

УДК 517.5:512.55

Диференційовні функції кватерніонної змінної

Леся Вотякова¹, Людмила Наконечна²

¹Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
lesia.votiakova@vspu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0003-4799-7752>

²Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
liudmila.nakonechna@vspu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0001-6348-2180>

Анотація. У цій статті проводиться дослідження в алгебрі кватерніонів. Зокрема, розглядаються функції кватерніонної змінної. Ми пропонуємо інший підхід до введення поняття диференційовної функції $f(q)$. Також ми побудували деякі елементарні функції, диференційовані в рамках цього підходу.

Ключові слова: алгебра кватерніонів; диференційовна функція; кватерніонна змінна; частинна похідна.

1. Вступ

Початок XIX ст. в математиці ознаменувався тим, що комплексні числа посіли важливе місце в науці. Як виявилось, застосування комплексних чисел дозволяє зручно і компактно сформулювати багато математичних моделей, що ефективно застосовуються в математичній фізиці і природничих науках.

У 1843 році ірландський математик Вільям Гамільтон відкрив алгебру кватерніонів, яка стала історично першою гіперкомплексною системою. З того часу наукові дослідження в алгебрі кватерніонів не припиняються. Тривають побудова кватерніонного аналізу і пошуки усе нових застосувань кватерніонів.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У роботах [1], [2] і [3] побудовано аналіз в алгебрі скінченного рангу за допомогою ізоморфної матричної алгебри. Таким самим шляхом ми йшли в дослідженні алгебри кватерніонів і побудові функцій кватерніонної змінної. У праці [4] описано два різні підходи до означення диференційовності функцій кватерніонної змінної. А в нашій роботі побудуємо ще одну версію диференційовних функцій кватерніонної змінної і означено деякі елементарні функції кватерніонної змінної.

3. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай маємо функцію кватерніонної змінної $f(q)$, визначену в деякій області $G \subset Q$.

Наша мета – означити поняття диференційовної функції кватерніонної змінної, причому щоб були диференційовними функції виду q^n і щоб виконувалось $(q^n)' = nq^{n-1}$.

Зрозуміло, що в основному ми будемо орієнтуватись на означення диференційовності функції комплексної змінної.

Будемо говорити, що функція $f(q)$ подається в канонічному вигляді, якщо існують дійснозначні функції від 4-х дійсних змінних $f_0(t, x, y, z)$, $f_1(t, x, y, z)$, $f_2(t, x, y, z)$, $f_3(t, x, y, z)$ такі, що

$$f(q) = f_0(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z)i + f_2(t, x, y, z)j + f_3(t, x, y, z)k. \quad (1)$$

Будемо вважати, що функція $f(q)$ від чотирьох змінних t, x, y, z диференційовна (в розумінні дійсного аналізу), якщо її диференціал подається у вигляді

$$df(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(q)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(q)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(q)}{\partial z} dz. \quad (2)$$

Як приклад, розглянемо функцію $f(q) = q^3$, визначену на Q .

$$\begin{aligned} q^3 &= (t + xi + yj + zk)^3 = \\ &= t^3 + 3t(xi + yj + zk) + 3t(xi + yj + zk)^2 + (xi + yj + zk)^3 = \\ &= t^3 - 3t(x^2 + y^2 + z^2) + (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)(xi + yj + zk). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} f_0(t, x, y, z) &= t^3 - 3t(x^2 + y^2 + z^2), f_1(t, x, y, z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)x, \\ f_2(t, x, y, z) &= (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)y, f_3(t, x, y, z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)z. \end{aligned}$$

Оскільки функції f_0, f_1, f_2, f_3 мають неперервні частинні похідні за всіма змінними, то функція q^3 диференційовна в розумінні дійсного аналізу.

Нехай

$$\partial q = \partial t + i\partial x + j\partial y + k\partial z, \quad \partial \bar{q} = \partial t - i\partial x - j\partial y - k\partial z.$$

Подано $\partial t, \partial x, \partial y, \partial z$ через ∂q і $\partial \bar{q}$. Маємо $\partial t = \frac{1}{2}(\partial q + \partial \bar{q})$,

$$\begin{aligned} i\partial q &= \partial ti - \partial x + \partial yk - \partial zj, \quad \partial qi = \partial ti - \partial x - \partial yk + \partial zj, \\ \partial \bar{q}i &= \partial ti + \partial x + \partial yk - \partial zj, \quad i\partial \bar{q} = \partial ti + \partial x - \partial yk + \partial zj. \end{aligned}$$

Звідси

$$\partial x = \frac{1}{2}(\partial \bar{q}i - i\partial q), \quad \partial x = \frac{1}{2}(i\partial \bar{q} - \partial q i).$$

Аналогічно

$$\partial y = \frac{1}{2}(\partial \bar{q}j - j\partial q), \quad \partial j = \frac{1}{2}(j\partial \bar{q} - \partial q j).$$

$$\partial z = \frac{1}{2}(\partial \bar{q}k - k\partial q), \quad \partial z = \frac{1}{2}(k\partial \bar{q} - \partial q k).$$

