М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 3, № 2 (2026), с. 224–236.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 3, No. 2 (2026), pp. 224–236.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 515.1:519.6

Барицентрична ретракція на неявно задані квадрики: тотожності дефекту та оцінки локальності

Олена Поплавська

Хмельницький національний університет,
кафедра фізики, математики та інформатики, м. Хмельницький, Україна
poplavskaoa@khmnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2170-8740

Анотація. Розглянуто задачу побудови нових точок на неявно заданій квадриці за скінченною локальною хмарою точок, що лежать на цій квадриці або поблизу неї. Запропоновану конструкцію утворюють два кроки: барицентрична ініціалізація в опуклій оболонці хмари та повернення отриманої точки на квадрику вздовж градієнтного напряму. Доведено точну тотожність, яка виражає значення квадратичного полінома в барицентричній точці через залишки початкових точок і попарні прирости відповідної квадратичної форми. З неї випливає, що для точної локальної хмари барицентричний дефект має порядок квадрата її діаметра. Для випадкових ваг із розподілу Діріхле знайдено явну формулу математичного сподівання цього дефекту. Далі побудовано канонічну нормальну ретракцію: перетин квадрики з прямою, проведеною з барицентричної точки в напрямі градієнта. Одержано достатню умову існування локального дійсного кореня та оцінку зміщення згенерованої точки. У регулярному випадку це зміщення має порядок $O(\eta + D^2)$, де D є діаметром хмари, а η — похибкою її належності квадриці. Наведено евклідові й кутові оцінки локальності та чисельні приклади у просторах малої й високої розмірності.

Ключові слова: квадрика, барицентричні координати, опукла оболонка, неявна поверхня, локальна ретракція, розподіл Діріхле, нормальна корекція, геометрична генерація точок.

1. Вступ

Нехай скінченна хмара точок описує лише невелику частину невідомої або попередньо оціненої поверхні. У багатьох задачах недостатньо знайти довільну нову точку цієї

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-02-10
2020 Mathematics Subject Classification: 51N20, 15A63, 52A20, 65H04
© 2026 Поплавська О., Creative Commons Attribution 4.0 International Licence.

поверхні: вона повинна залишатися геометрично пов'язаною з початковою хмарою. Така вимога виникає в геометричному моделюванні даних, побудові синтетичних векторних представлень, локальному доповненні вибірок і дослідженні неявних моделей. Зокрема, барицентрично-проєкційну схему було використано в [1] для генерації діагностичних латентних точок на апроксимаційних поверхнях у редукованому просторі ембедінгів. У цій роботі ми відокремлюємо математичне ядро такої конструкції від конкретного прикладного контексту.

Квадрика є найпростішою неявною поверхнею, здатною відображати кривину другого порядку. Методи оцінювання алгебричних поверхонь за хмарами точок розвивалися, зокрема, в роботах про апроксимацію неявних кривих і поверхонь [13] та пряме найменшоквадратичне оцінювання конік [6]. Обчислювально таке оцінювання природно зводиться до задач лінійної алгебри та сингулярного розкладу [8]. Проте відновлення рівняння поверхні саме по собі не відповідає на питання, як породжувати на ній нові *локальні* точки.

Барицентричні координати дають природний спосіб побудови внутрішнього кандидата. Їхні базові властивості випливають із класичної евклідової та опуклої геометрії [2, 11, 12]; узагальнені барицентричні координати для опуклих множин детально досліджено в [14]. Однак опукла комбінація точок нелінійної поверхні здебільшого вже не лежить на цій поверхні. Тому барицентричну ініціалізацію потрібно доповнити контрольованим поверненням на квадрику.

Для регулярної неявної поверхні градієнт визначає нормальний напрям; загальні геометричні властивості таких поверхонь викладено в [5], а формули кривини для неявних кривих і поверхонь систематизовано в [7]. Повернення до нульового рівня функції природно пов'язане з методами Ньютона та їхніми локальними оцінками [3, 10]. Водночас для квадрики обмежуватися ітераційним кроком необов'язково: перетин із фіксованою прямою знаходиться точно з квадратного рівняння. Це дозволяє сформулювати явну локальну ретракцію та одержати оцінку її зміщення. Питання вибору стійкої форми квадратного кореня й нормування неявного рівняння належать до стандартного кола проблем чисельної стійкості [9].

