

УДК 517.5

Про зображення функцій у вагових просторах Гарді в крузі

Оксана Косолович¹, Марія Кучма², Володимир Дільний³

¹Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математики та економіки, м. Дрогобич, Україна
oksana.kosolovych@dspu.edu.ua
<https://orcid.org/0009-0005-2070-5950>

²Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
maria.i.kuchma@lpnu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-5563-3847>

³Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8208-7960>

Анотація. У даній статті розглядаються вагові простори Гарді в одиничному крузі. Розглянуто одноточкові та двоточкові експоненційні ваги. Отримано результати про зображення у цих просторах.

Ключові слова: простір Гарді, одиничний круг, аналітичні функції, одноточкова вага, експоненційна вага, нерівність Коші–Буняковського, аналог формули Коші.

1. Вступ

Простори Гарді займають важливе місце у комплексному та функціональному аналізі. Також теорія цих просторів активно використовується в економічних дослідженнях, квантовій механіці та інших галузях науки. Класичними областями, у яких вивчаються простори Гарді, є круг та півплощина. Природним узагальненням просторів Гарді є вагові простори. Степеневі ваги досліджувалися з початку другої половини 20-го століття. Переважно властивості цих просторів повторювали властивості класичних просторів. Б. В. Винницький та його учні досліджували [1, 6] вагові простори Гарді у півплощині з експоненційною вагою. Однак для застосувань, особливо в функціональному аналізі, зручніше працювати з просторами Гарді в крузі. Ми будемо розглядати випадок одиничного круга. Дослідження останніх років В. Росса, Дж. Машрегі, А. Гарсії [2, 3, 5] та інших математиків відновили інтерес до властивостей просторів Гарді. Проте багато якісно нових результатів Б. В. Винницького та його

-

співробітників не мають аналогів для одиничного круга [4]. Цим питанням присвячено наше дослідження.

2. Постановка проблеми

Означення 1 [1, 3]. Нехай $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < +\infty$, простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ функцій f для яких:

$$\|f\|^p := \sup_{r \in (0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\} < +\infty.$$

Функції з цього простору мають майже скрізь на межі круга недотичні граничні значення і $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$. Простір $H^p(\mathbb{D})$ можна означити не тільки через інтегрування за концентричними колами, як в означенні 1, але і за іншими сім'ями кривих.

Для означення аналогу цього простору розглянемо частину дуги кола із центром в точці ib , $b \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ та радіусом $\sqrt{1+b^2}$, складемо рівняння цього кола в прямокутних декартових координатах

$$x^2 + (y-b)^2 = 1 + b^2.$$

Записавши його у полярній системі координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{2b \sin \varphi + \sqrt{4(b^2 \sin^2 \varphi + 1)}}{2} = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}, \\ \rho_2 &= \frac{2b \sin \varphi - \sqrt{4(b^2 \sin^2 \varphi + 1)}}{2} = b \sin \varphi - \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}. \end{aligned}$$

Останній розв'язок є стороннім, тому що є від'ємним.

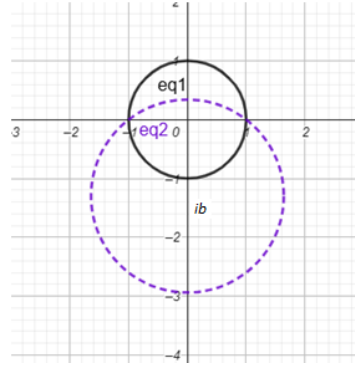
Отже, $\rho(\varphi) = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}$.

Означення 2 [4]. Нехай $\hat{H}^p(\mathbb{D}, \alpha)$, $1 < p < +\infty$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|^p |d(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|, \rho(\varphi) = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &+ \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|^p |d(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|, \rho(\varphi) = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

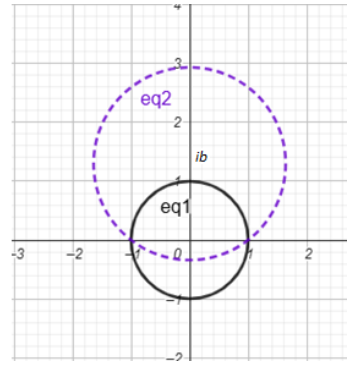
Як випливає з результатів А. М. Седлецького та [1], означення 1 і 2 є еквівалентними.

Надалі для спрощення записів ми будемо використовувати позначення ρ замість $\rho(\varphi)$, якщо це не викликатиме непорозуміння.



Якщо $b < -1$

Рис.1



Якщо $b > 1$

Рис.2

Розглянемо ваговий простір Гарді для одноточкової ваги, що визначається інтегруванням по дугам кіл.

Означення 3. Нехай $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\|f\| := \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Розглянемо також ваговий простір Гарді з двоточною вагою в точках $e^{i\alpha_1}$ та $e^{i\alpha_2}$.

