М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 225–232.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 225–232.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.6:517.518

Інтерполяційні кубічні многочлени на сітках золотого перерізу для оптимізації і розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної

Василь Абрамчук[1], Олена Соя[2], Любов Тютюн[3], Ігор Абрамчук[4]

[1] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
abramchuk.doc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1053-6373

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
tiutiun.la@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-9466-8746

[4] Вінницький національний технічний університет,
кафедра вищої математики, м. Вінниця, Україна
abramchuk@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7291-5566

Анотація. Інтерполяційні кубічні многочлени на сітках золотого перерізу мають унікальні властивості, які покладені в основу алгоритму наближеного розв'язування нелінійних рівнянь і пошуку екстремальних точок неперервних функцій однієї змінної. Оскільки відрізки стискуються на кожному кроці в $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ раз, а сітки золотого перерізу на кожному кроці потребують обчислення лише однієї нової точки, то це означає високу швидкість реалізації алгоритму.

Екстремальні точки кубічного многочлена та його нулі обчислюються за аналітичними формулами, що дозволяє швидко знаходити наближені розв'язки як задачі пошуку екстремальних точок, так і розв'язки нелінійних рівнянь для неперервних функцій заданих на скінченних відрізках. Коефіцієнти кубічного многочлена є лінійними формами параметра золотого перерізу, тому похибки обчислення коефіцієнтів мінімальні.

Оскільки під час звуження проміжку точність наближення неперервної функції кубічним многочленом зростає, то розв'язання задачі пошуку екстремальних точок і розв'язання нелінійних рівнянь за допомогою кубічного многочлена не вимагає звуження проміжку до довжини $c_{\varepsilon_{маш}}$, що дозволяє будувати ромбастні алгоритми для неперервних функцій складної природи (c – константа, $\varepsilon_{маш}$ – машинне епсилон).

e–ISSN 3041–1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-06

Ключові слова: інтерполяційний кубічний многочлен, сітки золотого поділу відрізка, оптимізація функцій, розв'язування нелінійних рівнянь, прискорення збіжності.

1. Вступ

Існує багато алгоритмів оптимізації функцій (пошуку точок мінімуму або максимуму і розв'язування нелінійних рівнянь), але всі вони засновані на одному і тому самому принципі [1]. На місце розв'язання нелінійних задач будується послідовність розв'язків більш простих задач за умови, що ця послідовність буде збігатись до розв'язків поставлених задач. Більш простими задачами будуть задачі (моделі) отримані за допомогою апроксимації (або інтерполяції) нелінійних функцій, як правило, лінійними або квадратичними функціями. Методи будуть відрізнятися якістю вибраних базисних функцій, швидкістю збіжності до розв'язків поставлених задач, надійністю наближення і тими обмеженнями, які накладаються на нелінійну функцію [1].

Розглянемо задачу мінімізації унімодальної функції на проміжку $[0;1]$ методом золотого поділу. Важливість цього методу полягає у тому, що при звуженні проміжку обчислюється лише одна нова точка поділу. Якщо випадково ця точка є точкою мінімуму, але метод золотого поділу буде продовжувати звужувати проміжки – одностороння збіжність, не існує критерію у золотому поділі виділення таких точок. Отже необхідно, крім процесу звуження проміжку, мати спосіб оновлення наближених розв'язків.

2. Постановка проблеми

Розробити спільний метод оптимізації функцій і розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної, у якому інтерполяційна функція на вкладених проміжках буде визначати наближені розв'язки поставлених задач.

Це можливо за умови, що норма похибки наближення неперервної функції інтерполяційними многочленами не зростатиме на вкладених проміжках.