Робота містить два основні результати. Перший результат описує барицентричний етап: значення квадратичного полінома в барицентричній точці точно виражається через попарні різниці початкових точок. Ця тотожність дає оцінку дефекту порядку $O(\eta + D^2)$, а також явну формулу його математичного сподівання для ваг із розподілу Діріхле; алгоритми генерування таких ваг можна знайти, наприклад, у [4]. Другий результат описує нормальний етап: за кількісної умови регулярності існує канонічний найближчий корінь на градієнтній прямій, причому відстань від нього до барицентричної точки також має порядок $O(\eta + D^2)$.

На відміну від [1], де поверхнева генерація була частиною експериментальної методики аналізу простору представлень, тут досліджується суто геометрична задача. Ми не стверджуємо, що згенерована точка відповідає реальному об'єкту вихідної предметної області. Предметом статті є лише її узгодженість із неявною квадрикою та локальною хмарою.

2. Постановка задачі та позначення

Нехай

$$F(x) = x^{\mathsf{T}} A x + b^{\mathsf{T}} x + c, \qquad A = A^{\mathsf{T}}, \tag{1}$$

де $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $b \in \mathbb{R}^r$, $c \in \mathbb{R}$. Відповідну квадрику позначимо через

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^r : F(x) = 0\}.$$

Рівняння $F = 0$ визначене з точністю до множення F на ненульову константу. Наведені нижче геометричні конструкції не залежать від такого множення.

Нехай задано хмару

$$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^r, \qquad N \geq 2,$$

точки якої лежать на Q або поблизу неї. Введемо величини

$$\eta = \max_{1\leq i\leq N} |F(x_i)|, \qquad D = \operatorname{diam}(X) = \max_{i,j} \|x_i - x_j\|, \qquad M = \|A\|_2. \tag{2}$$

Таким чином, $\eta = 0$ відповідає точній хмарі $X \subset Q$, тоді як $\eta > 0$ дозволяє врахувати шум або похибку апроксимації.

Виберемо ваги з симплекса

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}$$

і побудуємо барицентричну точку

$$v = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i \in \operatorname{conv}(X). \tag{3}$$

Ваги можуть бути детермінованими. Для випадкової генерації природним вибором є розподіл Діріхле

$$\lambda \sim \operatorname{Dir}(\alpha_1, \dots, \alpha_N), \qquad \alpha_i > 0. \tag{4}$$

Симетричний випадок $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = \alpha$ дає обмінно-симетричну схему відносно початкових точок. Малі значення α концентрують ваги поблизу вершин симплекса, а великі — поблизу рівновагового вектора $(1/N, \dots, 1/N)$.

Якщо квадрика попередньо оцінюється за хмарою, можна утворити матрицю $\mathcal{B}$, рядком якої є вектор усіх квадратичних, лінійних і сталого одночленів, обчислених у точці x_i, та розв'язати задачу

$$\min_{\|\theta\|_2=1} \|\mathcal{B}\theta\|_2. \tag{5}$$

Її розв'язком є правий сингулярний вектор, що відповідає найменшому сингулярному числу [8]. У цій статті спосіб оцінювання коефіцієнтів не є предметом окремого результату: надалі F вважається вже заданим і нормованим, а вплив неточної апроксимації враховується параметром η.

Для формулювання кутової локальності зафіксуємо референтну точку $a \in \mathbb{R}^r \setminus \operatorname{conv}(X)$. Для $x, y \neq a$ покладемо

$$\angle_a(x, y) = \angle(x - a, y - a), \qquad \alpha_X(a) = \max_{i,j} \angle_a(x_i, x_j),$$

а також

$$d = d_X(a) = \operatorname{dist}(a, \operatorname{conv}(X)) > 0. \tag{6}$$

Основною, незалежною від вибору a, характеристикою локальності буде відстань згенерованої точки до $\operatorname{conv}(X)$. Кутові оцінки розглядатимуться як додаткова властивість, корисна тоді, коли хмара спостерігається з природно визначеного зовнішнього центра.

3. Дефект і локальність барицентричної точки

Точка v з (3) належить опуклій оболонці X, але загалом не належить квадриці. Наступна теорема точно описує цей дефект. Вона одночасно охоплює точні та наближені хмари, детерміновані й випадкові ваги, а також кутову поведінку барицентричної ініціалізації.

