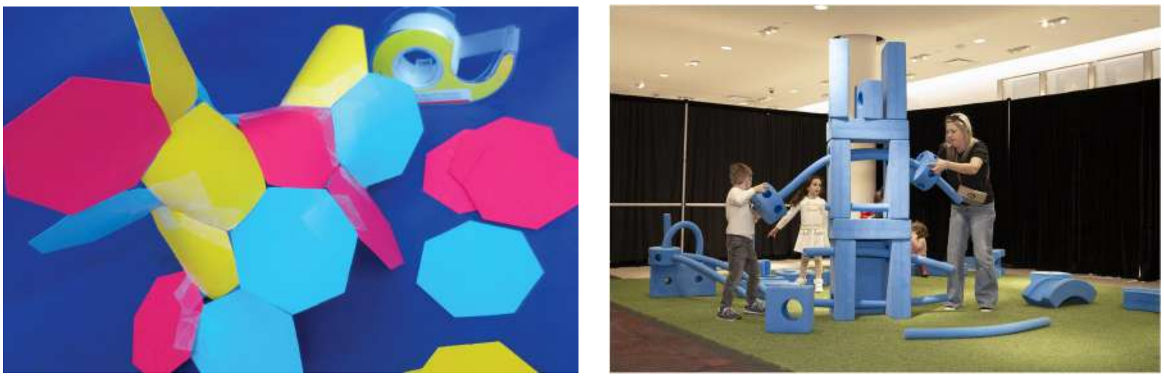


Рис. 2. Гіперболічні семикутники; ігровий майданчик «Уява» [3]

Національний музей математики (MoMath) в Нью-Йорку, знаходиться в окрузі Манхеттен (США), відкрився в 2012 році [4]. Кількість експонатів: 60. Кількість відвідувачів: понад 1,5 мільйона з моменту його відкриття. Це єдиний музей, присвячений математиці у Північній Америці і тут представлено понад 30 інтерактивних експонатів. MoMath є визнаним музеєм, який підкреслює роль математики у висвітленні закономірностей і структур навколо нас. Його динамічні виставки, галереї та програми розроблені, щоб стимулювати дослідження, розпалювати цікавість і розкривати чудеса математики. Музей прагне показати, що математика – це не тільки рівняння з підручника, вона оточує нас. Все, що ми бачимо – будівлі, дороги, ліхтарі, мости, меблі, гаджети, посуд – створено за математичними формулами. У цьому музеї є Math Midway (математична алея) – виставка інтерактивних експонатів на основі математики. Найцікавіші експонати музею: триколісний велосипед, який плавно подорожує по хвилястій циклоїдальній доріжці; Вогняне кільце, яке використовує лазери для перетину тривимірних об’єктів двовимірною площиною для виявлення цікавих форм; доріжка Галілея; експонат, який дозволяє відвідувачам створювати власні математичні функції та бачити результати; стіл для створення фігур та дослідження траєкторії їх руху тощо (рис. 3).

Рис. 3. Національний музей математики (MoMath); Джефф Безос катається на квадратних колесах [4]

Партисипативний музей «Не торкатися заборонено» знаходиться в Буенос-Айресі (Аргентина). Створений у 1988 році і на сьогоднішній день його відвідали більше двох мільйонів людей. [5] У ньому розміщено понад 168 експонатів. Ця установа є центром досліджень, простором, створеним для поширення науки в ігровій формі та через безпосередню участь.

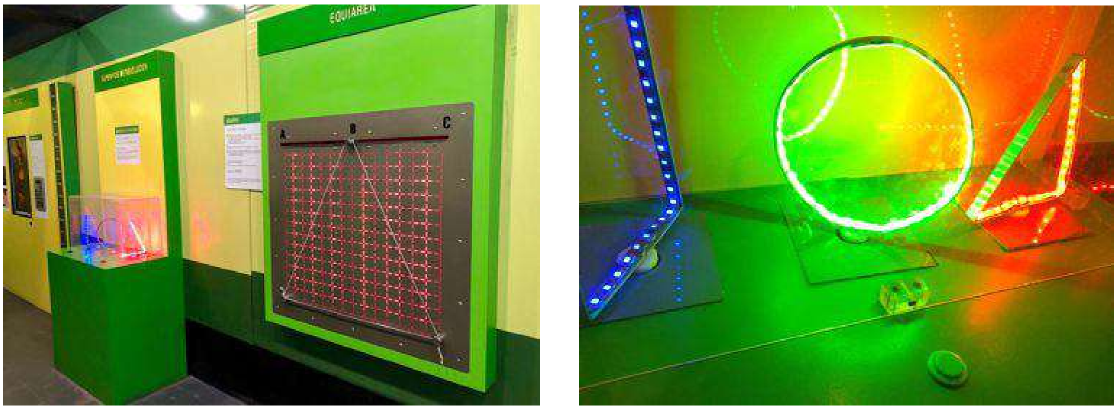


Рис. 4. Не вбивай мене математикою [5]

Музей невеликий, відкрився за підтримки ЮНЕСКО у ревіталізованому просторі і втілює головну ідею: знайомитися з наукою необхідно на дотик. Інтерактивні експонати заохочують цікавість відвідувачів, пропонуючи їм свободу гри та бажання дізнатися більше; відтворюють різноманітні явища, полегшують розуміння того, як ці явища відбуваються; стимулюють творчість і уяву, заохочують до відкриття. Найцікавіші експозиції музею: Не вбивай мене математикою, Сили природи, Візуальне сприйняття (оптичні ілюзії), Механіка, Не йдіть за потоком та ін. (рис. 4).

Дитячий музей у Чикаго відкрився в 1982 році в теперішньому Культурному центрі Чикаго (США) [6]. Після безлічі переїздів музей у 1995 році знайшов постійну домівку у відреставрованому будинку на морському пірсі. Кількість експонатів: 240. Кількість відвідувачів: 400 тис. на рік. Він орієнтований на наймолодших відвідувачів і навмисно створений для експериментів, творчості та навчання для всіх дітей. Експонати музею побудовані навколо ігор з водою, піском, конструкторами, коробками; проводяться різноманітні мистецькі програми, експерименти STEM, творчі ігри тощо. При цьому експозиції сповнені освітнього змісту. Найцікавіші серед них: Цілься високо, Небосхил, Лабораторія майстрування, Розбивач хмар, Водяне місто тощо (рис. 5).

Рис. 5. Прітцкерівський майданчик, Небосхил [6]

Музей математики у місті Приверно (Італія) відкритий в 2023 році [7]. Він розміщений у Палаццо Сан-Джорджо, одному з найстаріших і найпривабливіших в історичному центрі. Це переважно освітній музей і повністю присвячений математиці та її застосуванням. Експозиція виставки демонструє тісний взаємозв'язок абстрактних наукових концепцій з конкретними аспектами повсякденної реальності, розширюючи уявлення про безмежність взаємодій у навколишньому світі.

Найцікавіші експозиції музею: За межами циркуля: геометрія кривих (інтерактивна виставка, присвячена кривим, їх історії та внеску в науку, техніку та повсякденне життя), Піфагор і його теорема, Числа та рахунки у стародавніх шумерів та ін. (рис. 6).

Рис. 6. Експозиції музею [7]

Сад Архімеда: музей математики в місті Флоренція (Італія) [8] відкритий у 2004 році. Він присвячений математиці і спрямований на підвищення авторитету математики як науки, а також її популяризації серед дітей та юнацтва. У ньому розміщено три головні відділи: За межами циркуля: геометрія кривих, у якому за шкалою зростаючої складності описуються основні ідеї геометрії кривих, висвітлюється еволюція поняття кривої та показано використання кривих та їх властивості в різних моментах науки та техніки; Піфагор і його теорема, де подана низка математичних загадок, з якими знайомляться відвідувачі в прагненні заглибитись у пізнання геометрії; Міст через Середземне море (рис. 7).

Рис. 7. Експозиції музею; многогранники в рівновазі [8]

Математичний центр Математикум у місті Гіссен (Німеччина) [9]. Музей відкрито в кінці 2002 року. Загалом понад 150 тис. відвідувачів приходять до Математикуму щороку. У ньому відвідувачі можуть отримати математичний досвід приблизно на 200 експериментальних інтерактивних стендах під гаслом «Практична математика». Музей кожного сезону розробляє спеціальні виставки за темами, які пов'язані з математикою в більш або більш широкому значенні і дотримуються принципу «руки на думці, а серця ввімкнені». Крім того, регулярно відбуваються мистецькі виставки під девізом «Мистецтво в математиці». Найцікавіші експонати музею: створювати фігури на дзеркалах, імітувати геометричні тіла або відтворити міст Леонардо, експеримент з визначення числа Пі тощо (рис. 8).

Рис. 8. Конічні перерізи; Стежки Ейлера [9]

Математичний парк Рамануджан в Індії створений на честь видатного математика Шрініваси Рамануджана, який зміг довести, що для математичних відкриттів не обов'язково мати диплом престижного університету. Його інтуїція та глибоке розуміння чисел дозволили йому зробити видатні відкриття в теорії чисел. Його геніальні відкриття, зроблені без формальної математичної освіти, досі вражають науковців [10].

Математичний парк Рамануджан – це місце, де математика оживає через інтерактивні експонати, скульптури та ландшафтний дизайн. Відвідувачі парку можуть досліджувати формули Рамануджана, ознайомитися з історією математики, розв'язувати математичні головоломки та задачі, відпочивати в оточенні математичних форм (рис. 9).

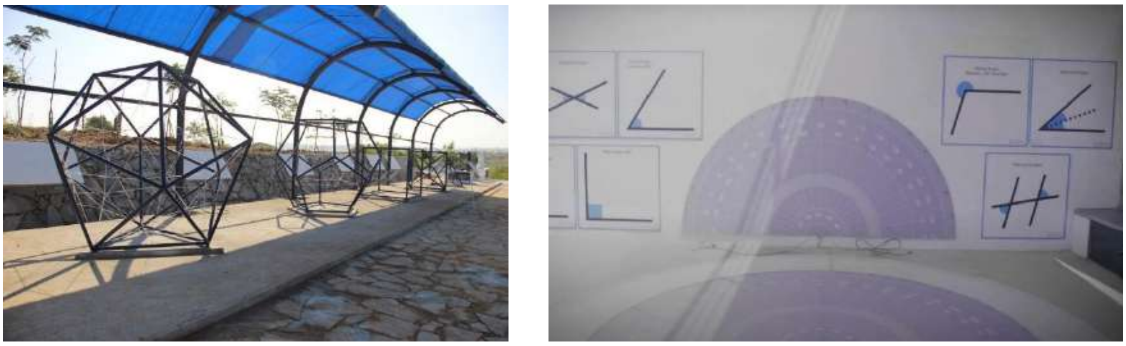


Рис. 9. Локації математичного парку Рамануджан [10]

Багато експонатів парку присвячені знаменитим формулам Рамануджана. Вони представлені у вигляді інтерактивних моделей, які дозволяють краще зрозуміти їх суть. Наприклад, це клумби у формі складних математичних функцій або лавки, що повторюють контури його рівнянь. Алеї в парку викладені так, що утворюють математичні патерни для створення відчуття руху і динаміки. Арки, візерунки на плитці та квіти в парку демонструють симетрію в математиці. Деякі формули Рамануджана описують об’ємні геометричні фігури. У парку представлені 3D-моделі цих фігур, які можна обертати і розглядати з різних ракурсів. Це допомагає відвідувачам візуалізувати складні математичні поняття. У парку є інсталяції, які перетворюють математичні формули в музику, що дозволяє відчути математику різними органами чуттів.

На спеціальних сенсорних панелях проєктуються формули Рамануджана. Доторкаючись до екрана, відвідувачі можуть бачити, як змінюються графіки функцій, що описуються цими формулами. Це дозволяє наочно продемонструвати як абстрактні числа можуть створювати складні і красиві візерунки. Інсталяції з використанням дзеркал створюють ефект нескінченності, що символізує безмежні можливості математики. У поєднанні з формулами Рамануджана такі інсталяції створюють вражаючий візуальний ефект.

Художник Террі Пулос у 2023 році в Чікаго представив виставку під відкритим небом «Танець Психеї». Одна зі скульптур Аполлопсихе Мелітея містить запатентовані фрактали Серпінського. Це суть ітерації фрактальних геометричних рядів і парадигми «багато з одного» космології Стандартної моделі Великого вибуху. Крім того, самка метелика Королева Олександрія має задні крила з трикутними візерунками, і тому скульптура зображує трикутник Серпінського, як оду фрактальній геометрії [11].

Перший державний «Музей науки» Малої академії наук України в Києві відкрито у 2020 році та розташований на території Виставки досягнень народного господарства (павільйон «Наука») [12]. Розміщено 120 експонатів. Із перших днів він входить до складу Міжнародної асоціації науково-технологічних центрів (ASTC). Завдяки співпраці Малої академії наук України (МАНУ) з ASTC в музеї з’явилися експонати з США, Канади, Великобританії, Швеції та Польщі. Музей повністю інтерактивний – з усіма експонатами можна взаємодіяти. Найцікавіші експонати музею: дивні матерії, триколісний велосипед з квадратними колесами, 3D-модель людського тіла, зона акустики та ін. (рис. 10).

Для МАНУ «Музей науки» – частина екосистеми. Тут діти можуть почати регулярні заняття на додаток до шкільної програми. Ті, хто захоче піти далі, зможуть долучитися до різних проєктів Малої академії наук. Із цією метою розроблені лабораторії, літні школи винахідників і стартаперів, олімпіади та міжнародні змагання. А завдяки міжнародному партнерству діти можуть потрапити до CERN або NASA, пройти стажування в найбільших наукових центрах світу.

Рис. 10. Велосипед з квадратними колесами, як у музеї в Нью-Йорку; міст Леонардо [12]

Навесні 2025 року в Києві відбулось відкриття першого і єдиного в Україні державного інтерактивного Музею математики «Кубоїд» Національного центру «Мала академія наук України». Мета музею – показати, як математичні закони працюють у природі, техніці та повсякденному житті. Тут відвідувачі можуть вивчати геометрію, алгоритми, теорію ймовірностей та інші математичні явища [13]. Музей розташований на двох поверхах і складається з 8 тематичних зон: Математика і повсякдення, Тесеракт, зали для занять, Маятники та вимірювання, Геометрія та механізми, Форми і формули, Простір креативності, Простір кмітливості (рис. 11).

Рис. 11. Експозиції музею: «Простір кмітливості», «Форми й формули» [13]

За задумом цей музей є четвертим у світі. Розробляли його кілька років у тісній співпраці з міжнародними партнерами, вивчаючи досвід найкращих математичних музеїв світу, щоб адаптувати ці ідеї до українського контексту. Зокрема, він має інноваційну лабораторію для підготовки вчителів математики. Готується до запуску інноваційний курс підвищення кваліфікації з десяти занять на яких вони матимуть можливість дізнатися про сучасні методики викладання, розширити педагогічний інструментарій та інтегрувати математику з іншими дисциплінами. Також тут планують проводити семінари, репетиторства та навчання педагогів, які працюватимуть з учнями, що зазнали освітніх втрат через пандемію та повномасштабне російське вторгнення. Для шкіл організовано унікальні освітні інтерактивні програми: «Математика в мистецтві та природі» – інтерактивна програма про симетрію, геометричні фігури, музичний розмір, художнє мистецтво, пропорції, картини Ешера та числа Фібоначчі; «Математика давніх цивілізацій» – захопливе тематичне заняття про математику Давнього Єгипту, золоте число, число пі, таємниці піраміди Хеопса (учні можуть власноруч зібрати її модель). Для сімей представлено наукові шоу, де математика оживає у яскравих експериментах та видовищних демонстраціях, під час яких можна побачити як числа, форми та закони природи працюють у реальному житті, відкрити для себе математичні явища в незвичному форматі.