3. Основні результати

1. Інтерполяція неперервних функцій на проміжку $[0;1]$ *кубічним многочленом.* Інтерполяцію виконуватимемо на симетричній сітці, що підвищує точність наближення. За сітку виберемо сітку золотого поділу із вузлами $\{0,\, r^2,\, r,\, 1\}$, відповідні значення функції позначатимемо $\{y_0,\, y_1,\, y_2,\, y_3\}$. Кубічний многочлен запишемо у формі [2]:

$$T_3(x) = c_0 + c_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + c_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c_1\left(x - \frac{1}{2}\right)^3. \qquad (1)$$

Коефіцієнти визначаються із системи [2]:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{8}c_3, \\ y_1 &= c_0 - \sigma c_1 + \sigma^2 c_2 - \sigma^3 c_3, \\ y_2 &= c_0 + \sigma c_1 + \sigma^2 c_2 - \sigma^3 c_3, \\ y_3 &= c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{8}c_3, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{y_0 + y_3}{2} &= c_0 + \frac{1}{4}c_2, \\ \frac{y_1 + y_2}{2} &= c_0 + \sigma^2 c_2, \\ y_3 - y_0 &= c_1 + \frac{1}{4}c_3, \\ y_2 - y_1 &= 2\sigma c_1 + 2\sigma^3 c_3, \end{aligned} \qquad (2)$$

де $\sigma = \frac{1}{2} - r^2 = r - \frac{1}{2}$.

Лема. 1. *Система (2) має єдиний розв'язок для довільних значень неперервних функцій у вузлах інтерполяції.*

2. Якщо $y_3 = y_0$, $y_2 = y_1$, то порядок інтерполяційного многочлена $T_3(x)$ понизиться до $T_2(x) = c_0 + c_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3. Якщо значення функції $y = f(x)$, що інтерполюється, у вузлах сітки є нульовими, то інтерполяційний многочлен стане константою $T_3(x) = 0$, незалежно від того, які значення функція $y = f(x)$ набуває між вузлами інтерполяції.

Доведення. 1. Система лінійних рівнянь (2) розпадається на дві незалежні підсистеми з матрицями

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & \sigma^2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2\sigma & 2\sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Визначники цих матриць відмінні від нуля, оскільки $\det A_1 = \sigma^2 - \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = r^2 - r = r(r-1) \neq 0$, $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. Якщо $y_3 = y_0 \neq 0$, $y_2 = y_1 \neq 0$, то $c_1 = c_3 = 0$, $c_0 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, тому існує многочлен $T_2(x) = c_0 + c_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3. Якщо $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, отже $T_3(x) = 0$.

Лему доведено.

Теорема. *Коефіцієнти інтерполяційного многочлена $T_3(x)$ є лінійними формами параметра золотого перерізу $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Доведення. Визначимо коефіцієнти многочлена $T_3(x)$, розв'язавши систему (2) [1]:

$$c_2 = \left(\frac{y_3 + y_0}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2}\right)\frac{1}{\frac{1}{4} - \sigma^2} = \left(\frac{y_3 + y_0}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2}\right)(2r+3),$$

$$c_0 = \frac{y_3 + y_0}{2} - \frac{1}{4}c_2 = (y_3 + y_0)\frac{1-2r}{8} + (y_2 + y_1)\frac{2r+3}{8},$$

$$c_3 = \left(2\sigma(y_3 - y_0) - (y_2 - y_1)\right)\frac{1}{2\sigma\left(\frac{1}{4} - \sigma^2\right)} = (y_3 - y_0)(2r+3) - (y_2 - y_1)(8r+13),$$

$$c_1 = y_3 - y_0 - \frac{1}{4}c_3 = (y_3 - y_0)\frac{1-2r}{4} + (y_2 - y_1)\frac{8r+13}{4}.$$

Отримані формули є наслідком перетворень виразів $\frac{1}{4} - \sigma^2 = \frac{1}{4} - \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 2r - 1$, $\sigma\left(\frac{1}{4} - \sigma^2\right) = \left(r - \frac{1}{2}\right)(2r-1) = \frac{5}{2} - 4r$. Врахувавши, що $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, дістанемо значення обернених величин [3].

