М І Ф

**Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 13–26.**
*Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 13–26.*
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.21

# Просторово-часовий стохастичний інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда

**Олег Бугрій[1], Наталія Бугрій[2], Віталій Власов[3]**

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
oleh.buhrii@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1698-5559

[2] Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
nataliia.v.buhrii@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1554-7303

[3] Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
vitaly.vlasov@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0003-8007-2900

*Анотація.* В статті розглянуто один з варіантів стохастичного інтегралу від невипадкової функції багатьох змінних за випадковим вінерівським процесом. Наведено означення такого інтегралу та доведено деякі його елементарні властивості.

*Ключові слова:* стохастичний інтеграл, інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда, випадковий процес Вінера.

## 1. Вступ

Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – імовірністний простір, тобто, $\mathbb{S}$ – деяка непорожня множина (простір елементарних подій), $\mathcal{F}$ – $\sigma$-алгебра підмножин $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}$ – імовірністна міра на $\mathbb{S}$. Нагадаємо, що підмножина $A \subset \mathbb{S}$ називається *подією*, точка $\omega \in \mathbb{S}$ – *елементарною подією*, а $\mathbb{P}(A)$ позначає *ймовірність* події $A$. Якщо деяка властивість виконується з ймовірністю одиниця, то традиційно писатимемо, що вона виконується *майже напевно (м.н.)*.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-02

.

Зафіксуємо числа $T > 0$ та $n, d \in \mathbb{N}$. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з ліпшицевою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0, T)$, $\Pi_{0,T} = \Omega \times (0, T) \times \mathbb{S}$, $\Theta_{0,T} = (0, T) \times \mathbb{S}$. Метою статті є введення одного з варіантів стохастичного інтегралу

$$\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\ dxdW(t,\omega) \tag{1}$$

за вінерівським процесом $W = W(t, \omega)$, $(t, \omega) \in \Theta_{0,T}$, та вивчення його властивостей.

Отримані результати, зокрема, узагальнюють факти з [1] та [2], де було розглянуто випадок незалежності підінтегральної функції від просторової змінної $x$.

## 2. Постановка задачі

При моделювання багатьох явищ оточуючої дійсності слід враховувати випадковий характер чинників, що впливають на явище. Для ілюстрації цієї тези розглянемо дуже спрощену математичну модель процесу руху, наприклад, човна озером вздовж прямої у вітряну погоду. Введемо одновимірну систему координат так, щоб її додатний напрям співпадав з напрямком руху човна. Нехай $\eta(t)$ – відстань човна в час $t \geq 0$ від деякої початкової точки. "Тяглова сила", тобто мотор або весла, забезпечує в безвітряну погоду човну задану швидкість $\mu(t)$. Тоді рух човна, тобто його положення стосовно початку координат, описується задачею Коші для звичайного диференціального рівняння (ЗДР)

$$\eta'(t) = \mu(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\eta(0) = \eta_0. \tag{3}$$

Зрозуміло, що розв'язком (2)-(3) є $\eta(t) = \eta_0 + \int_0^t \mu(\tau)\ d\tau$, $t \geq 0$. Проте, якщо присутні різкі пориви вітру, то рівняння руху (2) слід модифікувати, наприклад, до вигляду

$$\eta'(t) = \mu(t) + h(t)W'(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

де вираз $h(t)W'(t)$ відповідає за швидкість вітру. Причому $h$ дійснозначна функція, а $W'$ – випадкова величина, так званий, білий шум (сталої швидкості вітру, фактично, нема), який ми (формально!) вважаємо похідною деякої випадкової функції – вінерівського процесу $W = W(t, \omega)$, $(t, \omega) \in \Theta_{0,T}$. Формальний розв'язок задачі (4), (3) теж буде випадковим процесом і матиме вигляд

$$\eta(t,\omega) = \eta_0 + \int\limits_0^t \mu(t)\ dt + \int\limits_0^t h(t)\ dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{5}$$

останній інтеграл в якому є, наприклад, стохастичним інтегралом Іто від детермінованої (тобто, не випадкової) функцій $h$ за вінерівським процесом $W$.

Стохастичне диференціальне рівняння (СДР) вигляду (4) є певним узагальненням ЗДР (2). Якщо замість ЗДР розглянути рівняння з частинними похідними (РЧП) для знаходження деякої функції $u = u(x, t)$, $(x, t) \in Q_{0,T}$, то його природним узагальненням є стохастичне рівняння з частинними похідними (СРЧП), при дослідженні якого треба працювати, зокрема, з інтегралами вигляду (1). Тому тематика статті є актуальною.

Оскільки поняття інтегралу за випадковим процесом можна ввести по-різному (див., наприклад, [3]), то ми зосередимо свою увагу на випадку, коли в (1) функція $h$ є детермінованою, а функція $W$ є стандартним вінерівським процесом (див. далі) в сенсі означення з [1]. Розглянемо питання про коректність введеного інтегралу та наведемо деякі його елементарні властивості.

## 3. Допоміжні позначення, означення і твердження

Розіб'ємо цей підрозділ на кілька частин і почнемо вивчення зазначених вище питань з нагадування необхідних нам далі понять та властивостей.