Основне завдання ландшафтних музеїв – популяризувати науку. Не просто говорити, що наука це важливо, а показати, що це весело, цікаво, і є багато можливостей для самореалізації в освіті та науці. Це повністю змінює ставлення до наукових центрів і формує культуру, в якій наука справді становить велику цінність.

Музеї математики пояснюють складні явища на прикладі простих об’єктів, показують, як відкриття, формули й фундаментальні дослідження пов’язані з повсякденним життям. Із кожним експонатом можна взаємодіяти. Музеї організовують виїзні виставки, освітні розсилки й просвітницькі заняття.

Автори статті пропонують у місті чи в межах університетського середовища створювати математичний ландшафтний парк або його частину. У 2020 році ми розробили так званий Великий проєкт «Математичний сквер «Платонові тіла»» і взяли участь у конкурсі «Бюджет громадських ініціатив Вінницької міської об’єднаної територіальної громади» (м. Вінниця, Україна) [19]. За авторським баченням цей проєкт – унікальний арт-об’єкт математичного спрямування із зеленими насадженнями й універсальним кольоровим підсвічуванням. Він гармонійно поєднує в собі архітектурний комплекс із п’яти правильних многогранників, насичений різними креативними елементами публічного простору. На цих многогранниках розміщено спеціальні QR-коди та інформаційна підтримка, що дозволить мешканцям і гостям міста за допомогою цифрових технологій візуалізувати інформацію про цей об’єкт кількома мовами (рис. 12).

За задумом авторів статті реалізація такого проєкту стане важливою складовою у забезпеченні інтегрованого розвитку будь-якої територіальної громади та сприятиме створенню міста, в якому хочеться залишитись молоді, фахівцям, науковцям, бізнесу, туристам. [20]

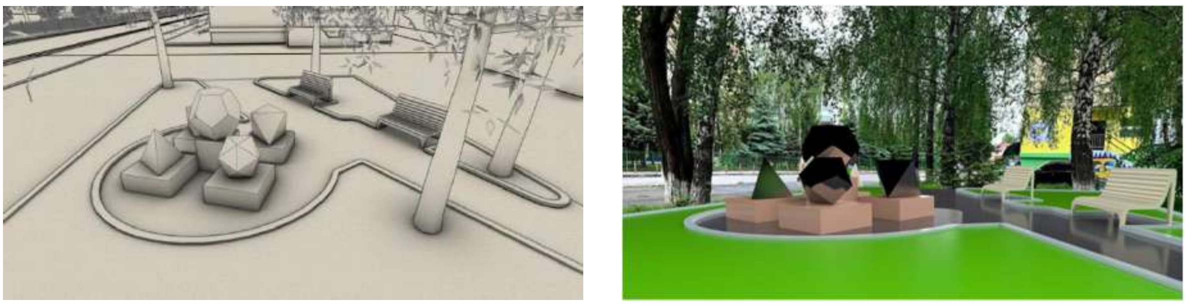


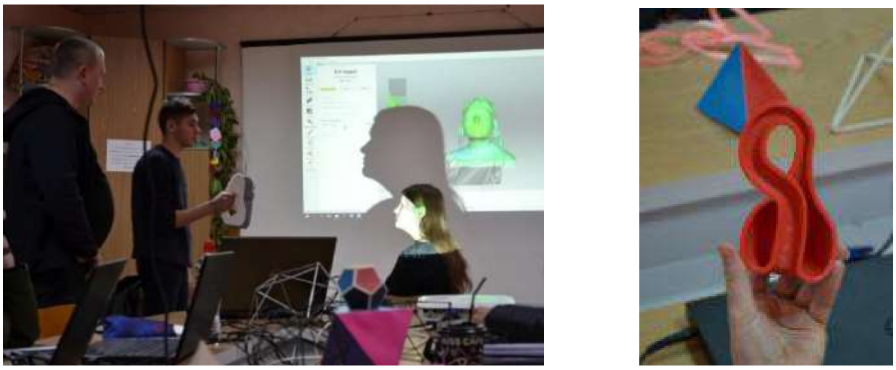
Рис. 12. 3D-модель математичного скверу «Платонові тіла» (авторська розробка)

Створення у місті, де знаходиться сучасний освітній осередок, ландшафтного математичного парку має багато переваг: збільшується привабливість міста для освітнього туризму; задоволення потреб молоді у відкритих культурних і освітніх просторах; популяризація математики серед мешканців і гостей міста; створення креативного і творчого середовища на території міста; візуалізація малих архітектурних форм публічного простору за допомогою цифрових технологій; підвищення привабливості міста для носіїв нових ідей, досвіду та знань; з’являється спокійний затишний куточок, який слугуватиме місцем відпочинку та естетичної насолоди мешканців.

За результатами засідання членами експертної групи Конкурсу наш проєкт отримав позитивну оцінку та був допущений до голосування. В результаті онлайн голосування проєкт підтримали 477 осіб, тому він поки не реалізований. Враховуючи карантинні обмеження, у 2020 році жителі Вінниці могли підтримати проєкти виключно в електронному вигляді за допомогою е-сервісу «Громадський бюджет».

Інший напрямок популяризації математичних парків – це створення віртуальних математичних освітніх парків за допомогою 3D моделювання та 3D друку і віртуальних навчальних лабораторій з великою кількістю павільйонів (див. рис. 1). [14]

3D-моделювання і 3D-друк віртуального математичного освітнього парку реалізує візуальну та інтерактивну складову навчання студентів в університеті. Віртуальні математичні тривимірні моделі можна обертати, переміщувати та масштабувати у цифровому 3D-просторі. У процесі роботи з моделлю студенти опановують основні способи створення й роботи з об'ємними моделями. У програмах для тривимірного моделювання доступно проєктування об'єктів на основі примітивів, полігонів, NURBS-кривих, кривих Безьє, метасфер, булевих операцій, Subdivision Surface. Є можливість завантажити створену математичну 3D-модель для редагування текстури, створити анімацію або надрукувати на 3D-принтері. Студенти набувають професійних компетентностей щодо роботи з програмами тривимірного моделювання для створення математичних моделей (рис. 13).



а) *б)*

Рис. 13. а) Цикл популярних лекцій з 3D-моделювання;
б) 3D-друкована пляшка Кляйна в розрізі

Автори статті вважають доцільним у підготовці бакалаврів математики та інформатики створення в університетах ландшафтних математичних парків мініатюр з аналітичної й диференціальної геометрії і топології, математичного та функціонального аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики, алгебри і теорії чисел, комп'ютерної математики, тривимірного моделювання тощо. Адже тут є великі можливості для математичного моделювання та навчально-дослідницької діяльності студентів, зокрема, моделювання тіл у просторі, обчислення площ поверхонь, об'ємів, маси тіла, центру маси тіла та інших фізичних величин. Упродовж навчання студент може формувати власний банк ліній і поверхонь та переглянути за необхідності створені демонстрації (рис. 14).

Практикуємо також проведення науково-методичного семінару «Цікава геометрія» (рис. 15) в процесі вивчення геометричних дисциплін «Аналітична геометрія», «Конструктивна геометрія», «Основи геометрії», «Неевклідові геометрії» та «Додаткові розділи геометрії». Під час засідань здобувачі вищої освіти презентували і захистили свої індивідуальні проєкти на різні теми «Правильні многогранники», «Пляшка Кляйна», «Лист Мебіуса», «Альбом ліній другого порядку, заданих у полярній системі координат», «Задачі на комбінації просторових тіл із сферою», «Задачі на побудову просторових тіл та їх перерізів» та ін.

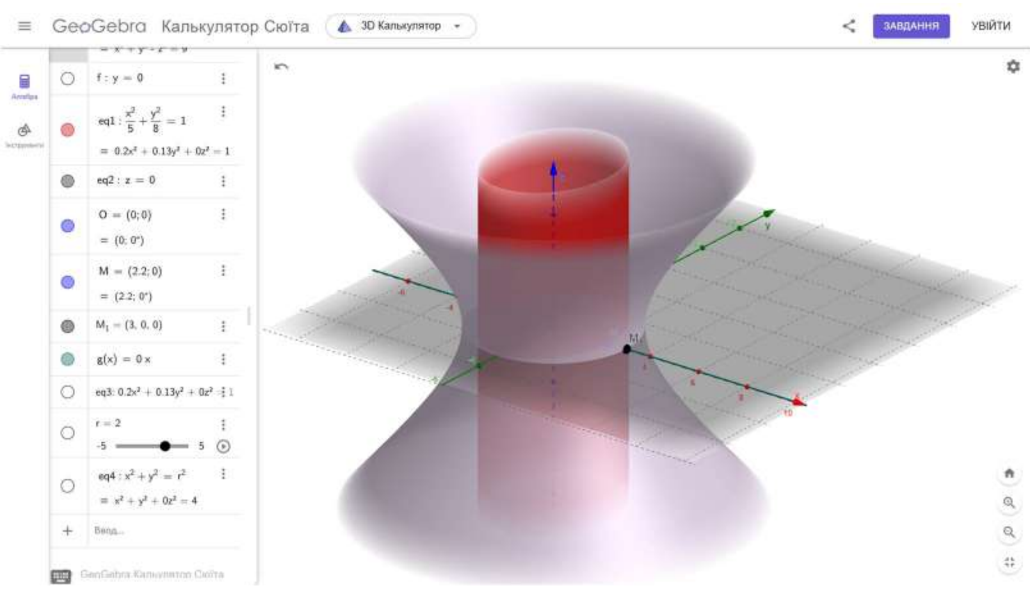


Рис. 14. Ілюстрація до задачі: довести, що однопорожнинний гіперболоїд гомеоморфний еліптичному циліндру

Здійснивши візуалізацію результатів досліджень із обраної ними тематики через інтерактивні презентації та відеоматеріали, графіки і схеми, власноруч створені стереометричні моделі правильних многогранників тощо. Студенти відповідально працювали над самостійними проєктами, під керівництвом викладача, а їх захисти проходили у захоплюючій, творчій, практичній атмосфері. При цьому вони демонстрували високий рівень математичної підготовки, аналітичного мислення та креативного підходу до розкриття тем, кмітливість і винахідливість. Особливий інтерес і захоплення викликали інтегровані проєкти, що поєднують геометрію з іншими математичними дисциплінами, а також із різними сферами діяльності, як от архітектура, мистецтво, інженерія тощо.

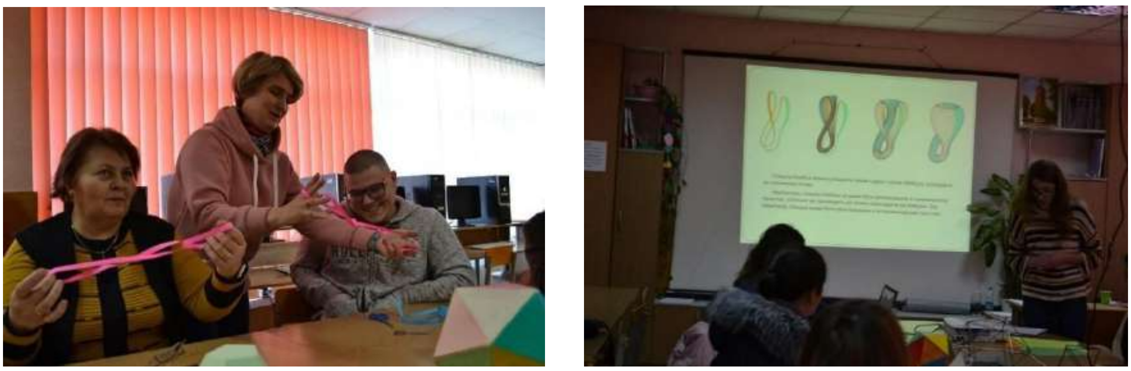


Рис. 15. Науково-методичний семінар «Цікава геометрія»

Метою вказаних проєктів є не лише перевірка теоретичних знань здобувачів освіти, а й розвиток практичних навичок розв’язування різноманітних задач та застосування їх у реальних життєвих ситуаціях, популяризація математичних знань, розкриття основних концепцій математичних дисциплін.

Такі заходи підвищують інтерес до вивчення математичних дисциплін; розширюють можливості для розвитку математичної та інформатичної компетентностей здобувачів освіти; активізують їхню пізнавальну діяльність; створюють платформу для активного обміну ідеями; підвищують загальну культуру здобувачів освіти і розвивають їхнє уміння спілкуватися з іншими; сприяють розвитку навичок публічного виступу, роботі в команді та формуванню наукового мислення, вмінню використовувати цифрові технології.

Автори статті пропонують створити унікальний навчальний простір – ландшафтний математичний парк мініатюр, де реальні моделі геометричних тіл доповнюються віртуальними інтерактивними елементами. На першому етапі цей проєкт передбачає створення студентами під керівництвом викладачів 3D-моделей. На другому етапі найкращі тривимірні моделі будуть надруковані на 3D-принтері та розміщені на території університету. Кожен експонат буде супроводжуватися QR-кодом, який спрямує відвідувача на вебсторінку з детальною інформацією про відповідне геометричне тіло. У рамках проєкту студенти візьмуть участь у створенні інноваційного освітнього математичного парку мініатюр просторових тіл.

Збір інформації про обізнаність та зацікавленість, освітню та дослідницьку цінність ландшафтних математичних парків, їх потенційні переваги та можливості використання зроблено у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського. В опитуванні взяли участь 66 студентів факультету математики, фізики і комп'ютерних наук за допомогою Google форми. Дослідження проводилося з максимальною увагою до приватності та конфіденційності респондентів з дотриманням етичних стандартів Американською асоціацією психологів (APA) [21] та вказівок Етичного кодексу ученого України [22].

На запитання «Чи чули ви раніше про ландшафтні математичні парки?» відповіли «Так» – 47%, «Ні» – 31,8%, «Не впевнені» – 21,2% тих, хто взяв участь в опитуванні.

На жаль ніхто з респондентів не мав можливості відвідати такі парки.

На запитання «Чи було б вам цікаво відвідати ландшафтний математичний парк?» відповіли «Так» – 62,1%, «Можливо» – 28,8%, «Важко відповісти» – 9,1% респондентів.

Результати опитування «Які елементи, на вашу думку, обов'язково повинні бути присутніми в ландшафтному математичному парку? (можна обрати декілька)» подані на рис. 16. Зауважимо, що студент магістратури доповнив запропонований перелік елементів, вказавши у пункті «Інша відповідь» курси підвищення кваліфікації.

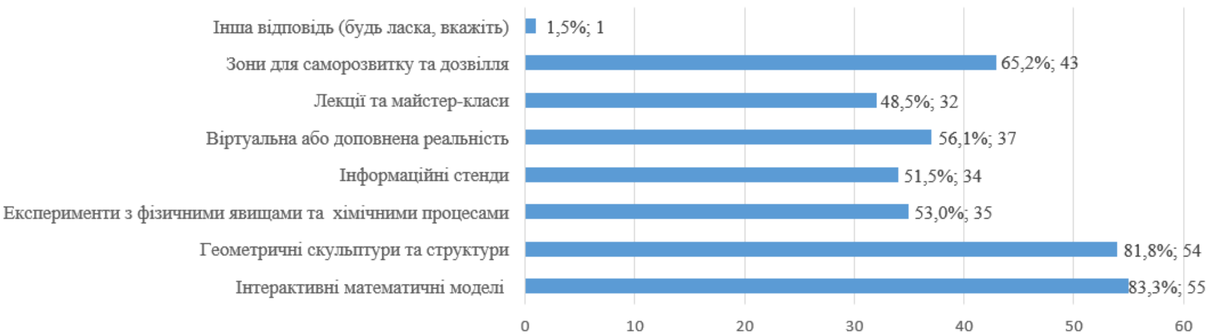


Рис. 16. Результати опитування «Які елементи, на вашу думку, обов'язково повинні бути присутніми в ландшафтному математичному парку? (можна обрати декілька)»

Відповіді студентів є актуальними авторам статті для побудови подальшої траєкторії розвитку математичного парку мініатюр в університеті та дослідження ландшафтних математичних парків загалом. Функціонування такого ландшафтного математичного парку мініатюр, в якому поєднані наука, технології та інновації, допоможуть нам створити краще майбутнє для суспільства та нашої планети, а також створити тривале захоплення наукою, надихнути учнів та студентів до творчості, науково-дослідницької діяльності та відкриттів. Завдяки цьому ми зможемо створити цікавіший, креативніший і стійкіший світ.