Теорема 1 (Барицентричний дефект і кутова локальність)**.** *Нехай F задано формулою (1), $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^r$, $\lambda \in \Lambda_N$, а $v = \sum_i \lambda_i x_i$. Тоді виконується точна тотожність*

$$F(v) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i F(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^{\mathsf{T}} A (x_i - x_j). \tag{7}$$

Зокрема, для величин (2)

$$|F(v)| \le \eta + \frac{M}{2} D^2. \tag{8}$$

Якщо ваги мають розподіл (4) і $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, то

$$\mathbb{E}F(v) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} F(x_i) - \frac{1}{\alpha_0(\alpha_0+1)} \sum_{1 \le i < j \le N} \alpha_i \alpha_j (x_i - x_j)^{\mathsf{T}} A (x_i - x_j). \tag{9}$$

Крім того, нехай $a \notin \operatorname{conv}(X)$ і $\alpha_X(a) \le \pi/2$. Тоді $v \ne a$ та

$$\angle_a(v, x_j) \le \alpha_X(a), \qquad j = 1, \dots, N. \tag{10}$$

Отже, додавання v не збільшує кутового діаметра хмари відносно a.

Доведення. Оскільки A симетрична і $\sum_i \lambda_i = 1$, маємо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^{\mathsf{T}} A (x_i - x_j) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i^{\mathsf{T}} A x_i - \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \right)^{\mathsf{T}} A \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \right) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i^{\mathsf{T}} A x_i - v^{\mathsf{T}} A v. \end{aligned}$$

Лінійна і стала частини задовольняють

$$\sum_i \lambda_i (b^{\mathsf{T}} x_i + c) = b^{\mathsf{T}} v + c.$$

Віднімання попередньої рівності від $\sum_i \lambda_i F(x_i)$ дає (7).

З нерівності

$$|(x_i - x_j)^{\mathsf{T}} A (x_i - x_j)| \le M \|x_i - x_j\|^2 \le M D^2$$

та рівності $\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j = 1$ випливає

$$|F(v)| \le \sum_i \lambda_i |F(x_i)| + \frac{M}{2} D^2 \le \eta + \frac{M}{2} D^2.$$

Для розподілу Діріхле відомо, що

$$\mathbb{E}\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \qquad \mathbb{E}(\lambda_i\lambda_j) = \frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0(\alpha_0+1)}, \quad i \neq j.$$

Беручи математичне сподівання в (7) і об'єднуючи два симетричні доданки для кожної пари $i < j$, одержуємо (9).

Доведемо останню частину. Позначимо

$$u_i = x_i - a, \qquad w = v - a = \sum_i \lambda_i u_i, \qquad \alpha = \alpha_X(a).$$

Оскільки $\alpha \le \pi/2$, для кожного фіксованого j виконується

$$\langle u_i, u_j\rangle \ge \|u_i\|\|u_j\|\cos\alpha.$$

Тому

$$\begin{aligned}\langle w, u_j\rangle &= \sum_i \lambda_i\langle u_i, u_j\rangle \\ &\ge \|u_j\|\cos\alpha \sum_i \lambda_i\|u_i\| \\ &\ge \|u_j\|\|w\|\cos\alpha,\end{aligned}$$

де в останньому переході використано нерівність трикутника. Вектор w ненульовий, бо $a \notin \operatorname{conv}(X)$. Після ділення на $\|w\|\|u_j\|$ дістаємо

$$\cos\angle_a(v, x_j) \ge \cos\alpha,$$

що еквівалентно (10). □

Тотожність (7) можна також подати через зважену коваріаційну матрицю

$$C_\lambda = \sum_i \lambda_i (x_i - v)(x_i - v)^{\mathsf{T}}.$$

Справді,

$$F(v) = \sum_i \lambda_i F(x_i) - \operatorname{tr}(AC_\lambda). \tag{11}$$

Отже, відхилення барицентра від квадрики визначається взаємодією локального розсіювання хмари з квадратичною частиною F. Якщо $A \succeq 0$ і $X \subset Q$, то $F(v) \le 0$. Для невизначеної квадратичної форми знак дефекту залежить від напрямів попарних різниць.

У симетричному випадку $\alpha_i = \alpha$ та за умови $X \subset Q$ формула (9) набуває вигляду

$$\mathbb{E}F(v) = -\frac{\alpha}{N(N\alpha+1)}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^{\mathsf{T}}A(x_i - x_j). \tag{12}$$

При $\alpha \downarrow 0$ розподіл ваг концентрується поблизу вершин симплекса, і середній дефект прямує до нуля. При зростанні α ваги концентруються біля рівномірного барицентра, а середній дефект прямує до значення, визначеного рівними вагами. Таким чином, параметр Діріхле контролює не лише випадковість ініціалізації, а й очікуване відхилення від квадрики.