**Стандартні простори Лебега інтегровних функцій.** Нехай $(\mathbb{S}_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ – $\sigma$-скінченний вимірний простір. Через $L^q(\mathbb{S}_1)$ позначатимемо *стандартний простір Лебега* дійснозначних функцій $z : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}$ зі стандартною нормою (див. [4]), де $q \in [1, \infty]$. Нагадаємо, зокрема, що при $q = 2$ простір $L^2(\mathbb{S}_1)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(z, v)_{L^2(\mathbb{S}_1)} := \int\limits_{\mathbb{S}_1} z(x)v(x)\, d\mu_1(x), \quad z, v \in L^2(\mathbb{S}_1), \tag{6}$$

та відповідною нормою

$$||z||_{L^2(\mathbb{S}_1)} := \Big(\int\limits_{\mathbb{S}_1} |z(x)|^2\, d\mu_1(x)\Big)^{1/2}, \quad z \in L^2(\mathbb{S}_1).$$

Для деякого банахового простору $(Y, ||\cdot||_Y)$ через $L^q(\mathbb{S}_1; Y)$ позначатимемо відповідних *простір Лебега-Бохнера* $Y$-значних функцій $u : \mathbb{S}_1 \to Y$ зі стандартною нормою (див. [5, §8.2]). Для кожного $u \in L^q(\mathbb{S}_1; Y)$ визначено такий $Y$-значний інтеграл Бохнера:

$$\int\limits_{\mathbb{S}_1} u(x)\, d\mu_1(x) \in Y.$$

У випадку $\mathbb{S}_1 = [0, T]$ для спрощення писатимемо $L^q(0, T; Y)$ замість $L^q([0, T]; Y)$ і т.д. Ми використовуватимемо такі відомі факти.

**Твердження 1.** *(нерівність Гельдера, [4, с. 92]). Нехай $q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Тоді якщо $f \in L^q(\mathbb{S}_1)$ та $g \in L^{q'}(\mathbb{S}_1)$, то $fg \in L^1(\mathbb{S}_1)$ та*

$$\int\limits_{\mathbb{S}_1} |f(x)g(x)|\, d\mu_1(x) \le ||f; L^q(\mathbb{S}_1)|| \cdot ||g; L^{q'}(\mathbb{S}_1)||. \tag{7}$$

Нехай $(\mathbb{S}_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ – деякий інший $\sigma$-скінченний вимірний простір. Тоді ми стандартним чином можемо визначити вимірний простір $(\mathbb{S}_3, \mathcal{F}_3, \mu_3)$ для декартового добутку просторів $\mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$.

**Твердження 2.** *(теорема Тонеллі, [4, с. 91]). Якщо $F(x, y) : \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2 \to \mathbb{R}$ є вимірною функцією, $\int_{\mathbb{S}_2} |F(x, y)|\, d\mu_2(y) < \infty$ майже для всіх (м.д.в.) $x \in \mathbb{S}_1$ та виконується оцінка $\int_{\mathbb{S}_1} (\int_{\mathbb{S}_2} |F(x, y)|\, d\mu_2(y))\, d\mu_1(x) < \infty$, то $F \in L^1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2)$.*

**Твердження 3.** *(теорема Фубіні, [4, с. 91]). Нехай $F \in L^1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2)$. Тоді*

*1) $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{S}_2)$ м.д.в. $x \in \mathbb{S}_1$ та $\int_{\mathbb{S}_2} F(x, y)\, d\mu_2(y) \in L^1(\mathbb{S}_1)$;*

*2) $F(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{S}_1)$ м.д.в. $y \in \mathbb{S}_2$ та $\int_{\mathbb{S}_1} F(x, y)\, d\mu_1(x) \in L^1(\mathbb{S}_2)$;*

*3) виконується рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{S}_1} d\mu_1(x) \int\limits_{\mathbb{S}_2} F(x, y)\, d\mu_2(y) = \int\limits_{\mathbb{S}_2} d\mu_2(y) \int\limits_{\mathbb{S}_1} F(x, y)\, d\mu_1(x) = \int\limits_{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2} F(x, y)\, d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Зауважимо, що з тверджень 2-3 для $q \in [1, +\infty)$ випливає (див. теорему 8.28 [5, с. 218]) така низка рівностей:

$$L^q(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) = L^q(\mathbb{S}_1; L^q(\mathbb{S}_2)) = L^q(\mathbb{S}_2; L^q(\mathbb{S}_1)). \tag{8}$$

**Банахові простори випадкових величин.** Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – імовірністний простір. Традиційно писатимемо $\mathbb{P}(d\omega)$ замість $d\mathbb{P}(\omega)$ чи $d\mathbb{P}$ при вивченні інтегралів по $\mathbb{S}$.

Нагадаємо, що $\mathcal{F}$-вимірне відображення $\xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ називається *випадковою величиною*, а невід'ємна інтегровна функція $q_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є *щільністю* $\xi$, якщо

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \int\limits_B q_\xi(y)\, dy$$

для всіх борелівських підмножин $B \subset \mathbb{R}$. Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, то *математичним сподіванням* випадкової величини $f(\xi)$ буде вираз

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \int\limits_{\mathbb{S}} f(\xi(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) q_\xi(y)\, dy. \tag{9}$$

Нагадаємо деякі стандартні властивості математичного сподівання.

**1**$^o$. Якщо $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}\,\xi \geq 0$.

**2**$^o$. Якщо $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha\mathbb{E}\,\xi + \beta\mathbb{E}\,\eta$.

**3**$^o$. Якщо $\xi \leq \eta$, то $\mathbb{E}\,\xi \leq \mathbb{E}\,\eta$.

**4**$^o$. Виконується нерівність $|\mathbb{E}\,\xi| \leq \mathbb{E}\,|\xi|$.

**5**$^o$. Якщо $0 < \lambda < \mu$, то виконується *нерівність Ляпунова* $(\mathbb{E}[|\xi|^\lambda])^{1/\lambda} \leq (\mathbb{E}[|\xi|^\mu])^{1/\mu}$.