Висновки. У статті розглядаються проблеми розробки та реалізації освітнього математичного парку, який є складовою математичного парку, як платформи для математичного моделювання, наукових досліджень викладачів і студентів в університеті. Математичні парки – це дивовижні місця для прогулянок, де наука переплітається з мистецтвом і природою. Вони запрошують нас у своєрідний музей поглянути на звичні речі під новим кутом і відкрити для себе захопливий світ, де експонатами є математичні формули, теореми та об'єкти. Це також інтерактивний простір, де відвідувачі можуть досліджувати математичні концепції через мистецтво, ігри та інсталяції.

Авторами дано визначення математичних парків, здійснено їх класифікацію на ландшафтні і віртуальні освітні математичні парки, серед останніх виділено 3D-моделювання та 3D-друк і віртуальні математичні лабораторії.

Досліджено можливості та умови створення, розвитку та функціонування ландшафтних математичних парків та віртуальних освітніх лабораторій для популяризації, мотивації вивчення й практичного застосування знань у математичній освіті шляхом реалізації через інноваційні ресурси прикладних досліджень у галузі математики та інформатики.

Розглянуто особливості ландшафтних математичних парків у підготовці бакалаврів математики та інформатики. Показано, що їх функціонування забезпечує формування не тільки математичної та інформатичної культур майбутнього фахівця, а й формування таких базових компетентностей, як здатність і готовність до самонавчання, застосування знань, умінь і навичок роботи з системами комп'ютерної математики з елементами програмування для підвищення ефективності освіти, самоосвіти та професійної діяльності. Ідея авторів дозволяє гармонійно поєднати минуле й сьогодення: визначні здобутки математики візуалізувати засобами сучасних досягнень у галузі використання цифрових технологій в освіті. Збір інформації про обізнаність та зацікавленість, освітню та дослідницьку цінність ландшафтних математичних парків, їх потенційні переваги та можливості використання зроблено серед студентів факультету математики, фізики і комп'ютерних наук Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у створенні віртуального освітнього математичного парку як платформи для математичного моделювання, наукових досліджень та популяризації математики; у спорудженні на території університету ландшафтного математичного парку мініатюр, надрукованих на 3D-принтері, та його інформаційному супроводі; дослідженні впливу участі студентів у роботі віртуальних лабораторій на формування їхньої математичної, інформатичної та педагогічної культур.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. НМТ-2024: офіційний звіт за результатами проведення. *Український центр оцінювання якості освіти*. URL: https://testportal.gov.ua/nmt-2024-ofitsijnyj-zvit-za-rezultatamy-provedennya/
2. PISA-2022: Україна в центрі уваги: резюме досліджень 2024 року. *Український центр оцінювання якості освіти*. URL: https://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/12/PISA_2022_Ukrayina_v_czentri_uvagy_Rezyume_doslidzhen_2024_sajt_novyj.pdf
3. Ontario Science Center. URL: https://www.ontariosciencecentre.ca
4. National Museum of Mathematics (MoMath). URL: https://momath.org
5. Participatory Museum Do Not Touch Forbidden. URL: https://www.mpc.org.ar/home.htm
6. Chicago children's museum. URL: https://www.chicagochildrensmuseum.org

7. A Museum for Mathematics in Priverno. URL: https://www.museomatematicapriverno.it
8. Archimedes Garden: A Museum of Mathematics. URL: http://web.math.unifi.it/archimede
9. Mathematical center Mathematikum in the city of Giessen. URL: https://www.mathematikum.de
10. Virtual Ramanujan Math Park. URL: https://gyanome.org/ramanujan-maths-park/
11. Math created this art: Scientiquity's '23 outdoor sculpture. URL: https://scientiquity.com/2023/07/09/math-created-this-art-scientiquitys-23-outdoor-sculpture/
12. Перший державний «Музей науки» Малої академії наук України в Києві. URL: https://sciencemuseum.com.ua
13. Музей математики «Кубоїд». URL: https://mathmuseum.com.ua/
14. Ковтонюк М. М., Тютюн Л. А., Соя О. М., Косовець О. П. Віртуальний математичний освітній парк як інтелектуальний ресурс університету. *Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання*: матеріали Всеукр. наук.-практ. інтернет-конф. (м. Київ, 18-20 січня 2023 р.). Київ, 2023. С. 188-193.
15. Kovtoniuk M., Soia O., Turzhanska O., Kosovets O., Leonova I. The Modern STEM Center as a Perspective Educational Resource for Undergraduate Science and Mathematics Training. In *Proceedings of the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology - Volume 1: AET*, SciTePress, 2021. P. 658–674. DOI: http://dx.doi.org/10.5220/0012066800003431
16. Ковтонюк М. М., Соя О. М., Туржанська О. С. STEM-центр як освітній ресурс для організації навчання в контексті розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти). *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : збірник наукових праць. Вінниця : ТОВ«Друк плюс», 2021. Вип. 61. С. 46–55. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2021-61-46-55
17. Kovtoniuk M. M., Kosovets O. P., Soia O. M., Tyutyun L. A. Virtual learning environments: major trends in the use of modern digital technologies in higher education institutions. *Educational Technology Quarterly* [Online]. 2022 (3). P.183–202. DOI: https://doi.org/10.55056/etq.35
18. Великий тлумачний словник сучасної мови. URL: https://slovnyk.me/dict/vts/%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%BA
19. Великий проєкт «Математичний сквер «Платонові тіла»». URL: https://budget.e-dem.ua/Projects/16263/docs/%E2%84%9622%20%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf
20. Концепція інтегрованого розвитку м. Вінниці 2030. URL: https://www.vmr.gov.ua/intehrovanyi-rozvytok-mista
21. Ethical principles of psychologists and code of conduct (2002, amended effective June 1, 2010, and January 1, 2017). American Psychological Association . URL: https://www.apa.org/ethics/code
22. Етичний кодекс ученого України : Кодекс; НАН України від 15.04.2009 № 2. URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0002550-09#Text

UDC 712:51

Mathematical landscape parks as a platform for mathematical modeling, scientific research and popularization of mathematics

Liubov Tiutiun, Olena Kosovets, Olena Soia, Mariana Kovtoniuk

Abstract. The article is devoted to the problems of creation and functioning of a landscape mathematical park as an innovative platform for mathematical modeling, scientific research and popularization of mathematics. Mathematical parks are seen as unique spaces that combine scientific knowledge with aesthetic aspects, transforming mathematical concepts into interactive exhibits and art objects. The authors' idea allows to harmoniously combine the past and the present: to visualize the outstanding achievements of mathematics by means of modern achievements in the use of digital technologies in education.

The article studies math parks and classifies them. The authors have identified two main types: landscape (real) and virtual educational mathematical parks. The potential of innovative approaches to popularize mathematics among young people through the use of interactive teaching methods and applied research at the intersection of mathematics and computer science is studied.

The authors presented their own project «Platonic Solids Mathematical Park», which took part in the competition «Budget of Public Initiatives of Vinnytsia City United Territorial Community» (Vinnytsia, Ukraine).

The article investigates the specifics of using a landscape mathematical park in the process of training bachelors of mathematics and computer science. It is noted that such parks contribute not only to the formation of the mathematical culture of future specialists, but also to the development of key competencies, in particular

the ability to learn independently, to use knowledge effectively, and to work with computer mathematics systems and software for processing 3D graphics. This, in turn, increases the effectiveness of education, self-education, and professional activities of specialists.

We see prospects for further research in the creation of a virtual educational mathematical park as a platform for mathematical modeling and research; in the construction of a landscape mathematical park of miniatures printed on a 3D printer on the territory of the university and its information support; studying the impact of student participation in virtual laboratories on the formation of their mathematical, informatics and pedagogical culture.

Keywords: mathematical park, landscape mathematical park, mathematical modeling, scientific research, 3D modeling, 3D printing, popularization of mathematics.

References

1. *NMT-2024: an official report on the results of the conduct*, Ukrainian Center for Educational Quality Assessment. https://testportal.gov.ua/nmt-2024-ofitsijnyj-zvit-za-rezultatamy-provedennya/
2. *PISA-2022: Ukraine in the spotlight: summary of the 2024 research*, Ukrainian Center for Educational Quality Assessment. https://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/12/PISA_2022_Ukrayina_v_czentri_uvagy_Rezyume_doslidzhen_2024_sajt_novyj.pdf
3. Ontario Science Center. https://www.ontariosciencecentre.ca
4. National Museum of Mathematics (MoMath). https://momath.org
5. Participatory Museum Do Not Touch Forbidden. https://www.mpc.org.ar/home.htm
6. Chicago children's museum. https://www.chicagochildrensmuseum.org
7. A Museum for Mathematics in Priverno. https://www.museomatematicapriverno.it
8. Archimedes Garden: A Museum of Mathematics. http://web.math.unifi.it/archimede
9. Mathematical center Mathematikum in the city of Giessen. https://www.mathematikum.de
10. Virtual Ramanujan Math Park. https://imath.iiitb.ac.in/ramanujan-math-park
11. Math created this art: Scientiquity's '23 outdoor sculpture. https://scientiquity.com/2023/07/09/math-created-this-art-scientiquitys-23-outdoor-sculpture/
12. The first state «Science Museum» of the Small Academy of Sciences of Ukraine in Kyiv. https://sciencemuseum.com.ua
13. Museum of Mathematics «Cuboid». https://mathmuseum.com.ua/
14. Kovtoniuk, M. M, Soia, O. M., Kosovets, O. P. and Tiutiun, L. A. (2023). *Virtual mathematical educational park as an intellectual resource of the university*, Actual problems of physics, mathematics, computer science and methods of their teaching: materials of the All-Ukrainian scientific and practical Internet conference (Kyiv, January 18-20, 2023). Kyiv, 188–193. [in Ukrainian]. https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/3939
15. Kovtoniuk, M., Soia, O., Turzhanska, O., Kosovets O. and Leonova, I. (2021). *The Modern STEM Center as a Perspective Educational Resource for Undergraduate Science and Mathematics Training*, In Proceedings of the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology - Volume **1**: AET; SciTePress, 658-674. http://dx.doi.org/10.5220/0012066800003431
16. Kovtoniuk, M., Soia, O., Turzhanska, O. (2021) *STEM-center as an educational resource for organizing training in the context of the development of science and mathematics education (STEM-education)*. Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems : a collection of scientific papers, Druk Plus LLC, Vinnytsia, **61**, 46-55. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2021-61-46-55
17. Kovtoniuk, M. M., Kosovets, O. P., Soia, O. M., Tyutyun, L. A. (2022). *Virtual learning environments: major trends in the use of modern digital technologies in higher education institutions*, Educational Technology Quarterly [Online], 2022 (3), 183–202. https://doi.org/10.55056/etq.35
18. A large explanatory dictionary of the modern language. https://slovnyk.me/dict/vts/%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%BA
19. The large project «Platonic Solids Mathematical Park». https://budget.e-dem.ua/Projects/16263/docs/%E2%84%9622%20%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf
20. The concept of integrated development of Vinnytsia 2030. https://www.vmr.gov.ua/intehrovanyi-rozvytok-mista
21. Ethical principles of psychologists and code of conduct (2002, amended effective June 1, 2010, and January 1, 2017), American Psychological Association. https://www.apa.org/ethics/code
22. The Code of Ethics for Scientists of Ukraine. https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0002550-09#Text

Про авторів / About the authors

Любов Тютюн, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Liubov Tiutiun, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Косовець, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Kosovets, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Мар’яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 14.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 151–159.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 151–159.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 373.5.091.12:[005.963:51]

Програми підвищення кваліфікації учителів математики в Ізраїлі: проблеми та інновації

Аліна Воєвода[1], Алла Коломієць[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра алгебри і методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
alina.voievoda@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1844-6759

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра педагогіки і освітнього менеджменту, м. Вінниця, Україна
alla.kolomiiets@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-0536-0147

Анотація. У статті представлено результати аналізу сучасних тенденцій розвитку освіти Ізраїлю, зокрема здійснено ґрунтовний аналіз окремих програми підвищення кваліфікації учителів математики в Ізраїлі. Схема професійного розвитку вчителів після завершення навчання в закладах освіти і здобуття певного досвіду професійної діяльності була розроблена в Ізраїлі в межах освітньої реформи. Відповідно для того, щоб забезпечити високий рівень якості освітнього процесу, вчителі мають здійснювати навчання впродовж життя, адаптуватись до нових освітніх вимог, інтегрувати інноваційні методи навчання у власну діяльність, брати активну участь у професійних спільнотах, співпрацювати з колегами. Наведені у дослідженні факти свідчать, що програми підвищення кваліфікації учителів математики в Ізраїлі мають суттєві відмінності порівняно з українськими і заслуговують на вивчення досвіду їх організації та реалізації.

Зроблено висновок, що в системі освіти Ізраїлю є певні особливості, які варто розглянути з метою використання їх окремих принципів в українській системі післядипломної освіти. Встановлено, що важливою складовою є співпраця між освітніми установами, університетами та науковими центрами, що сприяє постійному оновленню знань вчителів відповідно до сучасних наукових досягнень.

Ключові слова: система освіти, Ізраїль, підготовка учителів математики, післядипломна освіта, програми підвищення кваліфікації.

1. Вступ

Глобалізація світового освітнього простору спонукає до аналізу та порівняння освітніх систем різних країн світу, зокрема тих, що значно відрізняються від української. Однією з таких є ізраїльська система освіти, що спрямована на підготовку молодого покоління до відповідального та гідного життя в демократичному суспільстві, де мирно співіснують люди різного етнічного походження, релігії, культури та політичних поглядів. В Ізраїлі нині докладається багато зусиль, щоб стандарти навчання в країні відповідали сучасним світовим тенденціям.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-06

Проблеми розвитку освіти в Ізраїлі досліджували як вітчизняні (А. Василюк, Д. Васильева, В. Громовий, М. Дреєрман, О. Карпенко, М. Міленіна, Д. Привалко, Л. Романюк, Ю. Руденко та ін.), так і зарубіжні дослідники (Д. Бітан, З. Гельман, Х. Давід, Н. Давидович, В. Лаві, Д. Менахем, Г. Хіллiг та ін.)

Д. Менахем провів комплексне дослідження, присвячене проблемам трансформації вищої освіти Ізраїлю в 90-ті роки XX – на поч. XXI століття. Автор детально характеризує три основні періоди реформування вищої освіти Ізраїлю: до проведення реформ (1924-1990 рр.); диверсифікації та інтернаціоналізації вищої освіти (1993-1998 рр.); трансформації освітньої політики в країні (поч. 2000-х років) [1].

2. Постановка проблеми

Теоретичний аналіз проблеми дав змогу визначити, що в Ізраїлі накопичено унікальний досвід реалізації змін в галузі освіти, розроблено і затверджено низку нормативних документів, які по-новому визначають цілі, зміст, завдання і стратегії розвитку освіти в XXI ст. Освітня система Ізраїлю перебуває на етапі структурних змін, що супроводжуються розробкою нових моделей підготовки майбутніх педагогів, а також програм підвищення кваліфікації учителів, адаптованих до актуальних викликів часу.