Означення 4. Нехай $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\|f\| := \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

$$\left. + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \sup_{b>1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\ \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Означення 5. Позначимо через $L^\infty(0; +\infty)$ множину всіх вимірних функцій, для яких

$$\operatorname{esssup}\{|f(x)|: x \in (0; +\infty)\} < +\infty.$$

Означення 6. Нехай $\hat{H}_\sigma^\infty(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma \geq 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, що

$$\operatorname{esssup} \left\{ |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} : \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{D} \right\} < +\infty.$$

Розглянемо також простір з двоточною незрівноваженою вагою.

Означення 7 [5]. Нехай $\hat{H}_{\sigma_1, \sigma_2}^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що $\|f\| := \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p \left(\frac{2\rho \sigma_1 |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho \sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = b \sin \varphi + \right. \\ \left. + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \sup_{b>1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p \left(\frac{2\rho \sigma_1 |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho \sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\ \left. = \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$

Всі вище наведені простори мають майже скрізь на межі недотичні граничні значення.

3. Основні результати

В цьому розділі дослідимо структуру вагових просторів Гарді.

Лема 1. Якщо $f_1 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$ та $f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_2)$, де $p \geq 1$, $\sigma > 0$, то

$$f = f_1 + f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2).$$

Доведення. За умовою лема нам дано, що $f_1 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$,

$$f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_2), f(z) = f_1(z) + f_2(z) = f_1(\rho e^{i\varphi}) + f_2(\rho e^{i\varphi}).$$

Розглянемо інтеграл по деякому спрямлюваному контуру γ , що лежить в $\mathbb{D}$

$$\int_\gamma |f(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| = \int_\gamma |f_1(\rho e^{i\varphi}) + \\ + f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \quad (1)$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi}) + f_2(\rho e^{i\varphi})|^p \cdot e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi}) e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} \right. \\ & \quad \left. + f_2(\rho e^{i\varphi}) e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} \right|^p |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Використаємо нерівність Мінковського у вигляді

$$(\int_L |f(x) + g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_L |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_L |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що виконується нерівність

$$e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_j)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_j)+\rho^2}} \leq 1,$$

для всіх $\rho > 0, r \in [0; 2\pi]$, для кожного $j \in \{1, 2\}$, бо

$$-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_j)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_j)+\rho^2} < 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогічно для $f_2(\rho e^{i\varphi})$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отже, враховуючи нерівності (3) і (4) маємо

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi}) + f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \\ & + \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

За означенням простору $\hat{H}_{\sigma}^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$ маємо

$$\left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Аналогічно

$$\left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

З цих нерівностей отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \end{aligned}$$

Тому $f \in \hat{H}_{\sigma}^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$.

Лему доведено.

Подібними міркуваннями можна довести і наступні твердження.

Лема 3. Нехай $f_1 \in H_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $f_2 \in H_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, тоді $f_1 \cdot f_2 \in H_{\sigma_1+\sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1)$.

Лема 4. Нехай $f_1 \in H_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $f_2 \in H_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_2)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ тоді

$$f_1 \cdot f_2 \in H_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2).$$

Питання про оборотність цих теорем є складним, як показують дослідження вагових просторів Гарді у півплощині. Шляхом до просування в цьому напрямі є наступна теорема.

Теорема(аналог формули Коші). Якщо $f \in H_{\sigma}^p(\mathbb{D}_+; 0)$ то справедливе зображення

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} e^{2i\sigma \frac{e^{i\theta}-z}{(1-e^{i\theta})(1-z)}} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} e^{-2i\sigma \frac{e^{i\theta}-z}{(1-e^{i\theta})(1-z)}} d\theta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(u) \frac{\sin \frac{2\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}{u-z} du, \text{ для } z \in \mathbb{D} \setminus (-1; 1), \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} e^{2i\sigma \frac{e^{i\theta}-z}{(1-e^{i\theta})(1-z)}} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} e^{-2i\sigma \frac{e^{i\theta}-z}{(1-e^{i\theta})(1-z)}} d\theta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(u) \frac{2\sigma}{(1-u)(1-z)} du, \text{ для } z \in (-1; 1).$$

Доведення. Якщо $f \in H_\sigma^p(\mathbb{D}_+; 0)$. Тоді $f(z)e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}} \in H^p(\mathbb{D}_+)$. Застосуємо до цієї функції інтегральну формулу Коші: $f(z) \cdot e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}} dw$.

Поділивши обидві частини на $e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}}$, отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{i\sigma \left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z} \right)} dw = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{D}_+ \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_+} \end{cases} \quad (11)$$

Розглянемо $f(z)e^{\frac{-i\sigma(w+1)}{1-w}} \in H^p(\mathbb{D}_-)$. Застосуємо до цієї функції інтегральну формулу Коші

$$f(z) \cdot e^{\frac{-i\sigma(z+1)}{1-z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_-} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{\frac{-i\sigma(w+1)}{1-w}} dw.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $e^{\frac{-i\sigma(z+1)}{1-z}}$, отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_-} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{-i\sigma \left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z} \right)} dw = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{D}_- \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_-} \end{cases} \quad (12)$$

Додамо формули (11) і (12) отримаємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{i\sigma \left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z} \right)} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_-} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{-i\sigma \left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z} \right)} dw, z \in \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_-.$$

Якщо w належить одиничному колу комплексної площини, позначимо $w = e^{i\theta}$, якщо w — дійсне число, то $w = u$.