**6**$^o$. Якщо $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\mathbb{E}[|\xi|^p] < +\infty$, $\mathbb{E}[|\eta|^{p'}] < +\infty$, то $\mathbb{E}\,|\xi\eta| < +\infty$ та виконується *нерівність Гельдера*

$$\mathbb{E}\,|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}[|\xi|^p])^{1/p} \cdot (\mathbb{E}[|\eta|^{p'}])^{1/p'}.$$

**7**$^o$. Якщо $\mathbb{E}[|\xi|^p] < +\infty$, $\mathbb{E}[|\eta|^p] < +\infty$, де $1 \leq p < +\infty$, то $\mathbb{E}[|\xi + \eta|^p] < +\infty$ та виконується *нерівність Мінковського*

$$(\mathbb{E}[|\xi + \eta|^p])^{1/p} \leq (\mathbb{E}[|\xi|^p])^{1/p} + (\mathbb{E}[|\eta|^p])^{1/p}.$$

**8**$^o$. Якщо $\xi = 0$ м.н., то $\mathbb{E}\,\xi = 0$.

**9**$^o$. Якщо $\xi \geq 0$, $\mathbb{E}\,\xi = 0$, то $\xi = 0$ м.н.

Нехай $q \in [1, +\infty)$. Дамо таке означення.

**Означення 4.** *Випадковим простором Лебега* $L_q$ називається множина всіх випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом порядку $q$, тобто $L_q$ є множиною всіх випадкових величин $\xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, для яких $\mathbb{E}[|\xi|^q] < +\infty$ (при цьому традиційно вважається, що $\xi = \eta$ в сенсі простору $L_q$, якщо $\xi = \eta$ м.н.).

Зрозуміло, що $L_q = L^q(\mathbb{S})$. Проте для зручності та щоб підкреслити випадковий характер елементів простору $L_q$, ми називаємо цей простір "випадковим" та пишемо $L_q$ замість $L^q(\mathbb{S})$. Аналогічно ми писатимемо $L_q(\mathbb{S}; Y)$ замість $L^q(\mathbb{S}; Y)$ для відповідного *"випадкового" простору Лебега-Бохнера* інтегровних $Y$-значних випадкових величин. З огляду на (9) та **1**$^o$-**9**$^o$, $L_q$ є банаховим простором стосовно стандартної норми

$$||u||_{L_q} = \left(\mathbb{E}\left[|\xi|^q\right]\right)^{1/q} \equiv \Big(\int\limits_{\mathbb{S}} |\xi(\omega)|^q\, \mathbb{P}(d\omega)\Big)^{1/q}.$$

У випадку $q = 2$ простір $L_2$ є гільбертовим зі скалярним добутком типу (6), який ми запишемо у вигляді

$$(\xi, \eta)_2 := \mathbb{E}\left[\xi\eta\right].$$

Зазначимо також, що $L_p \subset L_q$ для $p \geq q$.

**Означення 5.** Послідовність випадкових величин $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до випадкової величини $\xi$ *в середньому квадратичному*, якщо вона збігається до $\xi$ в сенсі простору $L_2$, тобто якщо $||\xi_k - \xi||_{L_2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При цьому писатимемо

$$\xi = \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_k \quad \text{(limit in mean)}.$$

**Лема 6.** *Якщо* $\xi = \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_k$, *то* $\mathbb{E}\,\xi = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\,\xi_k$, *тобто*

$$\mathbb{E}\left[\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_k\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\xi_k\right]. \tag{10}$$

*Доведення.* З властивостей $\mathbf{2}^o$, $\mathbf{4}^o$ та нерівності Ляпунова одержимо оцінку

$$|\mathbb{E}\,\xi_m - \mathbb{E}\,\xi| = |\mathbb{E}\left[\xi_m - \xi\right]| \leq \mathbb{E}\left[|\xi_m - \xi|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|\xi_m - \xi|^2\right]\right)^{1/2} = ||\xi_m - \xi||_{L_2},$$

яка і доводить (10). □

**Елементарна класифікація та приклади випадкових процесів.** Нехай знову $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, $I$ – деяка множина індексів.

Припустимо, що кожному індексу $t \in I$ відповідає випадкова величина вигляду $\eta(t) : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$. Сукупність цих величин насправді є функцією двох змінних:

$$\eta = \eta(t, \omega), \quad t \in I, \quad \omega \in \mathbb{S}.$$

При цьому $t$ часто інтерпретується як час.

**Означення 7.** Якщо $I$ – злічена множина (наприклад, $I$ – послідовність чи $I = \mathbb{N}$), то функція $\eta = \eta(t, \omega)$ називається *випадковою послідовністю*. Якщо $I$ – інтервал з $\mathbb{R}$, то функція $\eta = \eta(t, \omega)$ називається *випадковим процесом*, а іноді – *випадковим процесом з неперервним часом*. Якщо $I \subset \mathbb{R}^k$, де $k \geq 2$, то функція $\eta = \eta(t, \omega)$ називається *випадковим полем* (див., наприклад, [6, с. 426-427]).