Впродовж останніх десятиліть Міністерство освіти Ізраїлю провело чисельні політичні дії та реформи на державному рівні, щоб підвищити статус професії вчителя. Ці ініціативи включали значні зусилля в процесі академізації, створення робочих груп і постійних комітетів для вирішення проблем, регулярне оновлення та коригування початкової навчальної програми для вчителів, механізми підтримки для нових кваліфікованих вчителів, постійний професійний розвиток для вчителів-практиків, включаючи ступінь магістра, програми коригування заробітної плати [2].

Обговорення професійного розвитку педагогів в Ізраїлі не можна відокремити від суспільної дискусії щодо нестачі вчителів. Варто зазначити, що ця дискусія в Ізраїлі є щорічною. Наприклад, у лютому 2011 року експерт із викладання математики надіслав листа до міністра освіти, в якому йшлося, що рівень математичної освіти школярів в Ізраїлі падає через гострий дефіцит кваліфікованих учителів математики та фізики [3]. У серпні 2016 року була опублікована ще одна тривожна стаття про вчительську кризу. Там згадуються кроки, які були вжиті через нестачу кадрів, зокрема, прийом на роботу студентів без належної підготовки для заміщення викладацьких посад, або викладання англійської мови учителем географії [4]. В липні 2022 року генеральний директор Міністерства освіти Ізраїлю Даліт Штаубер, описав гострий брак учителів і закликав уряд прискорити підписання угод про оплату праці з викладачами [5].

Останнім часом подібні проблеми з’явились і в українському освітньому просторі. Тому досвід Ізраїлю з вирішення вказаних проблем є цікавим для вивчення, аналізу та адаптації до українських реалій.

Мета статті полягає в аналізі окремих програм підвищення кваліфікації учителів математики в Ізраїлі, розгляді сучасних тенденцій розвитку післядипломної освіти в Ізраїлі.

3. Основні результати

У 80-90-х роках минулого століття в Ізраїлі почала здійснюватися перебудова системи вищої освіти. У 1992 році Парламентом Ізраїлю (Кнесетом) був прийнятий «Закон про вищу освіту», в якому вказувались, зокрема, й головні напрями реформування системи вищої педагогічної освіти Ізраїлю:

- створення державно-регіональної системи вищої освіти;
- розробка і впровадження стандартів вищої освіти;
- реалізація ідеї поетапної підготовки педагогічних кадрів;

- введення підготовки фахівців-педагогів інтегративного профілю за спеціальностями: педагог-технолог, соціальний педагог-психолог, педагог-організатор освіти, педагог-реабілітолог;
- інтеграція академічної загальнонаукової підготовки студентів з професійно-педагогічною як паралельних структур освіти [6, с.236].

Унаслідок реалізації «Закону про вищу освіту» в Ізраїлі наприкінці XX ст. відбулися зміни у співвідношенні між університетами і фаховими закладами освіти. В період з 1992 до 1995 року було відкрито 43 навчальних заклади, які за законом мали статус акредитованого закладу вищої освіти і одержали права надавати своїм випускникам академічні ступені [7, с.12]. Критерії вступу до педагогічних коледжів були переглянуті в 2004 році. Тест на здібності, який складали абітурієнти при вступі в університет, замінили на іспит «саф», який використовувався виключно в педагогічних коледжах [8].

Унаслідок реалізації «Закону про вищу освіту» в Ізраїлі наприкінці XX ст. відбулися зміни у співвідношенні між університетами і фаховими закладами освіти. В період з 1992 до 1995 року було відкрито 43 навчальних заклади, які за законом мали статус акредитованого закладу вищої освіти і одержали права надавати своїм випускникам академічні ступені [7, с.12]. Критерії вступу до педагогічних коледжів були переглянуті в 2004 році. Тест на здібності, який складали абітурієнти при вступі в університет, замінили на іспит «саф», який використовувався виключно в педагогічних коледжах [8].

Нові рекомендації переглянули параметри щодо структури, тривалості навчання, кількості навчальних годин, академічного змісту та відносної ваги різних компонентів у педагогічній освіті. Серед помітних змін було розширення практичної підготовки та наголос на узгодженості між дисциплінарними та педагогічними курсами. Однак головною зміною стало додавання нової п’ятирічної програми. Це поєднує в собі трирічний B.Ed. з дворічним ступенем магістра освіти [9].

Нині майбутні вчителі математики в Ізраїлі можуть здобувати освіту в академічних педагогічних коледжах, яких на початок 2024 року нараховувалось 18: 7 єврейських івритомовних світських коледжів, 8 єврейських івритомовних релігійних коледжів і 3 арабських арабомовних коледжі. В педагогічних колеждах готують понад 90% майбутніх педагогів за двома моделями:

- за чотирирічною програмою, що дає ступінь бакалавра освіти (B.Ed.) разом із дипломом учителя,
- за однорічною програмою післядипломної педагогічної освіти (на базі здобутого раніше ступеня бакалавра науки (B.Sc) в університеті або академічному коледжі) хоча в обмеженому обсязі, з річним випуском менше 10% від загальної кількості випускників-педагогів.

Крім того, є кілька неакадемічних ультраортодоксальних вчительських семінарій, випускники яких викладають виключно в незалежних ультраортодоксальних закладах освіти [10].

У той час як базова освіта закладає основу професійної діяльності, безперервний розвиток учителів забезпечує засоби для покращення якості їх роботи з часом.

З 2003 року Радою вищої освіти Ізраїлю було введено вимогу, що окрім освітнього ступеня бакалавра чи магістра, сертифікату викладача, вчителі мають успішно пройти випробувальний термін (перший рік викладання), перш ніж вони зможуть одержати ліцензію на викладання. У випробувальний рік молодим педагогам для полегшення вступу в професію надається суттєва підтримка: кожному вчителю-початківцю дирекція школи має призначити наставника з кола досвідчених колег; молодий педагог має брати участь у щорічному семінарі, організованому коледжем. Наприкінці випробувального року вчитель-початківець має пройти формувальну та підсумкову оцінку, яку здійснює директор школи. Ця оцінка визначає одержання ліцензії наприкінці першого року роботи [11].

Для підтримки молодих вчителів у 2008 році Міністерство освіти Ізраїлю започаткувало програму реформ «אופק חדש» («Новий горизонт») [12] для вчителів початкової та середньої школи. Основні особливості реформи включали:

- нову сітку заробітної плати, яка підвищила зарплати для вчителів-початківців і дозволила досвідченим учителям заробляти більше за додаткові години;
- більшу автономію та повноваження директорів, які мали отримувати оплату за окремою шкалою заробітної плати;
- перевизначення робочого часу вчителів для включення батьківських зборів, додаткових занять та часу для підготовки та оцінювання робіт (за умови, що вчителі виконуватимуть цю роботу на території школи) [13].

Реформу було впроваджено, проте й досі навколо неї точаться суперечки в ізраїльському освітньому просторі [14] .

Схема професійного розвитку вчителів після завершення навчання в закладах освіти і здобуття певного досвіду професійної діяльності була розроблена в Ізраїлі в межах освітньої реформи. Відповідно щоб забезпечити високий рівень якості освітнього процесу вчителі повинні здійснювати навчання впродовж життя, адаптуватись до нових освітніх вимог, інтегрувати інноваційні методи навчання у власну діяльність, брати активну участь у професійних спільнотах, співпрацювати з колегами [15].

Починаючи з 2000 року вчителям-практикам було запропоновано широкий спектр курсів підвищення кваліфікації та семінарів, які проводили різні інститути та організації, зокрема спеціальні педагогічні центри під керівництвом Міністерства освіти по всій країні, вищі навчальні заклади, громадські організації та приватні комерційні структури.

Хоча участь у цих заходах підвищення кваліфікації не була обов’язковою, багато вчителів брали в них участь, оскільки це гарантувало підвищення зарплатні. Дані за 2000 рік показують, що 110 000 вчителів взяли участь у 13 000 курсах підвищення кваліфікації, в середньому 150 годин на рік на учасника [16].

Національне дослідження, проведене в 2008 році, виявило, що 30% курсів підвищення кваліфікації, які проходили вчителі, стосувалися дисциплін, які вони викладають, 30% були зосереджені на методах викладання та різних питаннях з педагогіки, 15% охоплювали різноманітні загальноосвітні теми, 15% були спрямовані на формування навичок для роботи на керівних посадах, а 10% були спрямовані на інші напрямки [17].

Міністерство освіти Ізраїлю активно заохочувало вчителів-практиків продовжувати навчання. Це включає надання підтримки в оплаті навчання за магістерськими програмами та надання низки короткострокових курсів і семінарів. В результаті такої освітньої політики відсоток учителів, які мають другу вищу освіту, значно зріс з 25% у 2012 році до 43% у 2024 році [18].

Курси підвищення кваліфікації включали різні формати навчання: курси регіональних центрів для вчителів, спільноти практики під керівництвом досвідчених вчителів [19], мікрокредитні курси та масові відкриті онлайн-курси [20]. Цей набір варіантів професійного розвитку був розроблений для задоволення різноманітних потреб окремих учителів, одночасно сприяючи освітнім і професійним змінам у шкільній системі. Він базувався на розумінні того, що постійний розвиток знань і навичок впродовж усього професійного життя педагогів-практиків є життєво важливим для підтримки якісного викладання в системі освіти. У рамках цієї реформи було зазначено, що процедура підвищення кваліфікації має формувати знання та вміння вчителів, а також включати теоретичну, особистісно-емоційну та практичну складові.

Так, до прикладу, національними центрами вчителів математики початкової та середньої школи у Хайфі керує команда з Департаменту математичної освіти Хайфського університету, а їхня діяльність контролюється Міністерством освіти Ізраїлю [21]. Відповідно до подвійної приналежності центри будують міцні мости між науковими дослідженнями в галузі математичної освіти та педагогічною практикою в школах по всій країні.

Опишемо структуру та діяльність, що є центральною для двох центрів, і надамо деякі приклади програм, запропонованих центрами.

Однією з таких програм є 2-річна програма підвищення кваліфікації під назвою «Вчителі, які ініціюють та впроваджують освітні програми», призначена для розвитку освітніх ініціатив як засобу розвитку інноваційного, актуального та прикладного мислення.

Відповідно до плану політики, розробленого Міністерством освіти (2014), освітня ініціатива може включати будь-яку сферу освітньої діяльності, що підходить вчителям і може застосовуватися впродовж навчального року. Наприклад: розробка та впровадження навчального блоку; розробка та впровадження соціального впливу на учнів у класі тощо.

Модель програми визначає та надає способи оцінки семи можливих проблем, пов’язаних з інновацією [22]:

1. **Усвідомлення** – розуміння необхідності змін та зацікавленість ними. На цьому етапі вчителі часто зосереджені на інших важливих питаннях, які потребують їхньої уваги.
2. **Інформаційний інтерес** – з’являється бажання дізнатися більше про зміни, їхні особливості та способи впровадження. Вчителі починають активно шукати відповідну інформацію.
3. **Особисті мотиви** – виникають сумніви щодо вимог змін, тривожність щодо нових ролей, які доведеться виконувати, а також інтерес до можливих стимулів і особистих вигод від змін.
4. **Управління** – фокус на практичному впровадженні змін. Вчителів турбує ефективність процесу, організація роботи та оптимальне використання ресурсів.
5. **Наслідки** – увага зміщується на оцінку впливу змін на результати учнів, зокрема їхні навчальні, соціальні та емоційні досягнення.
6. **Співпраця** – виникає потреба у взаємодії з колегами, спільній роботі та координації дій. Вчителі аналізують досвід колег у впровадженні змін і шукають можливості для спільної роботи.
7. **Перефокусування** – вчителі оцінюють ефективність змін, їхні наслідки та розглядають можливість коригування підходів для досягнення кращих результатів.

Програма «Вчителі, які ініціюють та впроваджують освітні програми» базується на трьох осях, що складають концептуальну та змістову основу для розвитку різноманітних ініціатив у сфері навчання математики:

1. Ознайомлення з новими навчальними матеріалами та формування досвіду роботи з ними, концентрація на різних принципах та аспектах провідних ініціатив у системі освіти, забезпечення умов для реалізації ініціатив у сфері навчання математики.
2. Поглиблення знань з геометрії із одночасною інтеграцією геометричних і алгебраїчних зв'язків. Розширення знань педагогічного змісту, пов'язаних з вивченням когнітивних та емоційних аспектів навчання математики.
3. Формування шкільної математичної команди, яка функціонує як навчальна, робоча та ініціативна спільнота в математиці, що одночасно координує та встановлює зв’язки для діяльності учнів в математиці та інших сферах.

Загалом програма складалася з 150 годин, розподілених на два роки. Впродовж кожного року програма включала 45 годин теоретичних занять, а також 30 годин підтримки та тьюторства: п'ятнадцять годин з них були присвячені роботі в малих групах (10 годин індивідуальних консультацій та 5 годин групових консультацій), а 15 годин - написанню ініціатив, тобто учителі математики самі пропонували власне бачення якісних змін у навчанні учнів математики.

На нашу думку, саме написання ініціатив дозволяє учителям математики не лише вдосконалювати професійні навички, а й ставати ініціаторами змін у сучасній освіті. Подібний підхід варто запровадити і в Україні, щоб українські вчителі також були долучені до обговорення і розробки навчальних програм та відчували, що їхньої думки дослухаються.

Ще однією надзвичайно цікавою ініціативою, покликаною сприяти постійному професійному розвитку учителів в Ізраїлі, є так званий «Суботній рік». У 1962 році уряд затвердив рік відпустки зі збереженням заробітної плати на рівні 80% для всіх вчителів, які мають постійне місце роботи та не менше семи років педагогічного стажу як спосіб запобігти професійному виснаженню та утримати вчителів у професії. Період тайм-ауту не є обов'язковим, проте за бажанням учителі можуть використати його щоб навчатися, відновлювати сили та зв'язок зі своєю професією [23]. Загалом річна відпустка критично важлива для підтримки якості викладання та психологічного здоров'я вчителів. Ізраїльський досвід показує, що поєднання відпочинку та професійного розвитку в період «Суботнього року» є ефективним способом підвищення якості освіти.

В Україні, на жаль, нині відсутня змога реалізувати таку ініціативу. Проте, на нашу думку, варто розглянути можливість впровадження подібної практики або її адаптації до вітчизняної освітньої системи.

Підсумовуючи сказане видається доречним процитувати знаного ізраїльського педагога Л. Шульмана: «Якщо дослідження педагогічної освіти мають суттєве значення, ми повинні взяти на себе нові наукові зобов'язання. Довгострокові програми, які регулярно впроваджуються в підготовці та підвищенні кваліфікації вчителя, мають стати нормою…» [24 с. 253].

Висновки. Система підвищення кваліфікації вчителів математики в Ізраїлі демонструє інноваційний підхід до професійного розвитку педагогів. Поєднання традиційних методів навчання з сучасними технологіями, інтеграція міждисциплінарного підходу та акцент на розвиток математичного мислення учнів роблять цей досвід унікальним.

Окрім цього, важливою складовою є співпраця між освітніми установами, університетами та науковими центрами, що сприяє постійному оновленню знань вчителів відповідно до сучасних наукових досягнень. Також значна увага приділяється психологічному аспекту викладання, що допомагає створити позитивне навчальне середовище та мотивувати учнів до вивчення математики.