Введемо такі позначення

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} \cdot e^{i\sigma \left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z} \right)} de^{i\theta} \quad (13)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} \cdot e^{-i\sigma \left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z} \right)} de^{i\theta} \quad (14)$$

Підставивши (13) і (14) в (12), отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} \cdot e^{i\sigma \left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z} \right)} de^{i\theta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u-z} \cdot e^{i\sigma \left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} \right)} du + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} \cdot e^{-i\sigma \left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z} \right)} de^{i\theta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u-z} \cdot e^{-i\sigma \left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} \right)} du = I_1 + I_2 + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u-z} \cdot e^{i\sigma \left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} \right)} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u-z} \cdot e^{-i\sigma \left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} \right)} du = I_1 + I_2 + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u-z} \left(e^{i\sigma \left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} \right)} - e^{-i\sigma \left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} \right)} \right) du = I_1 + I_2 + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 f(u) \frac{e^{\frac{2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}} - e^{\frac{-2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}}{u-z} du - \text{голоморфна в } \mathbb{D}.$$

Спростивши вираз в показнику експоненти, отримаємо

$$\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} = \frac{2(u-z)}{(1-u)(1-z)}.$$

Отже, теорему доведено.

Висновок. Ми ввели низку вагових просторів Гарді в одиничному крузі, описали співвідношення між ними. Отримали зображення функцій із одного вагового простору Гарді у вигляді аналогу інтегральної теореми Коші, яка може бути основою для наступних досліджень цих просторів та їх застосувань.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не має конфліктів інтересів у даній роботі. Автори заявляють, що дослідження виконано з дотриманням правил етики журнальних досліджень.

Список використаних джерел

1. Дільний В. М. Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.01 – математичний аналіз / Дільний В. М.; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. Львів, 2015. 322 с.
2. Mashreghi J., Verreault W. Nonlinear Expansions in Reproducing Kernel Hilbert Spaces. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s43670-023-00069-3>
3. Garcia S. R., Mashreghi J., Ross W. T. *Finite Blaschke Products and Their Connections*. Cham: Springer, 2018. 328 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78247-8>
4. Дільний В. М. Про циклічність функцій в одному ваговому просторі Гарді в крузі. *Буковинський математичний журнал*. 2014. Т. 2, № 2–3. С. 86–89.
5. Nikolski N. K. *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz*. Vol. 1–2. Providence, RI: AMS, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1090/surv/093>
6. Vynnytskyi B. V. On Zeros of Functions Analytic in a Half Plane and Completeness of Systems of Exponents. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1994. Vol. 46. P. 514–532. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01058515>

UDC 517.5

On the representation of functions in weighted Hardy spaces in the disk

Oksana Kosolovych, Mariia Kuchma, Volodymyr Dilnyi

Annotation. This article examines weighted Hardy spaces in the unit disk. Single-point and two-point exponential weights are considered. Results concerning representations in these spaces are obtained.

Keywords: Hardy space, unit disk, analytic functions, single-point and two-point weight, Cauchy–Bunyakovsky inequality, analogue of the Cauchy formula.

References

1. Dilnyi, V. M. (2015). *Asymptotic and Approximation Properties of Functions of Exponential Type and Their Applications* (Doctoral dissertation, Ivan Franko National University of Lviv), Lviv, Ukraine. [in Ukrainian]
2. Mashreghi, J., Verreault, W. (2023). *Nonlinear Expansions in Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. <https://doi.org/10.1007/s43670-023-00069-3>
3. Garcia, S. R., Mashreghi, J., Ross, W. T. (2018). *Finite Blaschke Products and Their Connections*, Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78247-8>
4. Dilnyi, V. M. (2014). *On the cyclicity of functions in a certain weighted Hardy space in the disk*, Bukovinian Mathematical Journal, 2 (2–3), 86–89. [in Ukrainian]
5. Nikolski, N. K. (2002). *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz* (Vols. 1–2), AMS, Providence, RI. <https://doi.org/10.1090/surv/093>
6. Vynnytskyi, B. V. (1994). *On zeros of functions analytic in a half-plane and completeness of systems of exponents*, Ukrainian Mathematical Journal, 46, 514–532. <https://doi.org/10.1007/BF01058515>

Про авторів / About the authors

Оксана Косолович, магістрантка, кафедра математики та економіки, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

Oksana Kosolovych, Master's Student, Department of Mathematics and Economics, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24 Ivan Franko Street, Drohobych 82100, Ukraine;

Марія Кучма, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

Mariia Kuchma, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine;

Володимир Дільний, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра вищої математики, Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, вул. Степана Бандери, 12, 79000, Україна;

Volodymyr Dilnyi, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 29.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025

Опубліковано / Published 26.11.2025