Зараз вивчатимемо саме випадкові процеси (з неперервним часом). Отож, нехай далі $I$ – зв'язна підмножина в $\mathbb{R}^1$, наприклад, $I = [0, T]$, де $T > 0$ – фіксоване число. Нагадаємо, що два процеси $\eta_1$ та $\eta_2$ називаються *стохастично еквівалентними* (див. [7]), якщо $\mathbb{P}\left\{\omega \in \mathbb{S} \mid \eta_1(t, \omega) = \eta_2(t, \omega)\right\} = 1$, тобто $\eta_1(t) = \eta_2(t)$ м.н. для всіх $t \in [0, T]$. В цьому випадку процес $\eta_2$ називають *модифікацією* $\eta_1$ і навпаки. Традиційно, стохастично еквівалентні процеси ми не розрізнятимемо.

**Означення 8.** Для кожного $t \in [0, T]$ випадкова величина $\eta(t) \equiv \eta(t, \cdot)$, тобто функція

$$\mathbb{S} \ni \omega \mapsto \eta(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$$

називається *значенням випадкового процесу* в момент часу $t$. Для кожного $\omega \in \mathbb{S}$ числова функція $\eta(\omega) \equiv \eta(\cdot, \omega)$, тобто функція

$$[0, T] \ni t \mapsto \eta(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$$

називається *траєкторією, або реалізацією випадкового процесу* $\eta$.

**Означення 9.** Функція двох змінних

$$W = W(t, \omega) : [0, T] \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^1$$

називається *стандартним вінерівським процесом* (див. [1, с. 38]), якщо:

1) $W(0, \cdot) = 0$ м.н.;
2) для всіх $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, що $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$ незалежними є такі випадкові величини:

$$W(t_1), \quad W(t_2) - W(t_1), \quad \dots, \quad W(t_m) - W(t_{m-1});$$

3) для всіх $t, s$ таких, що $t \geq s \geq 0$ випадкова величина $W(t) - W(s)$ має розподіл $N(0, t-s)$, тобто її щільність має вигляд

$$q_{s,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{11}$$

Далі розглядатимемо лише стандартні вінерівські процеси, тому слово "стандартний" опускатимемо. Отож, нехай далі $W$ – вінерівський процес. Деякі властивості $W$ зібрано у наступному зауваженні.

*Зауваження* 10. 1) З (11), зокрема, випливає таке: для всіх $\forall\, t \geq s \geq 0$ виконуються рівності $\mathbb{E}\,[W(t) - W(s)] = 0$ та $\mathbb{E}\,[(W(t) - W(s))^2] = t - s$.

2) Відомо (див., наприклад, [1, с. 40]), що виконуються рівності

$$\mathbb{E}\,[W(t)] = 0, \quad t \in [0, T], \tag{12}$$

$$\mathbb{E}\,[W(t)W(s)] = \min\{t, s\}, \quad t, s \in [0, T]. \tag{13}$$

3) Відомо (див., наприклад, [1, с. 51-55]), що траєкторія $W(\omega, \cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}$ вінерівського процесу є рівномірно неперервною за Гельдером функцією з показником $\gamma$, де $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ – довільне число. Проте вона ніде не диференційовна функція, яка має необмежену варіацію на кожному підінтервалі з $[0, T]$.

Наслідком пункту 3 зауваження 10 є, зокрема, неможливість дати традиційне означення похідної чи диференціалу вінерівського процесу $W$, які ми формально використали при записі (4)-(5). Крім того, інтеграли типу (1) не можна трактувати у вигляді інтегралів Стільтьєса, бо це теж не є коректним. Також це зумовлює розмаїття способів введення стохастичних інтегралів і в певному сенсі мотивує наші дослідження.

Далі дамо класифікацію випадкових процесів $\eta = \eta(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \mathbb{S}$.

**Означення 11.** Випадковий процес з неперервним часом називається *неперервним в середньому квадратичному* на $[0, T]$, якщо

$$\forall\, t_0 \in [0, T] : \quad \mathbb{E}\left[|\eta(t) - \eta(t_0)|^2\right] \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0.$$

**Означення 12.** Нехай $p \in [1, +\infty)$. Випадковий процес $\eta$ називається
– $CL_p$*-процесом*, якщо він є неперервною $L_p$-значною функцією, тобто $\eta \in C([0, T]; L_p)$;
– $L^p_p$*-процесом*, якщо $\eta \in L^p(0, T; L_p(\mathbb{S})) = L_p(\mathbb{S}; L^p(0, T))$;
– $L$*-процесом*, якщо він є $L^1_1$-процесом.

Зрозуміло, таке: неперервний в середньоквадратичному процес є $CL_2$-процесом; якщо $p \geq q \geq 1$, то

$$C([0, T]; L_p) \subset C([0, T]; L_q), \quad L^p(0, T; L_p) \subset L^q(0, T; L_q), \quad C([0, T]; L_p) \subset L^p(0, T; L_p).$$

Тому, наприклад, $CL_1$-процес є $L$-процесом.