Досвід Ізраїлю підтверджує, що безперервний розвиток учителів безпосередньо впливає на якість освіти та рівень знань школярів. Це може стати цінним прикладом для освітніх систем інших країн, які прагнуть до підвищення ефективності навчального процесу.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Menahem G. The Transformation of Higher Education in Israel since the 1990s: The Role of Ideas and Policy Paradigms. *Governance: An International Journal o f Policy, Administration, and Institutions*. 2008. DOI: https://doi.org/10.1111/J.1468-0491.2008.00411.X
2. Воєвода А.Л. Перспективи розвитку освітньої системи держави Ізраїль у XXI столітті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* 2023. Вип. 70. С. 15–24. URL: https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5564
3. Nachum Blass. Achievements in Israel's Education System: An Overview.2022. URL: https://www.taubcenter.org.il/wp-content/uploads/2022/12/Education-Overview-ENG-2022.pdf
4. Trabelsi-Hadad, T. Bennett to Push for Better English Education. Ynetnews.com, July 10. 2017. URL: http://www.ynetnews.com/articles/0,7340,L-4826289,00.html

5. On September 1, there won't be any more teachers Around 600 teachers left the school system during the past year, Education Min. Director General says. *Israel National News*. Mar 11, 2022 URL: https://www.israelnationalnews.com/news/323746
6. Воєвода А.Л., Матяш О.І., Михайленко Л.Ф. Трансформаційні процеси у нормативно-правових засадах розбудови системи педагогічної освіти Ізраїлю. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. 2022. Вип. 64. С. 233-242. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2022-64-233-242
7. The Higher Education System in Israel. Coord. and ed.: Hava Klein-Avishai, Michal Ophir and Yelena Krol. Jerusalem, 75. 2014. URL: http://che.org.il/wpcontent/uploads/2012/05/HIGHEREDUCATION-BOOKLET.pdf
8. Dror Y. Three Decades of Teacher Education in Israel and Their Impact on Professional Development of Teacher Educators. *In Embracing the Social and the Creative: New Scenarios for Teacher Education*. 2013. P. 35–56.
9. Maskit D. Teachers' attitudes towards pedagogical changes and teachers' perception of teaching as a profession.*Teaching and Teacher Education*. 2011. Vol. 27, No. 5. P. 851–860. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2011.01.009
10. Zuzovsky R., Donitsa-Schmidt S., Trumper R., Arar K., Barak J. Post-Qualification Master's Level Studies in Israel Teacher Colleges: A Transmissive or a Transformative Model of Professional Development?". *Professional Development in Education*. 2019. Vol. 45, No. 4. P. 670–683. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/19415257.2018.1490916
11. Nasser-Abu Alhija F., and B. Fresko. Socialization of New Teachers: Does Induction Matter? *Teaching & Teacher Education*. 2010. Vol. 26, No. 8. P. 1592–1597. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2010.06.010
12. Ministry of Education. Ofek Hadash"- professional development of seniorteachers (rank 7-9). Jerusalem: Ministry of Education, Administration of training, in-service courses and promotion of educational-social equality. 2018. [in Hebrew]. URL: http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/PituachMiktzoie/meyda/Pito achMikzoei7-9/
13. Zelikovitz Y. M. Union of elementary schools teachers:“Ofek Hadash” reform failed (Hebrew). Ynet. Retrieved August 31. 2009. URL: http://www.ynet.co.il/articles/1,7340,L-3690306,00.html
14. Cohen A., Caspar L. Individual Values, Organizational Commitment, and Participation in a Change: Israeli Teachers' Approach to an Optional Educational Reform. Springer Nature. *Journal of Business and Psychology*. September. 2011. Vol. 26, No. 3. P. 385–396. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s10869-010-9186-1
15. Schuepbach M. Extended Education: Professionalisation and Professionalism of Staff. International *Journal for Research on Extended Education*. 2016. Vol.4, No. 1. P. 5–8.
16. Zuzovsky R. and S. Donitsa-Schmidt. Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers: School of Education, Science and Technology Education Center. Tel-Aviv: Tel-Aviv University. 2004.
17. Vorgan Y. Teachers' In-Service Training in Israel. Jerusalem: The Knesset Research Center. 2008. [in Hebrew].
18. Central Bureau of Statistics. Statistical Almanac for Israel No. 75. Jerusalem: CBS. 2024. URL: https://www.gov.il/en/departments/central_bureau_of_statistics/govil-landing-page
19. Avidov-Ungar O., and R. Reingold. "Israeli ministry of Education's district managers' and superintendents' role as educational leaders –implementing the new policy for teachers' professional development"." *International Journal of Leadership in Education*. 2018. Vol. 21, No. 3. P. 293–309. URL: https://eric.ed.gov/?id=EJ1174560
20. Ministry of Education. 2024. Professional Development of Teachers. Accessed September 6, 2024. URL: https://poh.education.gov.il/professional-development/instructors/micro-credentials-courses/
21. Donitsa-Schmidt S. Teacher education in Israel: a fifty-year journey (1974–2024). Received 21 Jul 2024. P. 816-833. DOI: https://doi.org/10.1080/02607476.2024.2411963
22. Levi-Keren M., Patkin D. Mathematics Teachers' Professional Development Program - Needs and Expectations. International Journal for mathematics teaching and learning. 2016. Vol. 31. P. 1–33. DOI: http://dx.doi.org/10.4256/ijmtl.v17i1.8
23. Encyclopedia timss. Israel. Teachers, teacher education and professional development. URL: https://ti:mssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/israel/teachers-teacher-education-and-professional-development/
24. Shulman L. S. Truth and consequences? Inquiry and policy in research on teacher education. *Journal of Teacher Education*. 2002. Vol. 53, No. 3. P. 248–253.

UDC 373.5.091.12:[005.963:51]

In-service training programs for mathematics teachers in Israel: problems and innovations

Alina Voievoda, Alla Kolomiiets

Abstract. The article presents the results of the analysis of current trends in the development of education in Israel, in particular, a thorough analysis of individual in-service training programs for mathematics teachers in Israel. As part of the educational reform in Israel, a scheme of in-service training for teachers after graduation and gaining certain professional experience was developed. Accordingly, in order to ensure a high level of quality of the educational process, teachers should carry out lifelong learning, adapt to new educational requirements, integrate innovative teaching methods into their own activities, actively participate in professional communities, and collaborate with colleagues. The facts presented in the study indicate that the in-service teacher training programs in Israel have significant differences compared to those in Ukraine and deserve to be studied in terms of their organization and implementation.

It is concluded that there are certain features of the Israeli education system that should be taken into account in order to use their individual principles in the Ukrainian system of postgraduate education. It is established that an important component is the cooperation between educational institutions, universities and research centers, which contributes to the constant updating of teachers' knowledge in accordance with modern scientific achievements.

Keywords: Israeli education system, training of mathematics teachers, in-service training programs.

References

1. Menahem, G. (2008). The Transformation of Higher Education in Israel since the 1990s: The Role of Ideas and Policy Paradigms. Governance: An International Journal o f Policy, Administration, and Institutions. https://doi.org/10.1111/J.1468-0491.2008.00411.X
2. Voievoda, A. L. (2023). *Prospects for the development of the education system of the State of Israel in the XXI century,* Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems, **70**, 15–24. [in Ukraine]. https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5564
3. Nachum, Blass. *Achievements in Israel's Education System: An Overview.2022.* https://www.taubcenter.org.il/wp-content/uploads/2022/12/Education-Overview-ENG-2022.pdf
4. Trabelsi-Hadad, T. (2017). *Bennett to Push for Better English Education*, Ynetnews.com. http://www.ynetnews.com/articles/0,7340,L-4826289,00.html
5. On September 1, there won't be any more teachers Around 600 teachers left the school system during the past year, Education Min. Director General says. Israel National News. Mar 11, 2022. https://www.israelnationalnews.com/news/323746
6. Voievoda, A. L., Matiash, O. I., Mykhailenko, L. F. (2022). *Transformational processes in the regulatory and legal framework for the development of the system of pedagogical education in Israel*, Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems, **64**, 233–242. [in Ukraine]. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2022-64-233-242
7. Klein-Avishai, H., Ophir, M., Krol, Y. (2014). *The Higher Education System in Israel*, Jerusalem. http://che.org.il/wpcontent/uploads/2012/05/HIGHEREDUCATION-BOOKLET.pdf
8. Dror, Y. (2013). *Three Decades of Teacher Education in Israel and Their Impact on Professional Development of Teacher Educators*, In Embracing the Social and the Creative: New Scenarios for Teacher Education, 35–56.
9. Maskit, D. (2011). *Teachers' attitudes towards pedagogical changes and teachers' perception of teaching as a profession,*Teaching and Teacher Education, **27** (5), 851–860. http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2011.01.009
10. Zuzovsky, R., Donitsa-Schmidt, S., Trumper, R., Arar, K., Barak, J. (2019). *Post-Qualification Master's Level Studies in Israel Teacher Colleges: A Transmissive or a Transformative Model of Professional Development?"*, Professional Development in Education, **45** (4), 670–683. http://dx.doi.org/10.1080/19415257.2018.1490916
11. Nasser-Abu Alhija, F., Fresko, B. (2010). *Socialization of New Teachers: Does Induction Matter?"*, Teaching & Teacher Education, **26** (8), 1592–1597. http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2010.06.010

12. Ministry of Education. Ofek Hadash"- professional development of seniorteachers (rank 7-9). Jerusalem: Ministry of Education, Administration of training, in-service courses and promotion of educational-social equality. 2018. [Hebrew]. http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/PituachMiktzoie/meyda/PitoachMikzoei7-9/
13. Zelikovitz, Y. M. (2009). *Union of elementary schools teachers: "Ofek Hadash" reform failed (Hebrew),* Ynet. http://www.ynet.co.il/articles/1,7340,L-3690306,00.html.396
14. Cohen, A., Caspar, L. (2011). *Individual Values, Organizational Commitment, and Participation in a Change: Israeli Teachers' Approach to an Optional Educational Reform*, Springer Nature, Journal of Business and Psychology, **26** (3), 385–396. https://link.springer.com/article/10.1007/s10869-010-9186-1
15. Schuepbach, M. (2016). *Extended Education: Professionalisation and Professionalism of Staff*, International Journal for Research on Extended Education, **4** (1), 5–8.
16. Zuzovsky, R., Donitsa-Schmidt, S. (2004). *Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers: School of Education, Science and Technology Education Center*, Tel-Aviv University, Tel-Aviv.
17. Vorgan, Y. (2008). *Teachers' In-Service Training in Israel*, The Knesset Research Center, Jerusalem. [in Hebrew]
18. Central Bureau of Statistics. Statistical Almanac for Israel No. 75. Jerusalem: CBS.. 2024. https://www.gov.il/en/departments/central_bureau_of_statistics/govil-landing-page
19. Avidov-Ungar, O., Reingold R. (2018). *Israeli ministry of Education's district managers' and superintendents' role as educational leaders –implementing the new policy for teachers' professional development*, International Journal of Leadership in Education, **21** (3), 293–309. https://eric.ed.gov/?id=EJ1174560
20. Ministry of Education. 2024. Professional Development of Teachers. Accessed September 6, 2024. [in Hebrew]. https://poh.education.gov.il/professional-development/instructors/micro-credentials-courses/
21. Donitsa-Schmidt, S. (2024). *Teacher education in Israel: a fifty-year journey (1974–2024),* Received 21 Jul 2024, 816–833. https://doi.org/10.1080/02607476.2024.2411963
22. Levi-Keren M., Patkin D. (2016). *Mathematics Teachers' Professional Development Program - Needs and Expectations*, International Journal for mathematics teaching and learning, **31**, 1–33. http://dx.doi.org/10.4256/ijmtl.v17i1.8
23. Encyclopedia timss. Israel. Teachers, teacher education and professional development. https://ti:mssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/israel/teachers-teacher-education-and-professional-development/
24. Shulman, L. S. (2002). *Truth and consequences? Inquiry and policy in research on teacher education*, Journal of Teacher Education, **53** (3), 248–253. [in Hebrew]

Про авторів / About the authors

Аліна Воєвода, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Alina Voievoda, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Алла Коломієць, доктор педагогічних наук, професор, кафедра педагогіки і освітнього менеджменту, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Alla Kolomiiets, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Pedagogy and Educational Management, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 10.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 160–168.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 160–168.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.147.091.33-028.16/.21:514.122

Усні вправи з аналітичної геометрії як засіб формування професійних компетентностей

Ольга Кравчук

Волинський національний університет імені Лесі Українки
кафедра математичного аналізу та статистики, м. Луцьк, Україна
olikr57@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-3828-7783

*Анотація***.** У статті досліджено роль та місце усних вправ з геометрії як елементу формування математичних компетентностей здобувачів освіти. Розглядаються особливості використання усних вправ у навчанні освітнього компонента «Аналітична геометрія» здобувачами вищої математичної освіти в університеті та геометрії у закладах загальної середньої освіти. Проаналізовано результати виконання завдань сертифікаційної роботи НМТ 2024 року з математики, зокрема з геометрії, подані Українським центром оцінювання, які свідчать, що статистичні показники завдань НМТ погіршилися порівняно з відповідними показниками завдань ЗНО і НМТ попередніх років. У статті відмічено, що систематичне використання усних вправ при вивченні аналітичної геометрії здобувачами вищої освіти та геометрії учнями закладів загальної середньої освіти є одним із ефективних методів вирішення цієї проблеми. Зауважено, що вдало підібрана система усних вправ сприяє розвитку логічного мислення здобувачів освіти, підвищує їхню математичну культуру, підвищує творчу активність, формує вміння планувати свою діяльність.

Ключові слова: усні вправи; аналітична геометрія; професійні компетентності; здобувачі вищої освіти.

1. Вступ

У непростих соціально-економічних умовах Української держави відбувається трансформація нашого суспільства, у тому числі й інтелектуальна**.** Готувати людину до реалізації своїх знань і здібностей максимально у нинішній ситуації потрібно змалку. Особливу роль відіграють при цьому заклади загальної середньої освіти, фундуючи основи знань з кожного освітнього компонента та формуючи відповідні вміння і навички. У Державному стандарті базової середньої освіти відмічається, що освітня галузь «Математика» має на меті забезпечити учнів основами знань математичних наук: уточнення, поглиблення і розвиток сенсорних умінь школярів, за допомогою яких вони успішно орієнтуватимуться в навколишньому середовищі; формування уявлень про

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-15

геометричні фігури і тіла та їх властивості; формування вмінь доказово міркувати і пояснювати свої дії – розвиток відповідних мовленнєвих умінь, пов'язаних із використанням математичних термінів та символів; розвиток логічного мислення [1].

Одним із важливих завдань шкільного курсу математики, геометрії у тому числі, що сприяють досягненню визначеної мети, є формування в учнів свідомих та стійких обчислювальних навичок, фундаментальних формул, які необхідні для вивчення не лише математики, а й інших навчальних предметів. Адже обчислювальна культура - це багаж знань та вмінь, без якого неможливо розв'язувати задачі. Усні вправи з геометрії є випробуваним засобом, який сприяє кращому засвоєнню здобувачами освіти навчального матеріалу, розвитку у них пам'яті, уважності, спостережливості, ініціативи, збуджує інтерес до вивчення предмета як у закладах загальної середньої освіти, так і вищої школи.

Немає необхідності переконувати, яку величезну цінність мають усні обчислення під час уроків математики. Питання про проведення усного рахунку, усного розв'язування вправ є надзвичайно актуальним. Результати складання НМТ, що практикується впродовж останніх років, свідчать не лише про недостатній рівень знань випускників шкіл, а й про недосконаліть обчислювальних навиків. Учні, у переважній більшості, витрачають багато часу на виконання елементарних обчислень, перетворень виразів, їм важко зорієнтуватися у виконанні вправ на відповідність. Причина, на нашу думку, перш за все у відсутності навичок усного рахунку. Більшість учнів привчені письмові розв'язання задач супроводжувати надмірно детальними записами проміжних перетворень. Це свідчить про те, що вони уникають усного виконання проміжних завдань при письмовому розв'язуванні задач.

Формування навичок усного виконання завдань, вправ, обчислювальної культури учнів у закладах загальної середньої освіти є досить актуальним завданням для сучасної математичної освіти, вирішення якого потребує підготовлених компетентних вчителів математики.

2. Постановка проблеми

Проблема формування обчислювальних навичок учнів вже багато років привертає увагу вчителів, методистів та науковців – педагогів. Варто відмітити дослідження Н. В. Буряк, В. А .Бочкарьової, М. В. Гущиної, О. Г. Дідусь, З. М. Заїкіної, Л. М. Молотової, Л. Ф. Наконечник, Л. А. Сухіної, Д. М. Ковальової та ін..

