М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 198–205.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 198–205.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.5

Про існування розв'язку рівняння згортки у півсмуговій області

Христина Дум'як[1], Володимир Дільний[2]

[1]Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математики та економіки, м. Дрогобич, Україна
khrystyna.dumiak@dspu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0005-4942-3922

[2]Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8208-7960

Анотація. Розглядається рівняння типу згортки для просторів типу Гарді у півсмуговій області комплексної площини. Досліджено питання існування розв'язків цього рівняння, якщо породжуюча функція визначається двома полюсами. Результати отримані прямими методами. Показано відмінності у поведінці розв'язків в залежності від взаєморозміщення полюсів. Розроблений метод може бути застосований до аналізу інших функціональних просторів, в теорії інформації для ідентифікації сигналів.
Ключові слова: рівняння згортки, простір Гарді,.аналітична функція, теорія сигналів.

1. Вступ

Дослідження рівнянь типу згортки є важливим напрямком сучасного математичного аналізу, пов'язаним із розвитком теорії аналітичних функцій і функціонального аналізу. Такі рівняння виникають пр. розв'язуванні крайових задач для диференціальних рівнянь, а також у задачах, пов'язаних з інтегральними перетвореннями.

Особливий інтерес становить розгляд рівнянь типу згортки у півсмузі комплексної площини, де аналітичність функцій в області поєднується з наявністю граничних значень на межі області. Поведінка розв'язків у таких просторах істотно залежить від структури рівняння та умов належності функцій до певного простору аналітичних функцій.

Питання існування та єдності розв'язків рівнянь типу згортки вивчалися у працях [2], [4], [5] М. Джрбашяна, Дж. Якубовського, М. Віснєвольського, Н. Нікольського, Дж. Машрегі, Б. В. Винницького та його учнів і співробітників, багатьох інших математиків,

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-03

продовжують викликати значний інтерес в останні десятиліття. Багато в чому цей інтерес зумовлений застосуваннями різного типу згорток у теорії інформації, зокрема задачах шифрування, передачі та відтворення інформації.

Попри значний розвиток даного напрямку, невирішеними до кінця залишаються питання про конкретні умови існування розв'язку рівняння типу згортки у кутових областях та про зв'язок між структурою рівняння і властивостями його розв'язків.

2. Постановка задачі

Розглянемо простори типу Гарді у півсмугових областях, які ввів Б. Винницький у [2]. Нехай $\mathcal{D}_\sigma = \{z : |Im\, z| < \sigma, Re\, z < 0\}, 0 \leq \sigma < +\infty,$

$\mathcal{D}_\sigma^* = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}_\sigma$ а $E^p[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^p[\mathcal{D}_\sigma], 1 \leq p < +\infty,$ - простори функцій, аналітичних відповідно в $\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}_\sigma^*$, для яких

$$\sup\left\{\int_\gamma |f(z)|^p dz|\right\} < +\infty$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, які лежать відповідно в $\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}_\sigma^*$ (можна розглядати тільки ті відрізки γ, які паралельні принаймні одній із сторін $\partial\mathcal{D}_\sigma$). Функції f із цих просторів мають майже всюди (м.в.) на $\partial\mathcal{D}_\sigma$ кутові граничні значення (їх позначаємо через $f(z)$ і, отже, f природним чином визначена м.в. на $\partial\mathcal{D}_\sigma$, $f \in L^p(\partial\mathcal{D}_\sigma)$ і кожний із просторів $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ є повним відносно норми

$$\|f\| = \left(\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} |f(z)|^2 dz|\right)^{1/2}.$$

Згідно з лемою 2 [1], функція $f(\omega) = \omega^{m-1}e^{\lambda\omega}, m \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}_+,$ є розв'язком рівняння

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} f(\omega+\tau)g(\omega)d\omega = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma], \tag{1}$$

тоді і тільки тоді, коли в точці λ функція

$$G(\omega) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} g(z)e^{z\omega}dz.$$

має нуль порядку k≥m.

Б. Винницький довів прямим методом [1], що для $g(\omega) = \frac{1}{\omega-\omega_1}\omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma$, рівняння (1) має тільки нульовий розв'язок. Однак сума двох таких функцій g_1, g_2 для яких рівняння згортки має тільки нульовий розв'язок, не обов'язково є функцією, що володіє тією ж властивістю. Нашим завданням є отримання методів виявлення наявності розв'язків рівняння (1) для функцій g, що визначаються скінченною кількістю полюсів у півсмуговій області.