**Лема 13.** *Вінерівський процес є $CL_2$-процесом.*

*Доведення.* Нехай $t_0 \in [0,T]$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} t_0$. Візьмемо довільне $k \in \mathbb{N}$. Не зменшуючи загальності припустимо, що $t_0 < t_k$. Оскільки $W$ – вінерівський процес, то $W(t_k) - W(t_0) \in N(0, t_k - t_0)$. Тому щільністю цієї випадкової величини є функція

$$q_{t_0,t_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_0)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t_k - t_0)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, з формули (9) матимемо, що

$$I \equiv \mathbb{E}\left[|W(t_k) - W(t_0)|^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 q_{t_0,t_k}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2\, e^{-\frac{x^2}{2(t_k - t_0)}}\, dx.$$

Зробивши заміну $x \rightsquigarrow y$, де $x = \sqrt{2(t_k - t_0)}y$ (тоді $dx = \sqrt{2(t_k - t_0)}\, dy$), матимемо таке:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{2(t_k - t_0)}\right)^2 |y|^2\, e^{-y^2} \sqrt{2(t_k - t_0)}\, dy = \frac{2(t_k - t_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^2\, e^{-y^2}\, dy.$$

Зінтегрувавши частинами, одержимо, що

$$I = -\frac{(t_k - t_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, d\, e^{-y^2} = \frac{(t_k - t_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = (t_k - t_0).$$

Тому $||W(t_k) - W(t_0)||_{L_2} = \sqrt{\mathbb{E}\left[|W(t_k) - W(t_0)|^2\right]} = \sqrt{|t_k - t_0|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отже, $W$ є неперервною функцією в точці $t_0$, як функція з $[0,T]$ в $L_2$. $\square$

**Інтегрування випадкових процесів за часовою змінною.** Для випадкових процесів $\xi \in C([0,T]; L_p)$ чи $\xi \in L^1(0,T; L_p)$, де $p \in [1, +\infty)$, стандартним чином можна визначити інтеграл Бохнера

$$\int_0^T \xi(t)\, dt \in L_p.$$

Добре відомі також і класичні властивості такого інтегралу. Розглянемо деякі його спеціальні властивості.

**Лема 14.** *(про математичне сподівання інтегралу від L-процесу). Якщо $g \in L^\infty(0,T)$ – детермінована функція, $\eta(t)$ – випадковий L-процес, то*

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T]: \quad \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)\, dt\right] = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\mathbb{E}\left[\eta(t)\right] dt. \tag{14}$$

*Доведення.* Зрозуміло, що $g\eta \in L^1(0,T; L_1)$ і тому існує інтеграл зліва в (14).

Оскільки $\eta \in L^1(0,T; L_1)$, то $\mathbb{E}\,|\eta(t)| = ||\eta(t)||_{L_1} \in L^1(0,T)$ і з оцінки $|\mathbb{E}\,\xi| \le \mathbb{E}\,|\xi|$ (див. властивість $\mathbf{4}^o$ математичного сподівання) матимемо, що $|\mathbb{E}\,[\eta(t)]| \in L^1(0,T)$. Тому $\mathbb{E}\,\eta(t) \in L^1(0,T)$ і тоді $g\mathbb{E}\,\eta \in L^1(0,T)$, тобто існує інтеграл справа в (14).

Залишилося показати рівність згадуваних інтегралів. Використаємо для цього теорему Фубіні (твердження 3):

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)\,dt\Big] = \int\limits_{\mathbb{S}}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t,\omega)\,dt\Big)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{S}}\eta(t,\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\mathbb{E}\left[\eta(t)\right]\,dt. \quad \square$$

Зауважимо, що оскільки $W \in C([0,T];L_2) \subset L^2(0,T;L_2)$, то для всіх $h \in L^2([0,T])$ коректним є $L_2$-значний інтеграл Бохнера

$$\int\limits_0^T h(t)W(t)\,dt \tag{15}$$

Інтеграл типу (15) є аналогом (1) у випадку, коли підінтегральна функція залежить лише від $t$. Нехай $C^1([0,T])$ – простір детермінованих неперервно-диференційовних на $[0,T]$ функцій, $g'$ – похідна функції $g \in C^1([0,T])$,

$$\Psi_0 := \{g \in C^1([0,T]) \quad | \quad g(0) = g(T) = 0\}. \tag{16}$$

Припустимо, що $g$ – невипадкова функція, причому, спочатку $g \in \Psi_0$.

**Означення 15.** *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда* від гладкої детермінованої функції $g \in \Psi_0$ по випадковому вінерівському процесу $W$ називається такий вираз:

$$(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g(t)\,dW(t,\omega) := -\int\limits_0^T g'(t)W(t,\omega)\,dt. \tag{17}$$

Інтеграл справа в (17) – це інтеграл Бохнера функції $g'W \in C([0,T];L_2)$. Він існує, бо $g' \in C([0,T])$, а $W \in C([0,T];L_2)$. Проблемою даного означення $PWZ$-інтеграла є те, що функція $g$ повинна занулятися в точках $t=0$ та $t=T$. Її усувають таким методом.

Нехай $g$ – невипадкова функція, $g \in L^2(0,T)$, нехай послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Psi_0, \quad g_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{в просторі} \quad L^2(0,T).$$

Відомо, що така послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ завжди існує.

**Означення 16.** *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда* від детермінованої функції $g \in L^2(0,T)$ по випадковому вінерівському процесу $W$ назвемо вираз

$$(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g(t)\,dW(t,\omega) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g_m(t)\,dW(t,\omega), \tag{18}$$

тобто границю в просторі $L_2$ послідовності інтегралів від функцій $g_m \in \Psi_0$.

Властивості PWZ-інтегралів (17)-(18) розглянуто, зокрема, в [1]. Ми наведемо лише деякі з них у слідуючому твердженні.