Таким чином, коефіцієнти многочлена $T_3(x)$ є лінійними формами параметра золотого перерізу r, тому містять лише похибку, що є наслідком обчислень значень функції у вузлах сітки.

Теорему доведено.

Якщо інтерполяція виконується на проміжку $[a;\, b]$, то шляхом відображення можна перейти від $[0;\,1]$ до $[a;\, b]$ і отримати сітку золотого поділу відрізка $[a;\, b]$: $\{0,\, r^2,\, r,\, 1\} \to [a,\, a+r^2(b-a),\, a+r(b-a),\, b]$.

2.1. Алгоритм оптимізації (пошуку точок мінімуму або максимуму) не лінійної функції на відрізку $[a;\, b]$ (для однозначності, мінімізація нелінійної функції).

Нехай необхідно визначити точку найменшого значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;\, b]$ і нехай така точка єдина на $[a;\, b]$. Якщо функція унімодальна, тобто не існує на $[a;\, b]$ інших локальних мінімумів, то виконати звуження проміжку на кожному кроці алгоритму за правилом золотого поділу. Якщо функція довільна неперервна, то правило звуження проміжку необхідно розробити з використанням інтерполяційного кубічного многочлена. Кубічний многочлен або набуває мінімального значення у внутрішній точці x відрізка, тоді x є коренем рівняння $T_3^{/}(x) = 0$, або x є кінцевою точкою вкладеного відрізка. Якщо кінцева точка x є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, то вона буде також кінцевою на наступному кроці звуження відрізка. Односторонній процес стиснення послідовності вкладених відрізків означатиме, що точка x є точкою глобального мінімуму (теорема Больцано). Необхідною умовою односторонньої збіжності є поява кореня рівняння $T_3^{/}(x) = 0$ в околі таких точок.

Приклад 1. *Знайти найменше значення функції $y = \left|-x^2 e^x + 1\right|$ на відрізку $[-2;\, 1]$.*

За формулами (1), (2) побудуємо інтерполяційний кубічний многочлен на сітці золотого поділу відрізка $[-2;\, 1]$. Знайдемо корені квадратного рівняння $T_3^{/}(x) = c_1 + 2c_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3c_3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Корінь квадратного рівняння $x = -0{,}122801642$ з'явився в околі точки $a = -2$. Відрізок $[-2;\, 1]$ звузимо до відрізка $[-2;\, -2+3r]$ і на ньому виконаємо кубічну інтерполяцію у вузлах золотого поділу. Повторна мінімізація вказує, що точка $\tilde{x} = -2$ є точкою найменшого значення функції на відрізку $[-2;\, 1]$.

2.2. Алгоритм наближеного розв'язання нелінійних рівнянь $f(x) = 0$ однієї змінної.

Нехай на заданому відрізку $[a;\, b]$ рівняння має єдиний дійсний корінь. Можна задачу розв'язування нелінійного рівняння звести до задачі мінімізації функції $y = |f(x)|$ або повторити процедуру 2.1 і на місце пошуку мінімуму інтерполяційного кубічного многочлена визначити корені рівняння $T_3(x) = 0$ за формулами Кардано. Якщо нелінійна функція $y = f(x)$ на кінцях проміжку $[a;\, b]$ набуває значення різних знаків, то це дає додаткову умову для визначення напрямку звуження проміжку – застосування золотого поділу проміжку. Якщо неперервна функція на кінцях проміжку $[a;\, b]$ набуває значення різних знаків, то вона на одному з проміжків золотого поділу $[a;\, a+r^2(b-a)]$, $[a+r^2(b-a);\, a+r(b-a)]$, $[a+r(b-a);\, b]$ обов'язково змінить знак. Це дає правило заключення дійсного кореня рівняння $f(x) = 0$ у послідовність вкладених проміжків з можливістю застосувати інтерполяційний кубічний многочлен для наближеного визначення кореня рівняння $f(x) = 0$.