3. Основні результати

У нашій роботі розглядаються функції g, що визначаються двома полюсами в області $\mathcal{D}_\sigma$. Розглянемо різні випадки взаєморозміщення цих полюсів. Отримано наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $g(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}$, *де* $\omega_1 \neq \omega_2$ *і* $\omega_1 - \omega_2 \in \mathbb{R}, \omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma$, $\omega_2 \in \mathcal{D}_\sigma$. *Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок* $f \equiv 0$.

Доведення. Нехай $g(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Для того, щоб знайти розв'язки рівняння (1), розкладемо функцію $g(\omega)$ на елементарні дроби:

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} = \frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)} - \frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)}$$

Підставимо значення функції $g(\omega)$ у ліву частину рівняння (1):

$$\int_{\partial \mathfrak{D}_\sigma} f(\omega+\tau)\left(\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)} - \frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)}\right) d\omega = 0$$

Тоді

$$\int_{\partial \mathfrak{D}_\sigma} \frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)} - \frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)} d\omega = 0.$$

Звідси ми отримаємо

$$\frac{1}{\omega_1-\omega_2}\int_{\partial \mathfrak{D}_\sigma} \frac{f(\omega+\tau)}{(\omega-\omega_1)} - \frac{f(\omega+\tau)}{(\omega-\omega_2)} d\omega = 0.$$

За інтегральною формулою Коші для півсмуги [2]

$$\int_{\partial \mathfrak{D}_\sigma} \frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_1)} - \frac{f(\omega+\tau)}{(\omega_1-\omega_2)(\omega-\omega_2)} d\omega =$$

$$= \frac{2\pi i}{\omega_2-\omega_1}\cdot(2\pi i(f(\omega_1+\tau) - f(\omega_2+\tau))$$

Отже, отримаємо наступну рівність

$$\frac{2\pi i}{\omega_2-\omega_1}\cdot(2\pi i(f(\omega_1+\tau) - f(\omega_2+\tau)) \equiv 0, \forall\tau \le 0.$$

Звідси випливає, що $f(\omega_1+\tau) \equiv f(\omega_2+\tau), \forall\tau \le 0$.

Нехай $\tau = 0$. Тоді отримаємо, що, $f(\omega_1) = f(\omega_2)$. Отже, можна зробити висновок, що при довільних $\tau \le 0$ також значення $f(\omega_1+\tau)$ і $f(\omega_2+\tau)$ співпадають.

Введемо нове позначення

$$\widetilde{f_1}(\tau) = f(\omega_1+\tau);$$

Тоді

$$f(\omega_2+\tau) = f\big(\omega_1 + (\omega_2-\omega_1+\tau)\big) = \widetilde{f_1}(\omega_2-\omega_1+\tau)$$

Звідси

$$\widetilde{f_1}(\tau) \equiv \widetilde{f_1}(\omega_2-\omega_1+\tau).$$

Це означає, що функція f періодична з періодом $(\omega_2-\omega_1)$.

Якщо $(\omega_2-\omega_1)$ – дійсне число, то функція f – періодична з цим дійсним періодом. Доведемо, що оскільки f належить $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$, то $f \equiv 0$.

Справді, $\widetilde{f_1}$ є періодичною функцією. Припустимо, що вона тотожно не дорівнює нулю. Тоді

$$\int_{\gamma_1} |\widetilde{f_1}(\omega)|^2 d\omega = \beta, \qquad \beta > 0, \qquad \gamma_1 = [\omega_1; \omega_2]$$

Розглянемо нескінченний промінь $[-\infty + Im(\omega_2); \omega_2]$, що складається з нескінченної кількості відрізків довжини $\ddot{\omega} = \omega_2 - \omega_1$, тоді інтеграл $\int_{\gamma_1} |\widetilde{f_1}(\omega)|^2 d\omega = \beta, \quad \beta > 0, \quad \gamma_1 = [\omega_1; \omega_2]$

дорівнює сумі інтегралів по відрізках $\ddot{\omega}$. Оскільки на кожному з цих відрізків $\int_{\gamma_1} |\widetilde{f_1}(\omega|^2 d\omega = \beta,\ \beta > 0$, що означає, що сума нескінченної кількості інтегралів буде нескінченною. Ми отримали суперечність.

Це означає, що якщо функція f – періодична з дійсним періодом і належить $E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$, то $f \equiv 0$.

Теорему доведено.

З доведення теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок. *Якщо $f \in E^2[\mathfrak{D}_\sigma]$ і є періодичною, то звідси випливає, що $f \equiv 0$.*

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_1 = \omega_2,\ \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Тоді

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2}$$

Теорема 2. *Нехай* $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^n}, n \in \mathbb{N}$, *тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок* $f \equiv 0$.