**Твердження 17.** *(про властивості PWZ-інтеграла,* [1, c. 59]*). Нехай $W$ – вінерівський процес, Тоді якщо $g \in L^2(0,T)$, то*

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big] = 0, \tag{19}$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big)^2\Big] = \int\limits_0^T |g(t)|^2\, dt. \tag{20}$$

## 4. Основні результати

Оскільки $W \in C([0,T];L_2)$ (див. лему 13), то $W \in L^2(0,T;L_2)$. Крім того, функція $W$ є незалежною від $x \in \Omega$. Тому з (8) випливає, що

$$W \in L^2(Q_{0,T};L_2) = L^2(\Pi_{0,T}).$$

Аналогічно, кожна функція $g \in L^2(Q_{0,T})$ є незалежною від змінної $\omega \in \mathbb{S}$, а тому $g \in L^2(\Pi_{0,T})$. Отже, використавши твердження 1 та (8), одержимо

$$gW \in L^1(\Pi_{0,T}) = L^1(Q_{0,T};L_1) \tag{21}$$

та (див. (7))

$$\int\limits_{\Pi_{0,T}} |g(x,t)W(t,\omega)|\, dxdt\mathbb{P}\,(d\omega) \le$$

$$\le \Big(\int\limits_{\Pi_{0,T}} |g(x,t)|^2\, dxdt\mathbb{P}\,(d\omega)\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Pi_{0,T}} |W(t,\omega)|^2\, dxdt\mathbb{P}\,(d\omega)\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |g(x,t)|^2\, dxdt \cdot \int\limits_{\mathbb{S}} \mathbb{P}\,(d\omega)\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega} dx \cdot \int\limits_{\Theta_{0,T}} |W(t,\omega)|^2\, dt\mathbb{P}\,(d\omega)\Big)^{1/2}.$$

Тоді (зауважимо, що $\int_{\mathbb{S}} \mathbb{P}\,(d\omega) = 1$ та $\int_{\Omega}\, dx = |\Omega|$) правильною є оцінка

$$\int\limits_{\Pi_{0,T}} |g(x,t)W(t,\omega)|\, dxdt\mathbb{P}\,(d\omega) \le \sqrt{|\Omega|} \cdot ||g;L^2(Q_{0,T})|| \cdot ||W;L^2(0,T;L_2)||,$$

де $|\Omega|$ – міра Лебега області $\Omega$.

Тепер визначимо інтеграл (1) для детермінованих (тобто, невипадкових) функцій $h \in \Phi_0$, де (за аналогією з (16))

$$\Phi_0 := \{h \in C^1(\overline{Q_{0,T}}) \quad | \quad h|_{t=0} = h|_{t=T} = 0\}. \tag{22}$$

**Означення 18.** *Просторово-часовим інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда (space-time PWZ-integral)* від детермінованої функції $h \in \Phi_0$ по випадковому вінерівському процесу $W$ називається така випадкова величина:

$$(\texttt{ST-PWZ}) \int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega) := -\int\limits_{Q_{0,T}} h_t(x,t)W(t,\omega)\, dxdt. \tag{23}$$

Інтеграл справа в (23) – це інтеграл Бохнера функції $h_t W \in L^1(Q_{0,T}; L_1)$ (див. (21)), $h_t$ – частинна похідна за $t$ функції $h$ з множини $C^1(\overline{Q_{0,T}})$ всіх детермінованих неперервно-диференційовних на $\overline{Q_{0,T}}$ функцій. Замість $dW(t,\omega)$ далі переважно писатимемо $dW$, а змінні інтегрування опускатимемо.

Зрозуміло, що введений таким чином, (ST-PWZ)-інтеграл є лінійним, тобто для всіх чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та функцій $f, g \in \Phi_0$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} [\alpha f(x,t) + \beta h(x,t)]\, dxdW = \alpha \int\limits_{Q_{0,T}} f(x,t)\, dxdW + \beta \int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW. \tag{24}$$

Наведемо аналог властивостей (19)-(20).

**Теорема 19.** *(про властивості (ST-PWZ)-інтеграла). Нехай $\Phi_0$ визначено в (22), $W$ – вінерівський процес з означення 9. Тоді якщо $h \in \Phi_0$, то*

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega)\Big] = 0, \tag{25}$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega)\Big)^2\Big] = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_\Omega h(x,t)\, dx\Big)^2\, dt. \tag{26}$$

*Доведення.* Аналогічно як (14), для всіх $\eta \in L^1(0,T;L_1)$ доводимо рівність

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} h(x,t)\eta(t,\omega)\, dxdt\Big] = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} h(x,t)\mathbb{E}\left[\eta(t,\omega)\right] dxdt, \tag{27}$$

де $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $(t_1,t_2) \subset (0,T)$. Враховуючи (23), (12) та (27), матимемо

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW\Big] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} -h_t(x,t)W(t,\omega)\, dxdt\Big] = \int\limits_{Q_{0,T}} -h_t(x,t)\mathbb{E}\Big[W(t,\omega)\Big]\, dxdt = 0,$$

що і доводить (25).