3. Прискорення швидкості збіжності до розв'язку задачі оптимізації функції або до розв'язку нелінійного рівняння на основі степеневих послідовностей параметра золотого перерізу $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Для ілюстрації алгоритму розглянемо задачу розв'язування нелінійного рівняння за виконання двох умов: 1) функція $y = f(x)$ на заданому проміжку $[a; b]$ неперервна і на кінцях набуває різних знаків; 2) на заданому проміжку $[a; b]$ рівняння має єдиний дійсний корінь. Алгоритм послідовно стискує проміжок $[a; b]$ з коефіцієнтом $1-r^n$.

Алгоритм розв'язування нелінійного рівняння $f(x)=0$.

1. Обчислити $f(a)$, $f(b)$. Покласти $n=2$.

2. Аналіз вибору коефіцієнта стиснення $1-r^n$ (показники n).

3. Звуження проміжку.

3.1. Якщо $|f(a)|<|f(b)|$, то обчислити $u=b-r^n(b-a)$, $f(u)$.

а) Якщо $f(u)\cdot f(b)>0$, то присвоїти $b:=u$, $f(b):=f(u)$;

б). У протилежному випадку: $a:=u$, $f(a):=f(u)$.

Перейти на п. 2.

3.2. Якщо $|f(b)|<|f(a)|$, то обчислити $u=a+r^n(b-a)$, $f(u)$.

а) Якщо $f(u)\cdot f(a)>0$, то присвоїти $a:=u$, $f(a):=f(u)$;

б). У протилежному випадку: $b:=u$, $f(b):=f(u)$.

Перейти на п. 2.

Обчислення виконувати стисненням проміжку до довжини $|b-a|<\varepsilon$.

Коментарі до алгоритму. У п. 3.1.а, 3.2.а реалізується успішна стратегія звуження проміжку шляхом відрізання від проміжку $[a; b]$ частини довжиною $r^n(b-a)$ із того кінця, де абсолютне значення функції найбільше. У разі менш успішної стратегії, яка залежить від обох величин r^n, $b-a$, звужується відрізок з кінця, де абсолютне значення функції менше. Це призводить до сповільнення збіжності (швидкості стиснення проміжку). Необхідно підвищити показник n (збільшити коефіцієнт стиснення $1-r^n$). Таблиця 1 ілюструє ефективність звуження проміжку $[a; b]$ і спадання абсолютного значення функції на кінцях проміжку. За 14 кроків проміжок $[1; 2]$ довжиною $d=1$, звузився до відрізка довжиною 0,000000735, тобто звузився у 1360544 разів.

Умова, що функція на кінцях проміжку $[a; b]$ набуває значення різних знаків, дає змогу аналізувати швидкість збіжності алгоритму, отже коректувати коефіцієнт стиснення проміжку $[a; b]$, зміною показника степеня r^n. Пояснимо, чому вираз $1-r^n$ є коефіцієнтом стиснення (звуження) проміжку. Нехай заданий проміжок $[a; b]$ стискується вибором точки $\tilde{a}:=a+r^n(b-a)$. Тоді новий проміжок буде мати довжину $b-\tilde{a}=b-a-r^n(b-a)=(b-a)(1-r^n)$.

Нехай функція $y=f(x)$ є довільною неперервною функцією на проміжку $[a; b]$. Припустимо, що існує на $[a; b]$ єдиний дійсний корінь рівняння $f(x)=0$. Задачу розв'язання рівняння $f(x)=0$ можна звести до задачі мінімізації функції з найменшим значенням $|f(c)|=0$. Оскільки внутрішня точка c, що задовольняє умову $|f(c)|=0$, єдина, то це дозволяє будувати алгоритм стиснення проміжку $[a; b]$ із використанням степеневої послідовності r^n золотого перерізу.