4. Нормальна ретракція на квадрику

Після побудови v потрібно повернути її на Q. Замість довільного напряму використаємо геометрично визначений вектор

$$g = \nabla F(v) = 2Av + b. \tag{13}$$

Якщо $g \neq 0$, пряма

$$x(t) = v + tg \tag{14}$$

є нормальною до рівневої поверхні $F = F(v)$ у точці v. Вона не зобов'язана проходити вздовж нормалі до Q у кінцевій точці, тому побудову коректніше називати *нормальною ретракцією*, а не ортогональною проєкцією.

Введемо позначення

$$\gamma = F(v), \qquad s = \|g\|^2, \qquad h = g^{\mathsf{T}} A g. \tag{15}$$

Теорема 2 (Локальна нормальна ретракція)**.** *Нехай виконано умови теореми 1, $g = \nabla F(v) \neq 0$ і*

$$4M|\gamma| < s. \tag{16}$$

Тоді

$$\Delta = s^2 - 4h\gamma > 0,$$

а число

$$t_* = -\frac{2\gamma}{s + \sqrt{\Delta}} \tag{17}$$

визначає точку

$$x^* = v + t_* g \in Q. \tag{18}$$

Серед дійсних точок перетину прямої (14) з Q точка x^* є найближчою до v. Для її зміщення $\delta = \|x^* - v\|$ справджуються оцінки

$$\delta \leq \frac{2|F(v)|}{\|\nabla F(v)\|} \leq \frac{2\eta + MD^2}{\|\nabla F(v)\|}. \tag{19}$$

Зокрема,

$$\operatorname{dist}(x^*, \operatorname{conv}(X)) \leq \delta, \qquad \max_j \|x^* - x_j\| \leq D + \delta. \tag{20}$$

Додатково нехай $a \notin \operatorname{conv}(X)$, $\alpha_X(a) \leq \pi/2$ і $\delta < d_X(a)$. Тоді

$$\max_j \angle_a(x^*, x_j) \leq \alpha_X(a) + \arcsin \frac{\delta}{d_X(a)}. \tag{21}$$

Якщо барицентрична точка має кутовий запас

$$\mu = \alpha_X(a) - \max_j \angle_a(v, x_j) > 0$$

і $\delta \leq d_X(a) \sin \mu$, то додавання x^* не збільшує кутового діаметра:

$$\alpha_{X \cup \{x^*\}}(a) = \alpha_X(a).$$

Доведення. Для $x(t) = v + tg$ точність квадратичного розкладу дає

$$F(v + tg) = \gamma + st + ht^2. \tag{22}$$

Оскільки

$$|h| = |g^{\mathsf{T}} A g| \leq M\|g\|^2 = Ms,$$

з (16) випливає

$$\Delta = s^2 - 4h\gamma \geq s^2 - 4|h\gamma| \geq s(s - 4M|\gamma|) > 0.$$

Якщо $h \neq 0$, корені рівняння (22) мають вигляд

$$t_\pm = \frac{-s \pm \sqrt{\Delta}}{2h}.$$

Корінь зі знаком плюс після раціоналізації дорівнює

$$\frac{-s + \sqrt{\Delta}}{2h} = -\frac{2\gamma}{s + \sqrt{\Delta}} = t_*.$$

Його модуль не перевищує модуля другого кореня, оскільки $|-s+\sqrt{\Delta}| \leq s+\sqrt{\Delta}$. Якщо $h = 0$, рівняння є лінійним і формула (17) переходить у $t_* = -\gamma/s$. Отже, $F(x^*) = 0$, а x^* є найближчим перетином уздовж вибраної прямої.

Далі, оскільки $s = \|g\|^2$ і $s + \sqrt{\Delta} \geq s$, маємо

$$\delta = |t_*|\|g\| = \frac{2|\gamma|\|g\|}{s + \sqrt{\Delta}} \leq \frac{2|\gamma|}{\|g\|}.$$

Друга нерівність у (19) випливає з (8). Оскільки $v \in \mathrm{conv}(X)$, перша оцінка в (20) є безпосереднім наслідком означення відстані. Також $\|v - x_j\| \leq D$ для кожного j, звідки за нерівністю трикутника одержуємо другу оцінку.