Досліджено, що за навчальними програмами з математики у минулому столітті передбачався час для формування навичок усного рахунку, а нині цим питанням не приділяється належної уваги [8, с. 175]

Визначальним фактором для підвищення рівня обчислювальної культури учнів у контексті раціональних усних обчислень є активна роль вчителя. Важливо, щоб цілеспрямована його діяльність передбачала створення комплексної системи умов, що сприяє усвідомленню учнями важливості відповідних обчислювальних навичок та розвитку швидких, точних і раціональних обчислювальних умінь [5, с. 88].

Про широке використання обчислювальних пристроїв та технічних засобів учнями, яке призвело до того, що учні не зацікавлені у виконанні усних підрахунків, зауважує у своїх дослідженнях Кузьменко Т. І.. Обчислення учнями значення простого виразу на виконання арифметичних дій над раціональними числами викликає у них труднощі: не бачать раціональних підходів до виконання дій, значна частина учнів використовують калькулятор, а при потребі порахувати усно - починають рахувати послідовно «за діями» або взагалі не можуть розв'язати приклад, що свідчить про низький рівень обчислювальних навичок. І тільки незначна частина учнів застосовує логіку для спрощення обчислень [4, с. 50].

Використання усних вправ на уроках дозволяє негайно отримувати зворотний зв'язок, що є ефективним інструментом контролю навчальної діяльності учнів. Такі завдання допомагають швидко оцінити, наскільки учні засвоїли матеріал, виявити прогалини в їх знаннях, діагностувати готовність учнів до засвоєння нових знань. Під час таких вправ учні не лише механічно використовують формули, а й розуміють їх сутність [2, с. 74], що відрізняє обчислювальну культуру від обчислювальних навичок.

Усні вправи з математики як один із засобів активізації навчання та розумової діяльності розглядаються у [9]. Відмічається, що усні вправи з геометрії, як і усні вправи з алгебри, є одним із засобів підвищення ефективності уроку математики. Вони мають бути органічно поєднані з різними видами робіт на уроці: розв'язуванням задач, лабораторними та вимірювальними роботами, пов'язаними з обчисленням площ, об'ємів тіл, допомагати учням засвоїти велику кількість понять і термінів.

У процесі виконання усних вправ та завдань формуються стійкі уміння усно рахувати, знаходити та застосовувати потрібні формули, володіти прийомами геометричних вимірювань та побудов, читати інформацію, подану у вигляді таблиць, діаграм, графіків, складати певні алгоритми, що є дуже важливими вміннями для кожної людини.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати основні проблеми формування у здобувачів освіти навичок усного виконання вправ та завдань, обчислювальної культури на уроках геометрії у закладах загальної середньої освіти та під час навчання аналітичної геометрії у вищій школі.

3. Основні результати

Вивчення досвіду вчителів математики підтверджує основні причини низького рівня обчислювальної культури учнів та виконання усних завдань: обмежений час на великий обсяг навчального матеріалу не дає можливості для формування обчислювальних навичок учнів на належному рівні; величезне захоплення учнів обчислювальними пристроями, небажання самостійно виконувати обчислення призводить до втрати потрібних навичок [7].

Головною метою виконання усних вправ з геометрії, зокрема аналітичної, є засвоєння властивостей дій над геометричними об'єктами, формування обчислювальних навичок, усвідомлення означень та властивостей геометричних форм. Вони сприяють також формуванню умінь і навичок розв'язувати задачі, розвитку уявлень про геометричні поняття, засвоєнню геометричної термінології, дають змогу виявляти деякі закономірності. У ході виконання усних вправ можна пропонувати вправи на розпізнавання геометричних фігур, на порівняння їх властивостей (зокрема, ліній чи поверхонь другого порядку), на відшукання істотної ознаки сукупності фігур чи формул для розв'язання завдання тощо.

Усні вправи часто поєднуються з опитуванням, або підготовкою до сприймання нового матеріалу. Добір завдань для усного виконання визначається темою заняття, метою: закріплення та ліквідації прогалин у знаннях здобувачів освіти, розвивальною метою навчання аналітичної геометрії. Зазвичай, темп усного виконання завдань швидший, ніж при письмовому розв'язанні. Однак, при необхідності звернути увагу на деякий досить важливий момент, викладач може будь-якої миті призупинитись і детальніше пояснити відповідний факт чи хід розв'язання того завдання, яке викликало труднощі.

Для закріплення вивчених формул зручно використовувати таблиці або картки, проектування за допомогою мультимедійного екрану, а також писати математичні диктанти. У процесі виконання завдань диктантів з аналітичної геометрії виробляється уважність, швидкість зосередження та організованість, формується логічне мислення.

Ефективними є математичні диктанти на закріплення вивчених означень та формул освітнього компонента «Аналітична геометрія». Наприклад, до теми «Канонічні рівняння кривих другого порядку» можна провести диктант за такими питаннями:

- Еліпсом називається …..
- Канонічне рівняння еліпса ….
- Осями еліпса, заданого канонічним рівнянням, є …
- Фокуси еліпса – це …
- Фокальним радіусом точки еліпса називається …
- Ексцентриситет еліпса знаходимо …
- Директрисами еліпса називаються …
- Гіперболою називається …
- Асимптоти гіперболи – це …
- Рівняння асимптот гіперболи …
- Рівняння директрис гіперболи …
- Параболою називається…
- Ексцентриситет параболи це – …

та інші.

У здобувачів вищої освіти виробляються навики майбутньої професійної діяльності у процесі вивчення освітнього компонента.

Розв'язуючи задачі письмово, легше відшукати план розв'язання, а усно можна більше розв'язати задач. Це важливий фактор у навчанні [6]. Правильно сплановане та організоване виконання усних вправ з аналітичної геометрії може значно урізноманітнити, збагатити та покращити освітній процес. Усні вправи є однією з ефективних форм організації колективної та індивідуальної роботи здобувачів освіти піл час навчальної діяльності, формування їх логічної і мовної культури.

Здобувачі вищої освіти не завжди можуть чітко, у логічній послідовності висловити свої думки щодо пояснення способу розв'язання задачі чи виконання усного завдання. Найбільшим методичним недоліком є несистематичне використання усних вправ у процесі вивчення деяких тем. Це позбавляє усних вправ їх основної переваги - економії навчального часу та вироблення у здобувачів освіти звички будь-яку математичну операцію максимально виконувати усно. Усне розв'язання будь-якого завдання стає для них складним просто через незвичність. Немає потреби зупинятись на питанні про можливість систематичного використання усних вправ при вивченні аналітичної геометрії. Варто лише зауважити, що їх можна застосовувати до всіх без винятку тем освітнього компонента. Не потрібно відводити для виконання усних вправ частину заняття, варто при розв'язуванні письмових завдань привчати виконувати усно найпростіші проміжні перетворення.

Наприклад, при відшуканні векторного добутку векторів $\vec{a}\,(1;0;-2)$, $\vec{b}\,(-1;1;0)$, можна скористатися формулою його обчислення:

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.\text{Звідки}, [\vec{a}\vec{b}] = (2;2;1).$$

Проте, варто було б, не розписуючи детально, усно виконати проміжні обчислення визначників другого порядку і відразу записати $[\vec{a}\vec{b}] = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Урізноманітнити усні завдання можна різного типу геометричними задачами. Для прикладу, розглянемо задачу:

Із вершини прямокутника із сторонами 12 і 8 проведено дві прямі, що ділять протилежні цій вершині сторони прямокутника навпіл. Обчислити кут між цими прямими [3, с. 48].

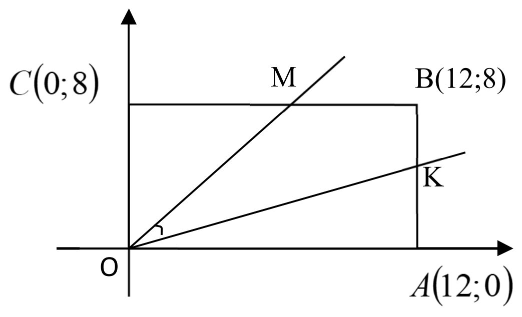


Рис. Кут між прямими

Розв'язання. Аналізуючи умову задачі та пропонуючи різні підходи до її розв'язання, виберемо, на нашу думку, один із найраціональніших.

Введемо прямокутну декартову систему координат, осі якої містять дві суміжні сторони прямокутника, а початком координат є та із його вершин, з якої проведені дві прямі (див. рис.). У такому випадку можемо усно знайти координати точок K та M. Оскільки вони є серединами сторін прямокутника, то $K(12;4)$ і $M(6;8)$. Тоді можна знайти косинус шуканого кута α , утвореного векторами $\overrightarrow{OK}$ та $\overrightarrow{OM}$, що є радіус-векторами точок K та M відповідно і мають такі ж координати: $\overrightarrow{OK}(12;4)$, $\overrightarrow{OM}(6;8)$. Знайдемо косинус кута між цими векторами, виконуючи усно нескладні обчислення:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OK}\right|\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{12\cdot 6 + 4\cdot 8}{\sqrt{12^2+4^2}\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{104}{\sqrt{160}\sqrt{100}} = \frac{13\sqrt{10}}{50}.$$

Розв'язання таких геометричних задач спонукає майбутніх вчителів виробляти навички швидко орієнтуватися у відшуканні раціонального способу виконання завдання і виконувати швидко проміжні перетворення та обчислення.

При виконанні усних вправ чи проміжних перетворень у письмових завданнях , потрібно враховувати індивідуальні особливості і навички здобувачів освіти: з нижчим рівнем знань важко виконувати деякі проміжні операції усно, а тому це викликає у них лише невпевненість у своїх силах. Однак, індивідуальний і систематичний підхід у процесі виконання таких завдань формує у них інтерес і бажання виконувати певні операції усно.

Метод координат вивчають учні у шкільному курсі геометрії і здобувачі математичної освіти у вищій школі. Однією з основних задач аналітичної геометрії на застосування цього методу є задача на складання рівнянь геометричних фігур за даними їх властивостями. Для набуття відповідних навичок у складанні рівнянь, необхідно розв'язати достатню кількість простіших задач. У такому випадку завжди ефективно використовувати усні вправи, які скорочують час виконання завдання і вносять певне пожвавлення у навчальний процес, замінивши письмове розв'язання однотипних вправ і задач.

Для прикладу:

1. У трикутнику MNK проведено медіану NP. Якщо $M(6;\ -2), N(2;\ 4), K(-2;\ 4)$, то точка P має координати:
варіанти відповідей: а) $(3;\ 1)$: б) $(-2;\ 2)$; *в)* $(2;\ 1)$; *г)* $(2;\ -2)$; *д)* $(-1;\ -1)$.

2. Якщо $A(3;-1), B(-1;2), K(12;4), B(-1;\ 2), C(6;\ 3)$ - вершини трикутника ABC, то довжина сторони AC дорівнює:
варіанти відповідей: а) $7\sqrt{2}$; б) 7; *в)* 5; *г)* $2\sqrt{7}$; *д)* 9.

3. Якщо точка K лежить на осі ординат та рівновіддалена від точки $F(-3;\ 4)$ і початку координат, то точка K має координати:
варіанти відповідей: а) $(-5/6;\ 0)$; б) $(0;\ 5/7)$; *в)* $(0;\ -4)$; *г)* $(-3;\ 0)$; *д)* $(0;\ -25/8)$.

4. Точка $C(-2;\ 5)$ - центр кола, радіус якого дорівнює 6 см, тоді рівняння кола: *варіанти відповідей: а)* $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 36$;
в) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$; *г)* $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 36$;
д) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 3$.

5. Якщо $C(-1;\ 3)$ - центр кола, CP - радіус кола і $P(2;\ -1)$, то рівняння кола має вигляд:
варіанти відповідей: а) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$; б) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
в) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$; *г)* $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 60$;
д) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 68$.

6. Пряма задана рівнянням $4x - 3y + 12 = 0$. Даній прямій належить точка: *варіанти відповідей: а)* $(-1;\ 2)$; б) $(2;\ -1)$; *в)* $(0;\ 4)$; *г)* $(-3;\ 7)$; *д)* $(-4;\ 2)$.

7. Пряма $x + y = 3$ і коло $x^2 + y^2 = 9$:
варіанти відповідей: а) не мають спільних точок;
б) мають одну спільну точку $(-1;\ 0)$;
в) мають одну спільну точку $(-3;\ -4)$;
г) мають дві спільні точки $(1;\ 0), (0;\ 1)$;
д) мають дві спільні точки $(0;\ -3), (3;\ 0)$.

8. До прямої, яка задана рівнянням $5x - y = 2$, паралельна пряма задана рівнянням:
варіанти відповідей: а) $-2x = 4$; б) $5x + y - 3 = 0$; *в)* $5x - y = 9$;
г) $-3x - 3y - 7 = 0$; *д)* $4x = 4y - 1$.

9. Якщо $K(-2;\ 4), M(-2;\ -1), N(3;\ -1)$, то трикутник KMN:
варіанти відповідей: а) гострокутний; б) рівносторонній; *в)* прямокутний; *г)* різносторонній; *д)* рівнобедрений.

Таких усних завдань можна підібрати достатню кількість із багатьох джерел: навчальних підручників, збірників задач і завдань для тематичного оцінювання, іншої додаткової літератури та онлайн розробок. Очевидно, завдання для НМТ розраховані на випускників з хорошими обчислювальними навиками, вміннями усного виконання проміжних операцій при письмовому розв'язанні типових та нестандартних завдань. І, варто визнати, що при наявності таких якостей учасники НМТ, використавши визначений час раціональніше, показали б вищий рівень знань з математики, ніж маємо на сьогодні.

Опрацьовані результати виконання завдань сертифікаційної роботи НМТ з математики Українським центром оцінювання свідчать про те, що, навіть, завдання для перевірки рівня сформованості основних навичок і вмінь та застосування їх для розв'язання стандартних задач викликають труднощі в учасників / учасниць.

У завданні 21 зі стереометрії треба було обчислити об'єм правильної чотирикутної призми, одна з вершин і центр основи якої задані координатами [10].

У прямокутній системі координат у просторі задано правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Діагоналі основи $ABCD$ перетинаються в точці М. Висота призми втричі більша за сторону АВ. Обчисліть об'єм цієї призми, якщо $A(4; 10; 3)$, $M(-2; 0; 1)$.

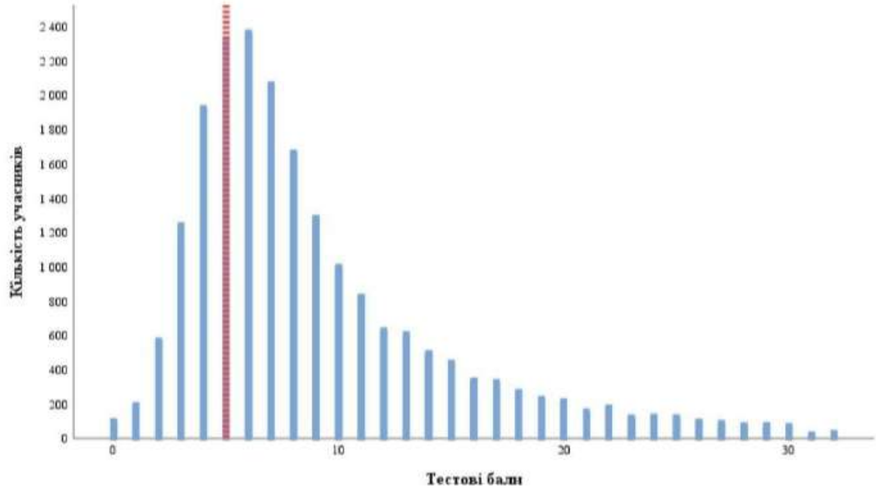
Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
3000	94,9	5,1	5,1	18,4	0,5

Завдання було спрямоване на перевірку знання властивостей призми й уміння використовувати наведені в довідкових матеріалах формули відстані між двома точками й об'єму призми. Це завдання успішно виконали 5,1 % тестованих.