Доведення. За інтегральною формулою Коші для півсмуги [2] виконується формула

$$\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega+\tau)}{\omega-\omega_1} d\omega = 2\pi i f(\omega_1 + \tau) \tag{2}$$

і функція в правій частині останньої рівності аналітична відносно ω_1.

Продиференціювавши рівність (2) по $\omega_1 \in D_\sigma$, отримаємо

$$\left(\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega\right)'_{\omega_1} = (2\pi i f(\omega_1 + \tau))'$$

$$\int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega-\omega_1}\right)'_{\omega_1} d\omega = f'(\omega_1 + \tau),$$

бо

$$\left(\frac{1}{\omega-\omega_1}\right)'_{\omega_1} = \frac{1}{(\omega-\omega_1)^2}\,.$$

Повторивши диференціювання $n - 1$ разів, отримаємо рівність

$$n \int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1}\right)^{(n+1)}_{\omega_1} d\omega = f^{(n)}(\omega_1 + \tau).$$

Тоді

$$f^{(n-1)}(\omega_1 + \tau) = c_1;$$

$$f^{(n-2)}(\omega_1 + \tau) = \int_{\partial D_\sigma} f^{(n-2)}\,(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1}\right)^{(n+1)}_{\omega_1} d\omega = c_1 x + c_2;$$

Остаточно отримаємо

$$f\quad(\omega_1 + \tau) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \dots + c_n, \tag{3}$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – сталі.

Оскільки (3) є многочленом, що є необмеженою функцією в $\mathfrak{D}_\sigma$, то $f\quad(\omega_1 + \tau) \neq c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \dots + c_n$.

Ця суперечність доводить, що

$$f\quad(\omega_1 + \tau) \notin E^2[\mathfrak{D}_\sigma].$$

Звідси

$$f \quad (\omega_1 + \tau) \equiv 0, \forall \tau \leq 0.$$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_1 - \omega_1 \notin \mathbb{R}$.

Нам відомо, що $\widetilde{f_1}(\tau) = \widetilde{f_1}(\omega_2 - \omega_1 + \tau) = \widetilde{f_1}(2\omega_2 - 2\omega_1 + \tau)$, де $(\omega_2 - \omega_1)$ – період функції $\widetilde{f_1}$ як функції аргумента $\tau < 0$. Використавши дану періодичність, отримаємо, що $\widetilde{f_1}$ існує за межами D_σ і буде визначена в нескінченних трапеціях T_1, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) > 0$ та T_2, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) < 0$.

Сформулюємо ці означення точніше. Трапеція T_1 визначається множиною таких точок ω, що $\arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)$. Тобто,

$$T_1 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$$

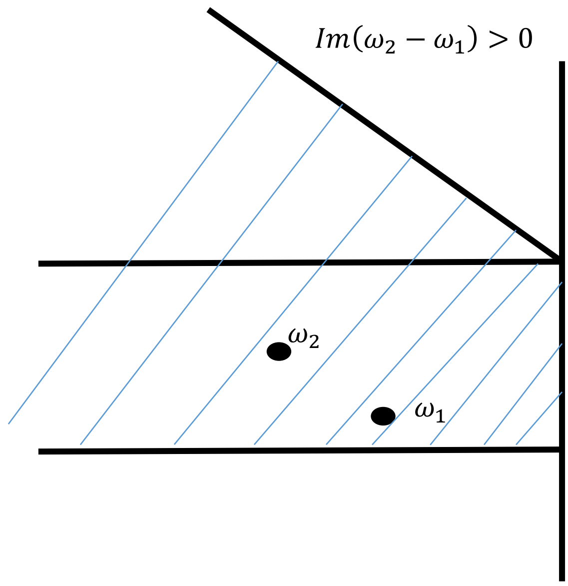

Рис.1

Приклад. Нехай $T_1 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$,

де $\omega_1 = -\sigma$, $\omega_2 = \frac{i\sigma}{2} - 2\sigma$. *Тоді* $\omega_2 - \omega_1 = \frac{i\sigma}{2} - 2\sigma - (-\sigma) = \frac{i\sigma}{2} + \sigma$

$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \varphi$, *де*

$$\varphi = \begin{cases} \cos\varphi = \frac{-\sigma}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{\sigma/2}{|z|} \end{cases}, \varphi \epsilon [0; 2\pi]$$