Позначимо ліву частину (26) через $I$. Також писатимемо, наприклад, $\Omega^x$ чи $Q^{y,s}_{0,T}$ для підкреслення змінних інтегрування. Використаємо (27) двічі:

$$I = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h(x,t)\, dxdW \cdot \int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h(y,s)\, dW\Big] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t)W(t,\omega)\, dxdt \times$$

$$\times \int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h_s(y,s)W(s,\omega)\, dyds\Big] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t)\Big(W(t,\omega)\int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h_s(y,s)W(s,\omega)\, dyds\Big)\, dxdt\Big] =$$

$$= \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t)\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h_s(y,s)W(t,\omega)W(s,\omega)\, dyds\Big]\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h_s(y,s)\mathbb{E}\Big[W(t,\omega)W(s,\omega)\Big]\, dydsdxdt.$$

З (13) та рівностей $h|_{t=0} = h|_{t=T} = 0$ випливає, що

$$I = \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h_s(y,s)\min\{t,s\}\,dydsdxdt = \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{\Omega^y}\Big[\int\limits_0^t h_s(y,s)s\,ds +$$

$$+\int\limits_t^T h_s(y,s)t\,ds\Big]\,dydxdt = \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t)\int\limits_{\Omega^y}\Big[sh(y,s)|_{s=0}^{s=t} - \int\limits_0^t h(y,s)\,ds + th(y,s)|_{s=t}^{s=T}\Big]\,dydt =$$

$$= \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t)\int\limits_{\Omega^y}\Big[th(y,t) - 0 - \int\limits_0^t h(y,s)\,ds + 0 - th(y,t)\Big]\,dydt =$$

$$= \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t)\int\limits_{\Omega^y}\Big[-\int\limits_0^t h(y,s)\,ds\Big]\,dydt.$$

Знову зінтегрувавши частинами та використавши рівності $h|_{t=0} = h|_{t=T} = 0$, отримаємо

$$I = h(x,t)\Big[-\int\limits_{Q^{y,s}_{0,t}} h(y,s)\,dyds\Big]\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h(x,t)\frac{d}{dt}\Big[-\int\limits_{Q^{y,s}_{0,t}} h(y,s)\,dyds\Big] =$$

$$= \int\limits_0^T\Big(\int\limits_{\Omega^x} h(x,t)\,dx\Big)\cdot\Big(\int\limits_{\Omega^y} h(y,t)\,dx\Big)\,dt,$$

що і доводить (26). $\square$

**Наслідок 20.** *Виконується нерівність*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\,dxdW\Big)^2\Big] \le |\Omega| \int\limits_{Q_{0,T}} |h(x,t)|^2\,dxdt. \tag{28}$$

*Доведення.* Оцінка (28) зразу випливає з (26) і нерівності Гельдера типу (7). $\square$

Незручністю означення 18 знову є те, що підінтегральна функція $h$ повинна занулятися в точках $t = 0$ та $t = T$. Позбудемось цієї проблеми. Нехай $h \in L^2(Q_{0,T})$ – невипадкова функція, послідовність функції $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Phi_0, \quad h_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} h \quad \text{в просторі} \quad L^2(Q_{0,T}). \tag{29}$$

Зазначимо, що така послідовність $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ існує.

**Означення 21.** *Просторово-часовим інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда (space-time PWZ-integral)* від детермінованої функції $g \in L^2(Q_{0,T})$ по випадковому вінерівському процесу $W$ назвемо випадкову величину

$$(\texttt{ST-PWZ})\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\,dxdW(t,\omega) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,(\texttt{ST-PWZ})\int\limits_{Q_{0,T}} h_m(x,t)\,dxdW(t,\omega), \tag{30}$$

тобто границю в просторі $L_2$ послідовності інтегралів від функцій $h_m \in \Phi_0$.

Покажемо коректність цього означення.

**Лема 22.** *Границя (30) не залежить від вибору послідовності з (29).*

*Доведення.* Перш за все, оскільки $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна в $L^2(Q_{0,T})$, то з (24) та (28) матимемо, що

$$\Big|\Big|\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\, dxdW - \int\limits_{Q_{0,T}} h_k\, dxdW\Big|\Big|^2_{L_2} = \mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\, dxdW - \int\limits_{Q_{0,T}} h_k\, dxdW\Big)^2\Big] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} (h_m - h_k)\, dxdW\Big)^2\Big] \le |\Omega| \int\limits_{Q_{0,T}} |h_m - h_k|^2\, dxdt \underset{k,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, границя в (30) існує, бо $L_2$ – банахів простір. Покажемо, що вона не залежить від вибору послідовності. Нехай $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}, \{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Phi_0$, $h_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} h$, $f_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} h$ в $L^2(Q_{0,T})$,

$$G_m = \int\limits_{Q_{0,T}} h_m\, dxdW, \qquad F_m = \int\limits_{Q_{0,T}} f_m\, dxdW, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$I_1 = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, G_m, \quad I_2 = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, F_m.$$

Тоді

$$||I_1 - I_2||_{L_2} \le ||I_1 - G_m||_{L_2} + ||G_m - F_m||_{L_2} + ||F_m - I_2||_{L_2}. \tag{31}$$

Перший та третій вираз зправа в (31) прямують до нуля. Оскільки

$$||G_m - F_m||_{L_2} = \Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} (h_m - f_m)\, dxdW\Big)^2\Big]\Big)^{1/2} \le \Big(|\Omega| \int\limits_{Q_{0,T}} |h_m - f_m|^2\, dxdt\Big)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{|\Omega|}\, ||h_m - f_m||_{L^2(Q_{0,T})} \le \sqrt{|\Omega|}\, ||h_m - h||_{L^2(Q_{0,T})} + \sqrt{|\Omega|}\, ||h - f_m||_{L^2(Q_{0,T})} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то з (31) матимемо рівність $||I_1 - I_2||_{L_2} = 0$. Отже, $I_1 = I_2$ і означення 21 коректне. □