Залишається довести кутову частину. Покладемо $y = v - a$ та $z = x^* - a$. Тоді $\|z - y\| = \delta < d_X(a) \leq \|y\|$. Через це кут $\varphi = \angle(y, z)$ є гострим, а відстань від y до прямої, породженої z, не перевищує $\|z - y\|$. Отже,

$$\|y\| \sin\varphi \leq \delta, \qquad \varphi \leq \arcsin\frac{\delta}{\|y\|} \leq \arcsin\frac{\delta}{d_X(a)}.$$

За теоремою 1, $\angle_a(v, x_j) \leq \alpha_X(a)$. Трикутна нерівність для сферичної відстані дає

$$\angle_a(x^*, x_j) \leq \angle_a(x^*, v) + \angle_a(v, x_j),$$

звідки випливає (21). Якщо $\delta \leq d_X(a)\sin\mu$, то $\angle_a(x^*, v) \leq \mu$, а тому $\angle_a(x^*, x_j) \leq \alpha_X(a)$ для всіх j. □

У точному випадку $X \subset Q$ достатньою умовою для (16) є

$$2M^2D^2 < \|\nabla F(v)\|^2, \tag{23}$$

а оцінка зміщення спрощується до

$$\delta \leq \frac{MD^2}{\|\nabla F(v)\|}. \tag{24}$$

Таким чином, на регулярній частині квадрики нормальна корекція має другий порядок за діаметром локальної хмари. Для наближеної хмари достатньо вимагати

$$4M\left(\eta + \frac{M}{2}D^2\right) < \|\nabla F(v)\|^2,$$

а зміщення має порядок $O(\eta + D^2)$ за умови, що градієнт відокремлений від нуля.

Важливо, що умова (16), точка (18) і перша оцінка (19) не змінюються при заміні F на κF, $\kappa \neq 0$. Отже, конструкція узгоджена з проєктивною неоднозначністю неявного рівняння квадрики.

5. Зв'язок із нормальною ітерацією

Один нестабілізований крок нормальної корекції має вигляд

$$\mathcal{N}(x) = x - \frac{F(x)}{\|\nabla F(x)\|^2}\nabla F(x), \qquad \nabla F(x) \neq 0. \tag{25}$$

Це ньютонівський крок для одного скалярного рівняння, де серед усіх розв'язків лінеаризованої умови вибрано корекцію мінімальної евклідової норми [3, 10]. Для квадратичного F залишок після одного кроку можна обчислити без остачі. Якщо $g = \nabla F(x)$, то

$$F(\mathcal{N}(x)) = \frac{F(x)^2}{\|g\|^4}\, g^{\mathsf{T}} A g. \tag{26}$$

Справді, лінійний доданок у розкладі $F(x+q)$ при $q = -F(x)g/\|g\|^2$ точно компенсує $F(x)$, і залишається лише $q^{\mathsf{T}}Aq$. Звідси

$$|F(\mathcal{N}(x))| \leq \frac{M}{\|\nabla F(x)\|^2}|F(x)|^2.$$

Отже, поблизу регулярної частини квадрики залишок зменшується квадратично.

Формула (17) має іншу перевагу: вона одразу дає точний, з математичного погляду, перетин із квадрикою вздовж початкової нормальної прямої. Розклад t_* за малим γ починається з

$$t_* = -\frac{\gamma}{s} + O(\gamma^2),$$

тому точка $\mathcal{N}(v)$ є наближенням побудованої ретракції першого порядку за параметром γ, а її поверхневий залишок має другий порядок.

У практичних реалізаціях інколи використовують знаменник $\|\nabla F(x)\|^2 + \varepsilon$. Фіксоване абсолютне ε залежить від масштабу рівняння F. Масштабно узгодженим варіантом є попереднє нормування вектора коефіцієнтів або відносне демпфування

$$\|\nabla F(x)\|^2 + \varepsilon_x, \qquad \varepsilon_x = \tau\|\nabla F(x)\|^2, \quad \tau > 0.$$

Якщо градієнт менший за заданий чисельний поріг, кандидат слід відхилити, а не компенсувати сингулярність довільною сталою. Така практика відповідає загальним принципам стійких обчислень [9].

6. Алгоритм генерації

Теореми 1 і 2 приводять до такого алгоритму для однієї нової точки.

Крок 1. Нормувати вектор коефіцієнтів неявного полінома F та обчислити параметри M, D і η.

Крок 2. Вибрати $\lambda \in \Lambda_N$ детерміновано або згенерувати $\lambda \sim \mathrm{Dir}(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$; покласти $v = \sum_i \lambda_i x_i$.

Крок 3. Обчислити $\gamma = F(v)$, $g = \nabla F(v)$, $s = \|g\|^2$ і $h = g^{\mathsf{T}}Ag$. Якщо $\|g\|$ менша за поріг регулярності, відхилити кандидата.