Оскільки $z = \frac{i\sigma}{2} + \sigma$, $|z| = \frac{\sigma\sqrt{5}}{2}$, то

$$\varphi = \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Отже,

$$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Тоді

$$T_1 = \left\{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, arg\ (\omega - i\sigma) < \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Аналогічно, трапеція T_2 можна визначити як множину таких точок ω, що $\arg(\omega + i\sigma) > \arg\ (\omega_2 - \omega_1)$. Тобто,

$$T_2 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) < \sigma, \arg(\omega + i\sigma) > \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$$

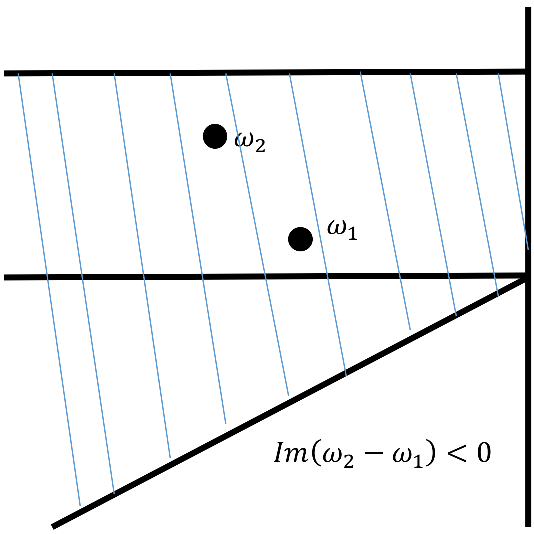

Рис.2

З вищенаведених міркувань випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо f є розв'язком рівняння (1), де* $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$, $\omega_1 - \omega_1 \notin \mathbb{R}$, *то функція f є аналітичною в нескінченній трапеціях T_1, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) > 0$ та T_2, коли $Im(\omega_2 - \omega_1) < 0$ а також періодичною на кожному промені* $L_s = \{\omega: arg(\omega - is) = arg(\omega_2 - \omega_1), s\epsilon[0; \sigma)\}$

Висновки. У нашому дослідженні розглядається рівняння згортки в кутових областях комплексної площини. Отримано пряме доведення існування лише нульового розв’язку, якщо породжуюча функція g визначається двома полюсами, що містяться у півсмузі. Розроблена методика може бути використана для проведення спектрального синтезу просторів Гарді, ідентифікації сигналів за допомогою тестових функцій.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи'.

Список використаних джерел

1. Винницький Б.В. Про розв’язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичих у пів смузі. *Математичні Студії*. 1995. Т.7, №1. С. 41-50.
2. Винницький Б.В. On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents. *Український математичний журнал*. 1994. Т.46, № 5. С. 492-497. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01058515
3. Дільний В.М. Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування. Дисертація на здоб. ... докт. ф.-м. н, Львів, 2015. 322 с.
4. Nikolskii N. Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. *Mathematical Surveys and Monographs*. 2002. DOI: https://doi.org/10.1090/surv/093
5. Lectures on Analytic Function Spaces and their Applications. 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-33572-3

UDC 517.5

On the existence of solutions of a convolution-type equation in a half-strip

Khrystyna Dumiak, Volodymyr Dilnyi

Abstract. A convolution-type equation for Hardy-type spaces in a half-strip domain of the complex plane is considered. The existence of solutions to this equation is studied when the generating function is defined by two poles. The results are obtained by direct methods. Differences in the behavior of solutions depending on the relative positions of the poles are shown. The developed method can be applied to the analysis of other functional spaces and in information theory for signal identification.

Keywords: convolution equation, Hardy space, analytic function, signal theory.

References

1. Vinnitskii, B.V. (1995). *On the Solutions of the Homogeneous Convolution Equation in a Class of Functions Analytic in a Half-Strip*., Matematychni Studii, **7** (1), 41–50. [in Ukrainian]
2. Vinnitskii, B.V. (1994). *On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents*, Ukrainian Mathematical Journal, **46** (5), 514–532. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.1007/BF01058515
3. Dilnyi, V.M. (2015). *Asymptotic and approximation properties of functions of exponential type and their applications*, The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree, Lviv.
4. Nikolskii, N. (2002). *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading*, Mathematical Surveys and Monographs, University of Bordeaux I, Talence. https://doi.org/10.1090/surv/093
5. Lectures on Analytic Function Spaces and their Applications, Editor Javad Mashreghi, Springer Cham, 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-33572-3

Про авторів / About the authors

Христина Дум'як, магістрантка, кафедра математики та економіки, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Khrystyna Dumiak, Master's Student, Department of Mathematics and Economics, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24 Ivan Franko Street, Drohobych, 82100, Ukraine;

Володимир Дільний, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра вищої математики, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

Volodymyr Dilnyi, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv, 79000, Ukraine.

Отримано / Received 01.11.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025