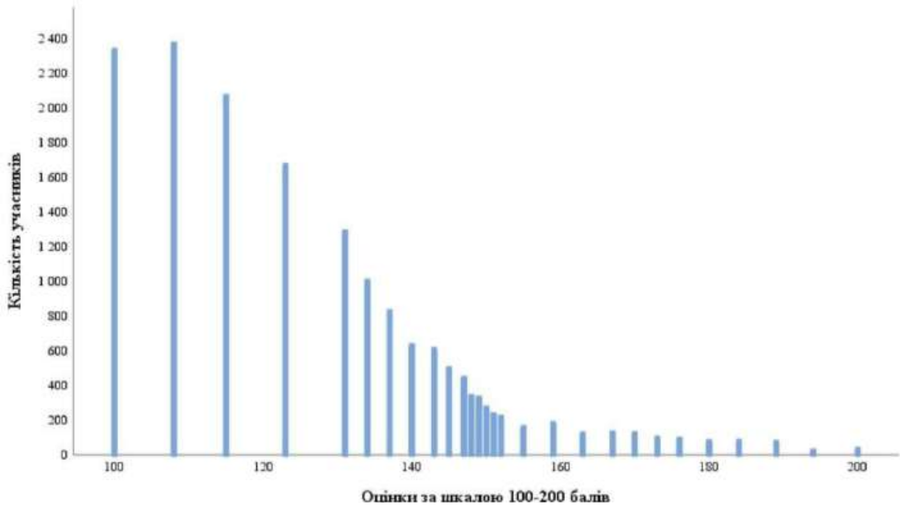
Статистичні показники завдань НМТ погіршилися порівняно з відповідними показниками завдань ЗНО і НМТ попередніх років.

На даних діаграмах вказано розподіл учасників тестування з математики за кількістю набраних тестових балів (див. діаграма 1) та отриманих рейтингових оцінок за шкалою 100-200 балів (див. діаграма 2). Червоною пунктирною лінією позначено поріг «склав / не склав» (5 балів), установлений Порядком прийому на навчання для здобуття вищої освіти у 2024 році [10].

Доцільним є використання усних вправ на перших етапах вивчення стереометричного матеріалу, використовуючи для демонстрації різноманітні моделі, плакати, мультимедійний екран, навколишні предмети, які спонукають розвитку просторової уяви. При вивченні аналітичної геометрії нерідко є доцільним створювати моделі з підручного матеріалу, пропонуючи студентам самостійне моделювання з використанням матеріалів для створення просторових моделей. Звичайно, сьогодні, зазвичай, використовується мультимедійна дошка та навчальні динамічні програми.



Діаграма 1. Розподіл учасників тестування за кількістю набраних тестових балів



Діаграма 2. Розподіл учасників тестування та отриманих рейтингових оцінок за шкалою 100-200 балів

Систематичне використання усних вправ при навчанні освітнього компонента «Аналітична геометрія» є одним із засобів підвищення ефективності освітнього процесу та формування професійних навичок майбутніх вчителів математики.

Висновки. У сучасних умовах організації освітньої діяльності здобувачів базової середньої освіти, майбутні вчителі математики мають бути готовими до організації та здійснення навчального процесу у будь-яких ситуаціях. При дистанційному навчанні дуже ефективними є усні вправи та завдання, які допоможуть зекономити час для розв'язання складніших задач. У процесі опанування освітнім компонентом «Аналітична геометрія» досить часто проводяться математичні диктанти, виконуються проміжні усні перетворення та обчислення при письмовому розв'язанні задач, усні опитування з метою повторення вивчених означень чи властивостей геометричних об'єктів. Необхідно чітко продумувати кожне заняття, щоб раціонально використовувати час для виконання усних вправ та завдань, забезпечити гармонійний баланс між усною та письмовою роботою. Це дуже важливо при формуванні математичних компетентностей майбутніх фахівців.

У подальших дослідженнях планується детальніше вивчати значення усних завдань з аналітичної геометрії для розвитку інтелектуальних умінь і творчих здібностей здобувачів освіти, формування їх професійних компетентностей.

Конфлікт інтересів і етика. Автор заявляє, що не має конфліктів інтересів. Автор також заявляє про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автор заявляє про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Державний стандарт базової середньої освіти. Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020 року. URL: https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/
2. Ільченко Г. Про значення усних вправ у процесі вивчення шкільного курсу математики. *Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрів і студентів фізико-математичного факультету* /ПНПУ імені В.Г. Короленка; редкол.: Ю.Д. Москаленко (голов. ред.) та ін. Полтава: ТОВ «АСМІ», 2014. С. 74–75.
3. Кравчук О.М. Практикум з аналітичної геометрії: навч.посіб. для вищ. навч. закл. у 2 ч. Ч1. Луцьк: Волин. нац. ун-т ім..Лесі Українки, 2012. 223 с.
4. Кузьменко Т. І. Обчислювальна культура як компонент математичної грамотності учнів основної школи. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2015»*: матеріали ІІ Міжнародної науково-методичної конференції. Суми, 2015. С. 50–51.
5. Матяш О. І. Компетенція раціональних обчислень як необхідна передумова математичної компетентності вчителя та учня. URL: https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/2889/Matiash_Paliiy.pdf?sequ%20ence=1&isAllowed=y
6. Методика проведення усних обчислень на уроках математики: URL: https://vseosvita.ua/library/embed/000zd8-0749.doc.html
7. Місце і роль усних обчислень у підвищенні рівня обчислювальної культури учнів старших класів. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/download/2046/pdf
8. Носаченко Л. В. Формування та розвиток обчислювальних обчислювальної культури учнів. *Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету.* 2010. Вип. 4. С. 175–178.
9. Усні вправи на уроках математики: URL: http://fastiv-lyceum.edukit.kiev.ua/Files/downloads
10. Офіційний звіт про результати НМТ у 2024 році: URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/09/Zvit-NMT_2024-Tom_2_red.pdf

UDC 378.147.091.33-028.16/.21:514.122

Oral exercises in analytical geometry as a means of forming professional competences

Olga Kravchuk

Abstract. The article examines the role and place of oral exercises in geometry as an element of the formation of mathematical competencies of education seekers. The features of the use of oral exercises in teaching the educational component "Analytical Geometry" by applicants for higher mathematical education at the university and geometry in general secondary education institutions are considered. The results of the tasks of the certification work of the NMT 2024 in mathematics, in particular geometry, submitted by the Ukrainian Assessment Center, which indicate that the statistical indicators of NMT tasks have deteriorated compared to the corresponding indicators of the tasks of the external assessment and NMT of previous years, are analyzed. The article notes that the systematic use of oral exercises in the study of analytical geometry by applicants for higher education and geometry by students of general secondary education institutions is one of the effective methods for solving this problem. It has been noted that a well-chosen system of oral exercises contributes to the development of logical thinking of students, increases their mathematical culture, increases creative activity, teaches attentiveness, and forms the ability to plan one's activities.

Keywords: oral exercises; analytical geometry; professional competencies; students of higher education.

References

1. State standard of basic secondary education. Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 898 dated 09/30/2020: Electronic resource. https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/
2. Ilchenko, G. (2014). *On the importance of oral exercises in the process of studying the school course of mathematics*, Collection of scientific works of teachers, postgraduates, masters and students of the Faculty of Physics and Mathematics , V. G. Korolenko National Polytechnic University,LLC "ASMI", Poltava, 74–75.
3. Kravchuk, O. M. (2012). *Practical course in analytical geometry: a teaching aid for higher education*, Part 1, Volyn. nat. Lesya Ukrainka University, Lutsk.
4. Kuzmenko, T. I. (2015). *Computational culture as a component of mathematical literacy of primary school students,* Development of intellectual skills and creative abilities of pupils and students in the process of teaching disciplines of the natural and mathematical cycle "ITM*plus - 2015": materials of the II International Scientific and Methodological Conference, Sumy, 50–51.
5. Matyash, O. I. *Competence of rational calculations as a necessary prerequisite for mathematical competence of a teacher and a student*: Electronic resource. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/2889/Matiash_Paliiy.pdf?sequ%20ence=1&isAllowed=y
6. Methodology of oral calculations in mathematics lessons: Electronic resource. https://vseosvita.ua/library/embed/000zd8-0749.doc.html
7. The place and role of oral calculations in increasing the level of computational culture of high school students: Electronic resource. https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/download/2046/pdf
8. Nosachenko, L. V. (2010). *Formation and development of computational computational culture of students*, Collection of scientific articles of students of the Faculty of Physics and Mathematics, **4**, 175–178.
9. Oral exercises in mathematics lessons: Electronic resource. http://fastiv-lyceum.edukit.kiev.ua/Files/downloads
10. Official report on the results of the NMT in 2024: Electronic resource: Access mode: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/09/Zvit-NMT_2024-Tom_2_red.pdf

Про авторів / About the authors

Ольга Кравчук, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математичного аналізу та статистики, Волинський національний університет імені Лесі Українки, вул. Банкова, 9, м. Луцьк, 43003, Україна;

Olga Kravchuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Statistics, Lesia Ukrainka Volyn National University, 9 Bankova Str., Lutsk, 43003, Ukraine.

Отримано / Received 16.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 169–175.

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 169–175.

Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 004.5:378.147

Об'єктно-орієнтований підхід до створення графічного інтерфейсу користувача в Python із використанням модуля Tkinter

Галина Ковтонюк[1], Сергій Бак[2], Ярослав Крупський[3]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukgm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3352-0358

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
sergiy.bak@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1508-2144

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
krupskyi.ya@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-6324-2697

Анотація. У статті проаналізовано застосування об’єктно-орієнтованого підходу у процесі створення програм з графічним інтерфейсом користувача мовою Python із використанням стандартного модуля Tkinter. Об’єктом дослідження виступають підходи до розробки GUI-додатків у контексті навчання програмуванню, а також їх методичне значення для професійної підготовки майбутніх учителів математики. На основі порівняльного аналізу програмної реалізації простого калькулятора у процедурному стилі та з використанням об’єктно-орієнтованого підходу продемонстровано переваги останнього з точки зору структурованості коду, зменшення дублювання та спрощення подальшого розширення функціональності програмного продукту. У статті акцентується увага на ключових принципах об’єктно-орієнтованого програмування, таких як інкапсуляція, спадкування та поліморфізм, і їхній реалізації у Python. Підкреслено, що використання класів дозволяє ізолювати логіку GUI-компонентів, поліпшує підтримку коду та полегшує масштабування додатків. Окремий акцент зроблено на освітньому аспекті дослідження: створення GUI-додатків на базі об’єктно-орієнтованого програмування сприяє розвитку алгоритмічного, логічного та об’єктного мислення у студентів. Зазначено, що така діяльність гармонійно вписується у навчальні програми підготовки майбутніх учителів математики, зокрема в рамках дисциплін інформатичного спрямування.

Ключові слова: об’єктно-орієнтоване програмування, Python, графічний інтерфейс користувача, Tkinter.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-05

1. Вступ

Сьогодні однією із найпопулярніших мов програмування є мова Python. В статті [1] проведено кількісний та якісний аналіз зростання популярності мови Python, використовуючи статистичні дані з GitHub, Google Trends, Stack Overflow. Автор вказує, що Python стає мовою першого вибору як в академічних колах, так і в комерційних проєктах. Основними причинами цього визнано простоту синтаксису, багату бібліотечну підтримку, кросплатформеність та активну спільноту розробників.

Крім того, Python є мовою програмування, яка активно підтримує об’єктно-орієнтованого програмування (ООП) та надає зручні механізми для створення класів, об’єктів та взаємодії між ними. ООП у Python реалізовано у гнучкій формі, що робить його зручним для моделювання та масштабованих проєктів. Об’єктно-орієнтоване програмування є одним із найбільш розповсюджених підходів у сучасному програмуванні. Воно дозволяє створювати програми, що легко масштабуються, розширюються та підтримуються. У статті [2] детально проаналізовано ООП-механізми, реалізовані в Python. Автори здійснюють концептуальне розмежування між класичним ООП (як у Java чи C++) та більш гнучким підходом Python. Акцентовано увагу на інкапсуляції, спадкуванні, поліморфізмі, а також на унікальних особливостях Python — зокрема, можливості динамічно змінювати структуру класу в процесі виконання.

Автори статті [3] дослідили застосування найпопулярніших бібліотек Python у різних доменах. Зокрема, висвітлено переваги бібліотек NumPy, Pandas, Matplotlib, TensorFlow, Flask. Встановлено, що Python має чітко структуровану екосистему для наукових обчислень, аналізу даних, машинного навчання та веб-розробки.

Одна з важливих областей застосування ООП у Python — створення графічного інтерфейсу користувача (GUI). Tkinter є стандартним модулем Python для створення GUI-програм, і його використання спрощує розробку застосунків. Інтерфейсні рішення на основі Tkinter залишаються актуальними в навчальному контексті.

Джон Ґрейсон у своїй праці "Python and Tkinter Programming" ([4]) заклав фундаментальні засади побудови графічного інтерфейсу засобами бібліотеки Tkinter. Попри дату публікації, видання зберігає актуальність для початкового рівня розробки GUI-програм. Автор пропонує покроковий розбір принципів обробки подій, управління віджетами та структури вікон.

Зауважимо, що зараз є багато різноманітних посібників вітчизняних авторів, в яких доступно і достатньо повно викладені основи програмування мовою Python (див., наприклад, [5, 6]).

2. Постановка проблеми

В статті [7] наголошується на важливості інформатичних компетентностей майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін, зокрема навичок з програмування. Цю тему розвинено в статті [8], де розглядаються можливості створення GUI під час вивчення програмування майбутніми вчителями математики. Акцентується увага на методичних підходах до використання Python у навчанні, підкреслюючи його дидактичну ефективність. Автори демонструють, як створення графічного інтерфейсу сприяє формуванню алгоритмічного та логічного мислення у студентів.

Метою даної статті є демонстрація ефективності застосування ООП у програмах з графічним інтерфейсом користувача, що використовують модуль Tkinter, а також порівняння підходів із використанням та без використання класів в контексті вивчення програмування.

3. Основні результати

Нагадаємо, що «графічний інтерфейс користувача (англ. Graphical User Interface або GUI) – тип інтерфейсу, який дозволяє користувачеві взаємодіяти з комп'ютерною програмою або електронним пристроєм через графічні зображення та візуальні вказівки, на відміну від текстових інтерфейсів» ([8]).

У Python для створення графічних інтерфейсів часто використовують бібліотеку Tkinter. Можна реалізувати графічний інтерфейс як у процедурному стилі, так і за допомогою об'єктно-орієнтованого підходу. Розглянемо обидва підходи на прикладі створення простого калькулятора.

1. Створення графічного інтерфейсу користувача без використання ООП (процедурний стиль)

Створити програму з графічним інтерфейсом користувача у Python за допомогою модуля Tkinter можна найпростішим способом – написавши код у процедурному стилі, тобто без використання класів. У цьому підході потрібно створити головне вікно, додати віджети (кнопки, мітки тощо) та керувати ними за допомогою окремих функцій або безпосередньо в основному потоці виконання. Це підходить для невеликих програм, але стає важким для підтримки та масштабування, коли програма зростає.

Розглянемо приклад простої програми без використання класів (рис. 1).