Крок 4. Обчислити $\Delta = s^2 - 4h\gamma$. Якщо Δ від'ємна лише в межах похибки округлення, замінити її на нуль; при істотно від'ємному значенні відхилити кандидата або перейти до іншої барицентричної точки.

Крок 5. Обчислити локальний корінь за стійкою формулою

$$t_* = -\frac{2\gamma}{s + \sqrt{\Delta}}$$

і покласти $x^* = v + t_* g$.

Крок 6. Перевірити нормований залишок

$$\rho_F(x^*) = \frac{|F(x^*)|}{\|\nabla F(x^*)\|}$$

та локальну умову $\|x^* - v\| \le R$, де R задає допустимий масштаб. За потреби перевірити кутову умову (21).

Якщо ваги мають неперервний розподіл Діріхле, то за невироджених даних імовірність точного збігу v з однією з фіксованих точок x_i дорівнює нулю. Проте умова $x^* \notin X$ не є суто геометричним наслідком і повинна перевірятися явно з урахуванням чисельного допуску. Аналогічно, теореми не визначають розподілу точок на всій квадриці: вони гарантують локальність щодо конкретної хмари.

Для квадрик формула (17) усуває потребу в багаторазовій ітерації. Нормальну ітерацію (25) доцільно залишати як універсальніший варіант для неявних поверхонь вищого степеня, де рівняння вздовж прямої вже не обов'язково має зручний точний розв'язок.

7. Чисельні приклади

Симетрична хмара на одиничному колі. Розглянемо квадрику

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

і три точки

$$x_1 = (\cos\vartheta, -\sin\vartheta), \qquad x_2 = (1, 0), \qquad x_3 = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$$

з рівними вагами $\lambda_i = 1/3$. Тоді

$$v = \left(\frac{1 + 2\cos\vartheta}{3}, 0\right), \qquad D = 2\sin\vartheta.$$

Для $0 < \vartheta < \pi/2$ найближчим перетином нормальної прямої з колом є $x^* = (1, 0)$, тому

$$\delta = \|x^* - v\| = \frac{2(1 - \cos\vartheta)}{3}, \qquad \frac{\delta}{D^2} = \frac{1}{6(1 + \cos\vartheta)}. \tag{27}$$

При $\vartheta \to 0$ останнє відношення прямує до $1/12$, що безпосередньо підтверджує квадратичний порядок зміщення.

Табл. 1. Зміщення нормальної ретракції для симетричної хмари на колі.

ϑ	D	δ	δ/D^2
5°	0.17431	0.00254	0.08349
10°	0.34730	0.01013	0.08397
20°	0.68404	0.04020	0.08593
30°	1.00000	0.08932	0.08932

Цей приклад також ілюструє знак барицентричного дефекту. Оскільки $A = I$ і $F(x_i) = 0$, з (7) випливає

$$F(v) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \|x_i - x_j\|^2 \le 0.$$

Барицентрична точка лежить усередині кола, а нормальна ретракція повертає її на найближчу вздовж радіального напряму частину границі.

Локальні хмари у просторі $\mathbb{R}^{10}$. Для перевірки поведінки конструкції у вищій розмірності розглянемо одиничну сферу $S^9 \subset \mathbb{R}^{10}$, задану тим самим неявним рівнянням $F(x) = \|x\|^2 - 1$. Для кожного ϑ утворено $N = 100$ точок

$$x_i = (\cos\vartheta, \sin\vartheta\, u_i), \qquad u_i \in S^8,$$

де u_i згенеровано незалежно з рівномірного розподілу на S^8. Для кожної хмари виконано 2000 генерацій із вагами $\lambda \sim \mathrm{Dir}(1, \dots, 1)$. Використано генератор PCG64 із початковим значенням 20260913. Оскільки для сфери нормальна ретракція має вигляд $x^* = v/\|v\|$, точне зміщення дорівнює $\delta = 1 - \|v\|$.

Табл. 2. Середні характеристики барицентричної генерації на S^9.

ϑ, рад	D	$\mathbb{E}\lvert F(v)\rvert$	$\mathbb{E}\delta$	$\mathbb{E}\delta/D^2$
0.05	0.09740	0.002449	0.001225	0.12916
0.10	0.19455	0.009770	0.004897	0.12938
0.20	0.38715	0.038693	0.019537	0.13035
0.30	0.57589	0.085569	0.043741	0.13189

Стабільність останнього стовпця таблиці 2 узгоджується з оцінкою (24): при зменшенні локального масштабу середнє зміщення поводиться як стала, помножена на D^2. Цей експеримент не є доказом теореми, але показує, що квадратичний порядок не є особливістю двовимірного прикладу.