**Теорема 23.** *Формули (24), (25), (26), (28) правильні також для $h \in L^2(Q_{0,T})$.*

*Доведення.* Формула (24) очевидна. Для доведення (25) розглянемо $g \in L^2(Q_{0,T})$ та послідовність функції $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, що задовольняє (29). З (10) та формули (25) для гладких функцій отримаємо

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h\, dxdW\Big] = \mathbb{E}\Big[\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{Q_{0,T}} h_m\, dxdW\Big] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\, dxdW\Big] = \lim_{m\to\infty} 0 = 0.$$

Для доведення (26) використаємо таку властивість норми кожного банахового простору $X$:

$$||x_m - x||_X \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad ||x_m||_X \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} ||x||_X. \tag{32}$$

Крім того, використавши формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ та обмеженість послідовності з (29) в просторі $L^2(Q_{0,T})$, отримаємо таке:

$$\Big|\int\limits_0^T \Big(\int\limits_\Omega h_m(x,t)\, dx\Big)^2 dt - \int\limits_0^T \Big(\int\limits_\Omega h(x,t)\, dx\Big)^2 dt\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_0^T \Big(\int\limits_\Omega [h_m(x,t) - h(x,t)]\, dx\Big) \cdot \Big(\int\limits_\Omega [h_m(x,t) + h(x,t)]\, dx\Big)\, dt\Big| \le$$

$$\leq \Big(\int\limits_0^T\Big|\int\limits_\Omega |h_m(x,t)-h(x,t)|\,dx\Big|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^T\Big|\int\limits_\Omega |h_m(x,t)+h(x,t)|\,dx\Big|^2\,dt\Big)^{1/2}\leq$$

$$\leq C_1\Big(\int\limits_0^T\Big|\int\limits_\Omega |h_m(x,t)-h(x,t)|\,dx\Big|^2\,dt\Big)^{1/2}\leq C_2\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |h_m-h|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (33)$$

Використавши (32) при $X=L_2$, з (33) одержимо, що

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h\,dxdW\Big)^2\Big]=\Big\|\int\limits_{Q_{0,T}} h\,dxdW\Big\|^2_{L_2}=\lim_{m\to\infty}\Big\|\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW\Big\|^2_{L_2}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW\Big)^2\Big]=\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Omega h_m(x,t)\,dx\Big)^2\,dt=\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Omega h(x,t)\,dx\Big)^2\,dt$$

і тому виконується (26). Доведення (28) є елементарним. □

**Висновки.** В статті розглянуто означення та базові властивості стохастичного інтегралу від детермінованої функції за випадковим вінерівським процесом. Розглянуті твердження будуть використані в подальших дослідженнях, зокрема, нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

**Конфлікт інтересів і етика.** Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

**Подяки.** Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

### Список використаних джерел


1. Evans L.C. An introduction to Stochastic differential equations. Lecture Notes (VERSION 1.2). 2012. Department of Math., UC Berkeley. 139 p.
2. Paley R., Wiener N., Zygmund A. Notes on random functions. *Mathematische Zeitschrift*. 1933. Vol. 37, № 1. P. 647–668. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01474606
3. Applebaum D. Levy processes and stochastic calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 460 p.
4. Brezis H. Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011. 599 p.
5. Leoni G. A first course in Sobolev spaces. Providence: American Mathematical Soc., 2017. 736 p.
6. Гнєденко Б.В. Курс теорії ймовірностей. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. 464 с.
7. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ: Либідь, 1990. 168 с.


UDC 519.21

## On stochastic space-time Paley-Wiener-Zygmund integral

**Oleh Buhrii, Nataliya Buhrii, Vitaliy Vlasov**

*Abstract.* We consider one case of the stochastic integral of non-random function of many variables with respect to the random Winer process. We give definition of this integral and prove some it standard properties.

*Keywords:* stochastic integral, Paley-Wiener-Zygmund integral, random Winer process.

## References

1. Evans, L.C. (2012). *An introduction to Stochastic differential equations,* Lecture Notes (VERSION 1.2), Department of Math., UC Berkeley.
2. Paley, R., Wiener, N., Zygmund, A. (1933). *Notes on random functions,* Mathematische Zeitschrift, **37** (1), 647–668. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01474606
3. Applebaum, D. (2009). *Levy processes and stochastic calculus,* Cambridge University Press, Cambridge.
4. Brezis, H. (2011). *Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London.
5. Leoni, G. *A first course in Sobolev spaces,* American Mathematical Soc., Providence, 2017. 736 p.
6. Gnedenko, B.V. (2010). *A course of probability,* KNU, Kyiv. [in Ukrainian]
7. Skorokhod, A.V. (1990). *Lectures on theory of stochastic processes,* Lybid, Kyiv. [in Ukrainian]

## Про авторів / About the authors

**Олег Бугрій**, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна.

**Oleh Buhrii**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine.

**Наталія Бугрій**, кандидат фізико-математичних наук, кафедра вищої математики, Національний університет "Львівська політехніка", вул. Митрополита Андрея, 5, м. Львів, 79000, Україна.

**Nataliya Buhrii**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Department of Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 5 Mytropolyt Andrei Str., Lviv 79000, Ukraine.

**Віталій Власов**, кандидат фізико-математичних наук, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна.

**Vitaliy Vlasov**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 30.03.2024
Доопрацьовано / Revised 11.05.2024