Послідовно будемо звужувати відрізок $[a; b]$, відсікаючи від кінців відрізки точками $u=a+r^n(b-a)$ або $u=b-r^n(b-a)$ з найбільшим значенням $|f(x)|$. Якщо функція $y=f(x)$ на проміжку $[a; b]$ мала ряд екстремальних точок і для деяких з них виконувалась умова $\min|f(x)|=\varepsilon$ – мала величина, то це призводить до ускладнення алгоритму мінімізації функції $y=|f(x)|$. У цьому випадку необхідно функцію $y=f(x)$ замінити на функцію $y=Cf(x)$, де $C>1$, що розтягує графік функції $y=|f(x)|$, залишаючи незмінним корінь рівняння $f(x)=0$.

На кожному кроці алгоритму обчислюється лише значення функції; степені параметра золотого перерізу є лінійними формами параметра r.

Приклад 2. *Обчислити дійсний корінь рівняння* $\ln x+3x^2-4=0$ *на проміжку* $[1;2]$.

Функція $y(x)=\ln x+3x^2-4$ на проміжку $[1;2]$ неперервна і на кінцях набуває значення різних знаків $y(1)<0$, $y(2)>0$. Побудуємо сітку золотого перерізу $\{1;1+r^2,1+r,2\}$. Обчислимо значення у вузлах сітки $y_0=y(1)=-1$, $y_1=y(2)=2,052993028$. Корінь рівняння належить $[x_0;x_1]$. Немає необхідності обчислювати $y(x_2)$, $y(x_3)$.

Розділимо $[x_0;x_1]$ точками золотого перерізу. Обчислимо $x_1^{(1)}=1+r^2(x_1-x_0)=1,145898034$, $f\left(x_1^{(1)}\right)=0,075435551$. Корінь належить $[1;x_1^{(1)}]$ і знаходиться в околі точки $x_1^{(1)}$. Розділимо відрізок $[1;x_1^{(1)}]$ точками золотого поділу. Обчислимо вузол $x_2^{(2)}=1+r\left(x_1^{(1)}-1\right)=1,090169944$, $f\left(x_2^{(2)}\right)=-0,348254885$. Корінь належить проміжку $[x_2^{(2)};x_1^{(1)}]$. Далі процедура золотого поділу очевидна. Процес збіжності не вимагає застосування інтерполяційного кубічного многочлена. За наближене значення кореня можна вибрати середину відрізка $[x_2^{(2)};x_1^{(1)}]$, $c=1,118033989$, $f(c)=-0,38842822$.

Таблиця 1. Розв'язування рівняння $\ln x+3x^2-4=0$, $x\in[1;2]$ *на основі звуження проміжку за степенями параметра золотого перерізу* $r=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

K	r^n	a	$f(a)$	b	$f(b)$
		1	–1	2	8,693147181
1	r^2	1	–1	1,381966011	2,052997307
2	r^2	1	–1	1,145898034	0,075435551
3	r^2	1,090169944	–0,348254883	1,145898034	0,075435551
4	r^2	1,124611798	–0,088307003	1,145898034	0,075435551
5	r^2	1,132742417	–0,02604224	1,145898034	0,075435551
6	r	1,132742417	–0,02604224	1,137767416	0,012612013
7	r	1,135848037	–0,002168169	1,137767416	0,012612013
8	r	1,135848037	–0,002168169	1,136581175	0,003475088
9	r	1,136128871	–0,000012966	1,136581175	0,003475088
10	r	1,136128871	–0,000012966	1,136301636	0,001323033
11	r	1,136128871	–0,000012966	1,136194861	0,000501124
12	$1-r^4$	1,136128871	–0,000012966	1,136137839	0,000062217
13	$1-r^5$	1,13612968	–0,000000582	1,136137839	0,000062217
14	$1-r^5$	1,13612968	–0,000000581	1,136130415	0,000005075

Висновки. Для збіжності послідовності наближень до розв'язку задачі мінімізації неперервної функції $y=f(x)$ або розв'язування нелінійного рівняння однієї змінної запропоновані:

1. Комбінований метод інтерполяції неперервної функції кубічним многочленом, на сітках золотого поділу вкладених проміжків з ітераціями:

а) виконати наближення до розв'язку задач розв'язками для кубічних функцій $y=T_3(x)$, а саме: 1) коренями рівняння $T_3'(x)=0$ замінити наближення до оптимізаційних точок функції $y = f(x)$; 2) коренями рівняння $T_3(x) = 0$ замінити наближення до коренів рівняння $f(x) = 0$;

б) збіжність до розв'язку поставлених задач є наслідком наближення неперервної функції інтерполюючими кубічними многочленами за умови, що вкладені відрізки стискаються і забезпеченням, щоб розв'язки обох задач належали послідовності вкладених відрізків;

в) на місце побудови послідовності наближень до розв'язків задач, що вимагає жорстких обмежень на класи функцій, пропонується будувати послідовність вкладених відрізків за правилами золотого перерізу, на яких здійснюється інтерполяція кубічними многочленами неперервних функцій.

2. Прискорення збіжності шляхом стиснення проміжку на основі степенів коефіцієнта золотого перерізу.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1989. 495 p.
2. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В., Петрук Д. О., Пугач О. С., Руда О. Г., Шмулян Я. В. Базисні системи в задачах математичного моделювання. *Фізико-математична освіта: науковий журнал*. 2016. Вип. **3** (9). С. 17–21.
3. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В., Бабюк Д. О. Оптимізаційні методи на основі золотого перерізу. *Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки (ПКТ-2016): праці V-ї Міжнародної науково-практичної конференції* (Чернівці, Україна, 21–24 травня 2016 р.). Чернівці, 2016. С. 28–30.

UDC 519.6:517.518

Interpolation cubic polynomials on golden section grids for optimization and solving nonlinear equations of a single variable

Vasyl Abramchuk, Olena Soia, Liubov Tiutiun, Ihor Abramchuk

Abstract. Interpolation cubic polynomials constructed on golden section grids possess unique properties that form the basis of an algorithm for the approximate solution of nonlinear equations and the search for extremal points of continuous single-variable functions. Since the interval is reduced by the golden ratio at each iteration, and the golden section grid requires the computation of only one new point per step, the algorithm demonstrates a high rate of implementation.

The extrema and zeros of the cubic polynomial are determined analytically, which enables rapid approximation of both the extremum search problem and the solution of nonlinear equations for continuous functions defined on finite intervals. The coefficients of the cubic polynomial are linear functions of the golden ratio parameter, resulting in minimal computational error.

As the interval narrows, the accuracy of the cubic polynomial's approximation to a continuous function increases; therefore, solving the problems of extremum search and nonlinear equation solving with the use of cubic interpolation does not require reducing the interval length $c_{\varepsilon_{mach}}$ to machine precision. This allows the construction of rhombastic algorithms for continuous functions of complex nature (where c is a constant and ε_{mach} is the machine epsilon).

Keywords: interpolation cubic polynomial, golden section grid, function optimization, solving nonlinear equations, convergence acceleration.

References

1. Kahaner, D., Moler, C., Nash, S. (1989). *Numerical Methods and Software*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
2. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V., Petruk, D. O., Puhach, O. S., Ruda, O. H., Shmulian, Ya. V. (2016). *Basic systems in problems of mathematical modeling,* Fizyko-Matematychna osvita: scientific gournal, **3** (9), 17–21. [in Ukrainian]
3. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V., Babyuk, D. O. (2016). *Optimization methods based on the golden section*, In problems of informatics and computer technology (PIKT-2016): Proceedings of the 5th international scientific and practical conference (May 21–24, Chernivtsi, Ukraine), 28–30. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Василь Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Vasyl Abramchuk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Любов Тютюн, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Liubov Tiutiun, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Ігор Абрамчук, старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21000, Україна;

Ihor Abramchuk, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske highway Str., Vinnytsia 21000, Ukraine.

Отримано / Received 01.11.2025

Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025

Опубліковано / Published 26.11.2025