8. Обговорення

Одержані результати пояснюють, чому барицентрична ініціалізація є природною для локальної генерації на квадриці. Її перевага полягає не лише в належності до опуклої оболонки. Для квадратичного полінома дефект барицентра має точну парну структуру (7); за малого діаметра хмари він є величиною другого порядку. Тому за регулярності градієнта повернення на поверхню потребує лише квадратично малого зміщення.

Розподіл Діріхле дає керований перехід між двома режимами. При малих α_i нові барицентри тяжіють до початкових точок і мають малий дефект, але слабко заповнюють внутрішність опуклої оболонки. При великих параметрах вони концентруються біля детермінованого центра і можуть втрачати різноманітність. Формула (9) дозволяє аналізувати цей компроміс з урахуванням знака та напрямів квадратичної форми, а не лише через евклідові відстані.

Умова (16) має прозорий геометричний зміст. Вона порівнює поверхневий дефект із величиною градієнта та квадратичною кривиною. Біля сингулярної точки, де ∇F малий, навіть малий алгебричний залишок не гарантує близького перетину вздовж вибраного

напряму. Для невизначених або незв'язних квадрик ця умова також запобігає переходу до віддаленої компоненти: вибирається корінь, який неперервно прямує до нуля разом із $F(v)$.

Побудована точка не обов'язково є найближчою до v серед усіх точок Q. Теорема гарантує її найближчість лише серед перетинів конкретної нормальної прямої (14). Знаходження справжньої ортогональної проєкції потребує розв'язання системи умов Лагранжа і становить іншу задачу. Для локальної генерації перевагою запропонованої ретракції є явна формула, масштабна інваріантність і оцінка зміщення, яка не залежить безпосередньо від розмірності простору.

Кутова частина результату є додатковою, а не універсальною. У центрованих координатах, де референтна точка належить $\mathrm{conv}(X)$, величина $d_X(a)$ дорівнює нулю і відповідна оцінка не застосовується. У такій ситуації природною мірою локальності залишається $\mathrm{dist}(x^*, \mathrm{conv}(X)) \leq \delta$. Це розмежування важливе для застосувань після центрованого PCA: опукла внутрішність гарантується безумовно, а кутова стабільність потребує зовнішнього референтного центра або окремої емпіричної перевірки.

Нарешті, результати стосуються геометричної, а не предметної валідності. Навіть точка, що точно лежить на апроксимаційній квадриці та має мале зміщення від опуклої оболонки, може не відповідати реальному тексту, зображенню чи іншому об'єкту. Тому в прикладних задачах геометричну ретракцію необхідно доповнювати критеріями вихідної предметної області.

Висновки. Запропоновано математичне обґрунтування двоетапної барицентричної генерації точок на неявно заданій квадриці. Перший основний результат встановлює точну тотожність для барицентричного дефекту та показує, що для локальної точної хмари цей дефект має порядок D^2. Та сама тотожність дає явний середній дефект для ваг із розподілу Діріхле і дозволяє пов'язати параметри випадкового генерування з квадратичною геометрією хмари.

Другий результат будує канонічну нормальну ретракцію через найближчий корінь квадратного рівняння на градієнтній прямій. За кількісної умови регулярності згенерована точка точно належить квадриці, а її відстань до барицентричної точки та опуклої оболонки має порядок $O(\eta + D^2)$. Отже, у регулярній локальній області запропонована схема не лише формально повертає кандидата на поверхню, а й зберігає контрольований геометричний масштаб початкової хмари.

Подальшим напрямом є перенесення тотожності дефекту й оцінок ретракції на неявні поверхні степеня понад два. У такому випадку точний квадратний корінь замінюється локальною ітерацією, а додаткові члени розкладу визначатимуть відхилення від установленого тут квадратичного закону.

Конфлікт інтересів і етика. Автор заявляє, що не має конфліктів інтересів. Автор також заявляє про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автор заявляє про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Bedratyuk L. Controlled paraphrase geometry in sentence embedding space: Local manifold modeling and latent probing. 2026. (arXiv Preprint arXiv:2605.01073). URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2605.01073
2. Coxeter H. S. M. Introduction to geometry (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons, 1969. 470 p.