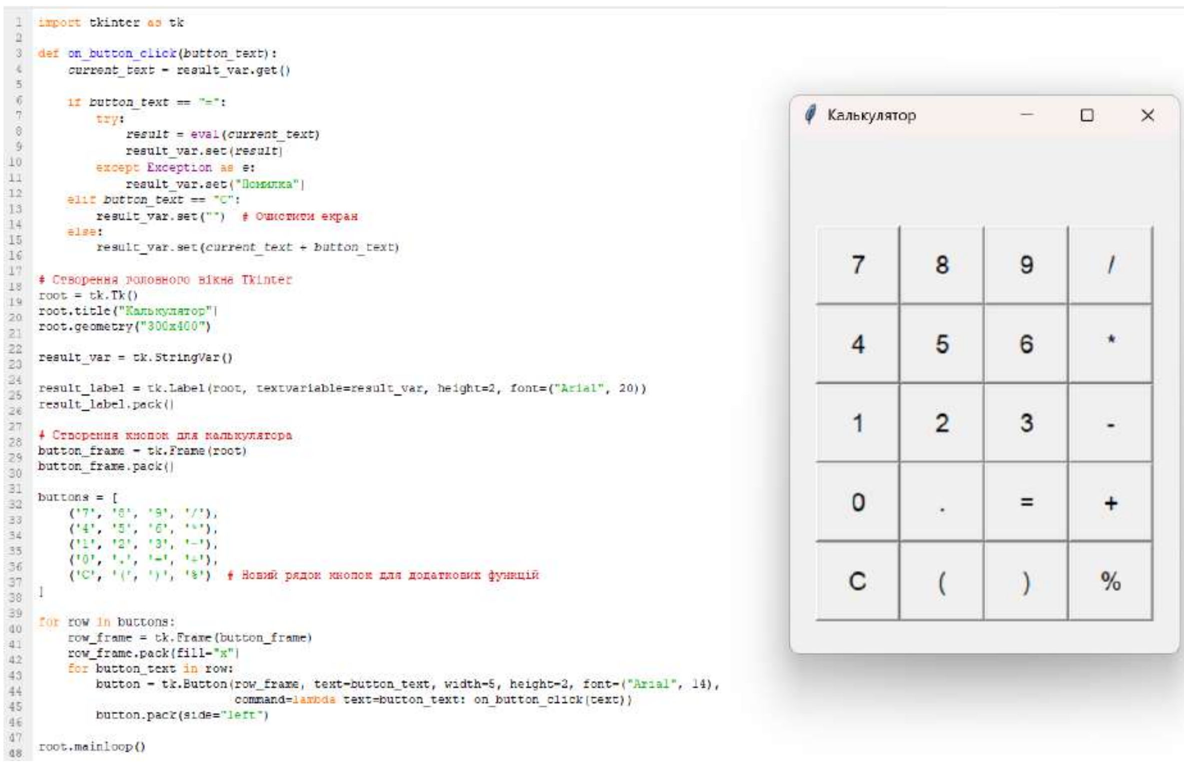


Рис. 1. Створення базового GUI з Tkinter без ООП

У програмі без ООП створюється головне вікно (root), додаються віджети, такі як мітка (Label), кнопки (Button). Кнопка викликає подію, яка змінює текст мітки.

Недоліки цього підходу полягають у тому, що всі елементи створюються в глобальному просторі, що може призвести до конфліктів змінних, якщо програма стане більш складною. Якщо потрібно додавати нові елементи або змінювати інтерфейс, код стає важким для підтримки та розширення. Крім того, для створення схожих елементів потрібно повторювати код, що збільшує кількість дубльованих фрагментів і ускладнює внесення змін. Відсутність інкапсуляції робить програму менш гнучкою, оскільки всі частини програми можуть взаємодіяти одна з одною без чітких меж, що збільшує ризик помилок.

Для подолання цих проблем можна застосувати об'єктно-орієнтований підхід, що дозволяє структурувати код, ізолювати елементи інтерфейсу в окремі класи та забезпечити кращу підтримку та масштабованість.

Розглянемо приклад програми з використанням об'єктно-орієнтованого підходу (ООП) для створення графічного інтерфейсу з використанням модуля Tkinter.

2. Створення програми з використанням ООП (об'єктно-орієнтований підхід)

У об'єктно-орієнтованому підході всі елементи інтерфейсу та їх взаємодія з користувачем інкапсульовані в окремі класи. Це дозволяє створювати більш структуровані і масштабовані програми.

Тепер розглянемо приклад простої програми з використанням класів (рис. 2).

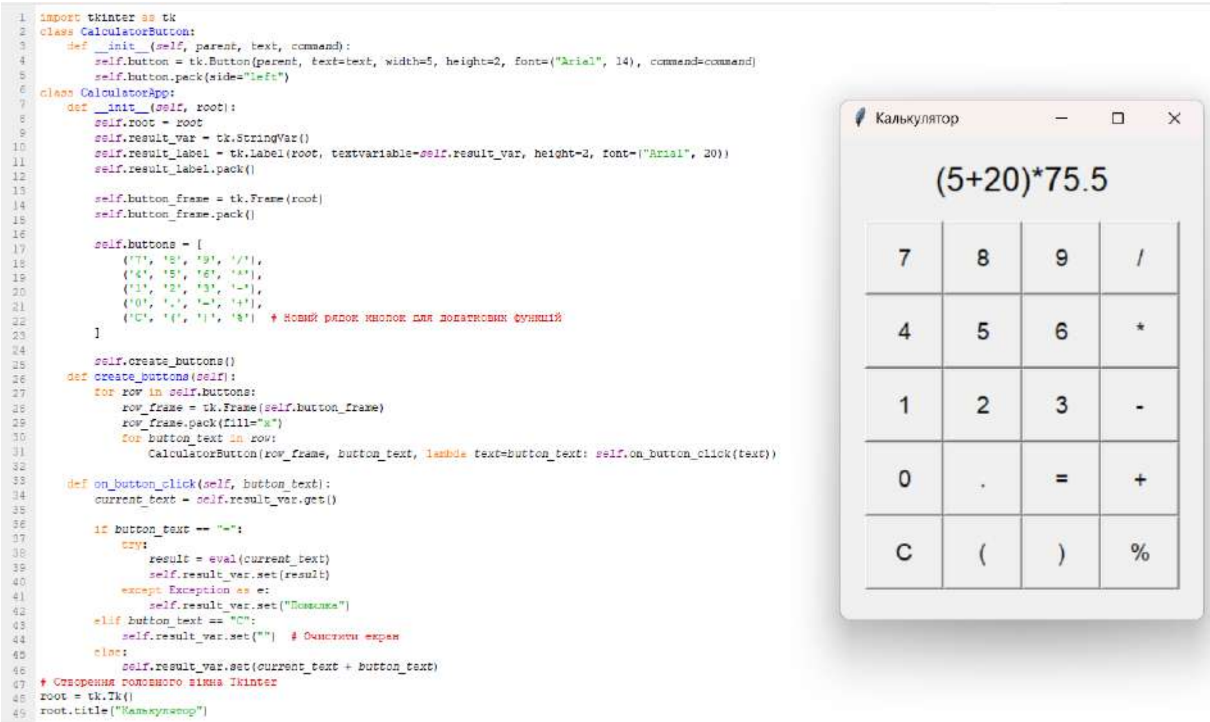


Рис. 2. Створення базового GUI з Tkinter з використанням ООП

У програмі з використанням об'єктно-орієнтованого підходу всі елементи інтерфейсу, такі як мітка (Label), кнопки (Button), а також їх взаємодія з користувачем, інкапсульовані в окремому класі. Це дозволяє створити чітку структуру коду, де кожен клас відповідає за конкретний елемент інтерфейсу або групу елементів. Так, створення об'єкта класу забезпечує більшу гнучкість та масштабованість програми, оскільки можна безперешкодно додавати нові елементи або змінювати вже існуючі без впливу на інші частини програми.

У наведеному прикладі створюється клас CalculatorApp, який інкапсулює всю логіку програми та взаємодію з користувачем. Така організація коду дозволяє зберігати всю інформацію про інтерфейс і його елементи в одному місці, що полегшує подальші зміни та підтримку програми.

У методі __init__ цього класу створюються всі елементи інтерфейсу, такі як кнопки та мітки. Цей метод забезпечує ініціалізацію основних компонентів програми та їх зв'язок з функціональними частинами.

Метод create_buttons використовується для створення кнопок калькулятора. Це дозволяє уникнути дублювання коду при додаванні нових кнопок або зміні їхнього розташування. Завдяки методу створення кнопок у межах класу, додавання нових елементів інтерфейсу стає значно простішим.

Логіка обробки натискання кнопок залишається в методі on_button_click, але тепер вона працює з даними класу, що дозволяє забезпечити кращу організацію коду і уникнути конфліктів змінних.

Завдяки об'єктно-орієнтованому підходу, додавання нових кнопок стає простим і зручним.

Приклад програми з використанням ООП дозволяє значно зменшити кількість повторюваного коду, оскільки клас можна використовувати для створення різних інтерфейсів із подібною структурою. Завдяки цьому код стає більш чистим і легким для підтримки. ООП також дозволяє зберігати логіку програми та графічний інтерфейс у межах одного класу, що робить програму легшою для розуміння та модифікації.

У порівнянні з процедурним підходом, об'єктно-орієнтований підхід надає можливість інкапсуляції функцій і даних, що призводить до кращої організації коду і зменшує ризик виникнення помилок. Крім того, для великої кількості інтерфейсів, які можуть мати спільні елементи, ООП дозволяє використовувати успадкування та поліморфізм, що знову ж таки робить програму більш гнучкою та зручною для розширення.

Таким чином, використання ООП в Tkinter значно покращує структуру програми, робить її більш організованою та легшою для розширення і підтримки.

Зауважимо, що зазначена тематика включена до чинних навчальних програм з інформатики та програмування для спеціальностей 111 Математика (освітньо-професійна програма «Комп'ютерна математика») та 014.04 Середня освіта (Математика) (освітньо-професійна програма «Середня освіта. Математика, інформатика»), схвалених Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Висновки. Таким чином, використання об'єктно-орієнтованого підходу у створенні програм з графічним інтерфейсом з використанням модуля Tkinter забезпечує вищу читабельність коду завдяки його структурованості, на відміну від процедурного підходу, де код швидко ускладнюється зі збільшенням функціональності. У контексті повторного використання коду ООП значно спрощує додавання нових графічних вікон, тоді як у процедурному варіанті це вимагає суттєвого дублювання та модифікації існуючих фрагментів коду. При цьому розширюваність програмного продукту також істотно підвищується, оскільки цей підхід дозволяє легко доповнювати функціональність без радикального переписування програми, чого не можна сказати про процедурний підхід. Однак з огляду на логіку формування програмістських компетентностей, оволодіння об'єктно-орієнтованим програмуванням передбачає попереднє вивчення процедурного підходу як необхідної методологічної основи. Подальші дослідження можуть бути зосереджені на вивченні особливостей створення складних GUI-додатків із використанням ООП та розширених бібліотек, таких як PyQt або Kivy.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Srinath K. R. Python – The Fastest Growing Programming Language. *International Research Journal of Engineering and Technology*. 2017. Volume 4, Issue 12. P. 354–357.

2. Nzerue-Kenneth P. E., Onu F. U., Denis A. U., Igwe J. S., Ogbu N. H. Detailed Study of the Object-Oriented Programming (OOP) Features in Python. *British Journal of Computer, Networking and Information Technology*. 2023. Volume 6, № 1. P. 83–93. DOI: https://doi.org/10.52589/BJCNIT-FACSOJAO
3. Saabith A. L. S., Vinothraj T., Fareez M. M. M. Popular Python libraries and their application domains. *International Journal of Advance Engineering and Research Development*. 2020. Volume 7, Issue 11. P. 18–26.
4. Grayson J. E. Python and Tkinter Programming. Shelter Island: Manning Publications Co., 2000. 660 p.
5. Креневич А. П. Python у прикладах і задачах. Ч. 2. Об'єктно-орієнтоване програмування: навч. посіб. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2020. 152 с.
6. Руденко В. Д., Жугастров О. О. Основи алгоритмізації і програмування мовою Python. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. 192 с.
7. Ковтонюк Г. М. До питання формування інформатичної компетентності майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін. *Нова педагогічна думка*. 2017. Том 91, № 3. С. 49–51.
8. Бак С. М., Ковтонюк Г. М. Особливості створення графічного інтерфейсу користувача під час вивчення програмування мовою Python майбутніми вчителями математики. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ «Друк плюс», 2021. Вип. 60. С. 143–157. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2021-60-143-157

UDC 004.5:378.147

Object-oriented approach to creating graphical user interface in Python using the Tkinter module

Halyna Kovtoniuk, Serhii Bak, Yaroslav Krupskyi

Abstract. The article analyzes the application of the object-oriented approach in the development of programs with a graphical user interface using the Python programming language and its standard Tkinter module. The focus of the research is on approaches to GUI application development in the context of teaching programming, as well as their methodological significance for the professional training of future mathematics teachers. Based on a comparative analysis of the implementation of a simple calculator in procedural style and using the object-oriented approach, the advantages of the latter are demonstrated in terms of code structuring, reduction of redundancy, and simplification of further functionality extension. The article highlights the key principles of object-oriented programming such as encapsulation, inheritance, and polymorphism, and their implementation in Python. It is emphasized that the use of classes allows isolating the logic of GUI components, improves code maintainability, and facilitates application scalability. Particular attention is given to the educational aspect of the study: the development of GUI applications based on object-oriented programming fosters the development of algorithmic, logical, and object-oriented thinking in students. It is noted that such activities are well aligned with the curricula for training future mathematics teachers, particularly within informatics-related disciplines.

Keywords: object-oriented programming, Python, graphical user interface, Tkinter.

References

1. Srinath, K. R. (2017). *Python – The Fastest Growing Programming Language*, International Research Journal of Engineering and Technology, **4** (12), 354–357.
2. Nzerue-Kenneth, P. E., Onu, F. U., Denis, A. U., Igwe, J. S., Ogbu, N. H. (2023), *Detailed Study of the Object-Oriented Programming (OOP) Features in Python*, British Journal of Computer, Networking and Information Technology, **6** (1), 83–93. https://doi.org/10.52589/BJCNIT-FACSOJAO
3. Saabith, A. L. S., Vinothraj, T., Fareez, M. M. M. (2020). *Popular Python libraries and their application domains*, International Journal of Advance Engineering and Research Development, **7** (11), 18–26.
4. Grayson, J. E. (2000). *Python and Tkinter Programming*, Manning Publications Co., Shelter Island.
5. Krenevych, A. P. (2020). *Python in examples and problems*, Part 2, Object-oriented programming: a textbook, Kyiv University, Kyiv. [in Ukrainian]
6. Rudenko, V. D., Zhugastrov, O. O. (2019). *Fundamentals of algorithmization and programming in Python*, Publ. "Ranok", Kharkiv. [in Ukrainian]
7. Kovtoniuk, H. M. (2017). *On the issue of forming informatics competence of future teachers of physics and mathematics disciplines*, Nova Pedagogichna Dumka, **91** (3), 49–51. [in Ukrainian]

8. Bak, S. M., Kovtoniuk, H. M. (2021). *Features of creating a graphical user interface when studying Python programming by future mathematics teachers*, Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems: collection of scientific papers, LLC "Druk Plus", Vinnytsia, **60**, 143–157. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2021-60-143-157

Про авторів / About the authors

Галина Ковтонюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Halyna Kovtoniuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Сергій Бак, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Serhii Bak, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Ярослав Крупський, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Yaroslav Krupskyi, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 19.03.2025
Прийнято до друку / Accepted 18.04.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА:
НАУКА ТА ОСВІТА

електронний науковий журнал

Том 2, № 1

Видавець:
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 7482 від 19.10.2021 р.
21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32
Тел.: (0432) 61-28-12, 38 (097) 26-30-366
e-mail: info@vspu.edu.ua
http://www.vspu.edu.ua

Підписано до публікації 21.05.2025 р.
Гарнітура Times New Roman
Ум. друк. арк. 9,3