3. Deuflhard P. Newton methods for nonlinear problems: Affine invariance and adaptive algorithms. Berlin: Springer. 2004. 424 p.
4. Devroye L. Non-uniform random variate generation. New York: Springer-Verlag. 1986. 843 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8643-8
5. do Carmo M. P. Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Prentice-Hall, 1976. 504 p.
6. Fitzgibbon A. W., Pilu M., Fisher R. B. Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1999. Vol. 21, No. 5. P. 476–480. DOI: https://doi.org/10.1109/34.765658
7. Goldman R. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. 2005. Vol. 22, No. 7. P. 632–658. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cagd.2005.06.005
8. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix computations (4th ed.). Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
9. Higham N. J. Accuracy and stability of numerical algorithms (2nd ed.). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 680 p.
10. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization (2nd ed.). New York: Springer, 2006. 664 p.
11. Rockafellar R. T. Convex analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. 451 p.
12. Schneider R. Convex bodies: The Brunn–Minkowski theory (2nd expanded ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 760 p.
13. Taubin G. Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1991. Vol. 13, No. 11. P. 1115–1138. DOI: https://doi.org/10.1109/34.103273
14. Warren J., Schaefer S., Hirani A. N., Desbrun M. Barycentric coordinates for convex sets. *Advances in Computational Mathematics*. 2007. Vol. 27, No. 3. P. 319–338. DOI: https://doi.org/10.1007/s10444-005-9008-6

UDC 515.1:519.6

Barycentric retraction onto implicit quadrics: defect identities and locality bounds

Olena Poplavska

Abstract. We study the construction of new points on an implicitly defined quadric from a finite local point cloud lying on or near the quadric. The proposed construction consists of two stages: barycentric initialization inside the convex hull of the cloud and a return to the quadric along the gradient direction. The first main result is an exact identity expressing the value of a quadratic polynomial at a barycentric point through the residuals at the initial points and the pairwise increments of the associated quadratic form. Consequently, for an exact local cloud the barycentric defect is of the order of the squared cloud diameter. An explicit expectation formula is also obtained for Dirichlet-distributed barycentric weights. The second result defines a canonical normal retraction as the intersection of the quadric with the line through the barycentric point in the gradient direction. A sufficient condition for the existence of a local real root and a bound for the displacement of the generated point are proved. In the regular case, the displacement is $O(\eta+D^2)$, where D is the cloud diameter and η measures the residual error of the cloud with respect to the quadric. Euclidean and angular locality estimates are provided, together with numerical examples in low- and high-dimensional spaces.

Keywords: quadric, barycentric coordinates, convex hull, implicit surface, local retraction, Dirichlet distribution, normal correction, geometric point generation.

References

1. Bedratyuk, L. (2026). *Controlled Paraphrase Geometry in Sentence Embedding Space: Local Manifold Modeling and Latent Probing*. arXiv:2605.01073. https://arxiv.org/abs/2605.01073.
2. Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry* (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York.
3. Deuflhard, P. (2004). *Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer, Berlin.
4. Devroye, L. (1986). *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8643-8.
5. do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey.
6. Fitzgibbon, A. W., Pilu, M., & Fisher, R. B. (1999). *Direct least square fitting of ellipses*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **21**(5), 476–480. https://doi.org/10.1109/34.765658.
7. Goldman, R. (2005). *Curvature formulas for implicit curves and surfaces*. Computer Aided Geometric Design, **22**(7), 632–658. https://doi.org/10.1016/j.cagd.2005.06.005.
8. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Matrix Computations* (4th ed.), Johns Hopkins University Press, Baltimore.
9. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
10. Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer, New York.
11. Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
12. Schneider, R. (2014). *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory* (2nd expanded ed.). Cambridge University Press, Cambridge.
13. Taubin, G. (1991). *Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **13**(11), 1115–1138. https://doi.org/10.1109/34.103273.
14. Warren, J., Schaefer, S., Hirani, A. N., & Desbrun, M. (2007). *Barycentric coordinates for convex sets*. Advances in Computational Mathematics, **27** (3), 319–338. https://doi.org/10.1007/s10444-005-9008-6.

Про автора / About the author

Олена Поплавська, старший викладач, кафедра фізики, математики та інформатики, Хмельницький національний університет, вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна;

Olena Poplavska, Senior Lecturer, Department of Physics, Mathematics and Computer Science, Khmelnytskyi National University, 11 Instytutska Street, Khmelnytskyi 29016, Ukraine.

Отримано / Received 13.09.2026
Прийнято до друку / Accepted 15.10.2026
Опубліковано / Published 25.11.2026