Скориставшись цими поданнями, (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} df(q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k \right) (\partial \bar{q} + \partial q) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x}i + \frac{\partial f_2}{\partial x}j + \frac{\partial f_3}{\partial x}k \right) (i\partial \bar{q} - \partial q i) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y}i + \frac{\partial f_2}{\partial y}j + \frac{\partial f_3}{\partial y}k \right) (j\partial \bar{q} - \partial q j) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}i + \frac{\partial f_2}{\partial z}j + \frac{\partial f_3}{\partial z}k \right) (k\partial \bar{q} - \partial q k) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial z} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) i + \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \right) k \Big) \partial \bar{q} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k \right) \partial q - \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x}i + \frac{\partial f_2}{\partial x}j + \frac{\partial f_3}{\partial x}k \right) \partial q i - \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y}i + \frac{\partial f_2}{\partial y}j + \frac{\partial f_3}{\partial y}k \right) \partial q j - \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}i + \frac{\partial f_2}{\partial z}j + \frac{\partial f_3}{\partial z}k \right) \partial q k. \end{aligned}$$

За аналогією з аналізом функцій комплексної змінної назвемо функцію $f(q)$ диференційовною, якщо в $df(q)$ вираз, що стоїть перед $\partial \bar{q}$ дорівнює нулю, тобто виконуються умови

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_0}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Слід зазначити, що умови (3) досить жорсткі. Їх не задовольняє навіть функція $f(q) = q$. Задовольняють ці умови функції виду

$$\begin{aligned} f(q) &= f_0(t, x) + f_1(t, x)i, \text{ де } \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \\ f(q) &= f_0(t, y) + f_2(t, y)j, \text{ де } \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \\ f(q) &= f_0(t, z) + f_3(t, z)k, \text{ де } \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

Розглянемо інший підхід. Оскільки за функцією

$$f(q) = f_0(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z)i + f_2(t, x, y, z)j + f_3(t, x, y, z)k$$

можна побудувати три функції типу функцій комплексної змінної

$$\begin{aligned} h_1(t, x) &= f_0(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z)i, \text{ де } y, z - \text{ параметри,} \\ h_2(t, y) &= f_0(t, x, y, z) + f_2(t, x, y, z)j, \text{ де } x, z - \text{ параметри,} \\ h_3(t, z) &= f_0(t, x, y, z) + f_3(t, x, y, z)k, \text{ де } x, y - \text{ параметри,} \end{aligned}$$

то для диференційовності цих функцій достатніми є умови

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

Тобто умови

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}. \quad (5)$$

Якраз такий підхід пропонується в роботі [4], тобто функція $f(q)$ диференційовна, якщо вона задовольняє умови (4), (5), причому похідна цієї функції обчислюється за формулою

$$f'(q) = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k.$$

Очевидно, що диференційовними згідно умов (4) є функції:

$$f(q) = q \text{ і } q' = 1, f(q) = q^2 \text{ і } (q^2)' = 2q.$$

Однак вже функція

$$\begin{aligned} f(q) &= q^3 = (t + xi + yj + zk)^3 = \\ &= t^3 - 3t(x^2 + y^2 + z^2) + (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)(xi + yj + zk). \end{aligned}$$

не є диференційовною

Тут

$$f_0(t, x, y, z) = t^3 - 3t(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$f_1(t, x, y, z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)x,$$

$$f_2(t, x, y, z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)y,$$

$$f_3(t, x, y, z) = (3t^2 - x^2 - y^2 - z^2)z$$

і очевидно, що для цих функцій умови (4) не виконуються.

Разом з тим умови (5) виконуються

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -6tx, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -6ty, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -6tz,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 6tx, \frac{\partial f_2}{\partial t} = 6ty, \frac{\partial f_3}{\partial t} = 6tz.$$

Ми пропонуємо опустити умову (4) і залишити умову (5), а саме диференційовність функції кватерніонної змінної означити так.

Означення 1. Функція $f(q)$ називається диференційовною у точці $q_0 = t_0 + x_0i + y_0j + z_0k$, якщо вона диференційовна в розумінні дійсного аналізу і виконуються умови (5), тобто у цій точці

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}.$$

Причому якщо функція $f(q)$ диференційовна в точці, то її похідною будемо називати

$$f'(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k. \quad (6)$$

(В математиці використовують термін «слабші умови», то тут можна говорити про «слабшу диференційовність» у порівнянні з означенням, прийнятим в роботі [6].)

Теорема 1. Якщо функції $f(q)$ і $g(q)$ диференційовні у розумінні означення 1, то їхня сума є диференційовною функцією, причому $\forall \alpha, \rho \in \mathbb{R}$ виконується

$$(\alpha \cdot f(q) + \beta \cdot g(q))' = \alpha \cdot f'(q) + \beta \cdot g'(q).$$

Доведення. Нехай $f(q)$ і $g(q)$ диференційовні за означенням 1 і $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$.

$$f(q) = f_0(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z)i + f_2(t, x, y, z)j + f_3(t, x, y, z)k.$$

$$g(q) = g_0(t, x, y, z) + g_1(t, x, y, z)i + g_2(t, x, y, z)j + g_3(t, x, y, z)k.$$

Розглянемо лінійну комбінацію $F(q) = \alpha \cdot f(q) + \beta \cdot g(q)$. Умови (5) виконуються. Знайдемо похідну цієї функції за формулою (6)

$$\begin{aligned} F'(q) &= (\alpha \cdot f(q) + \beta \cdot g(q))' = \\ &= \left(\frac{\partial(\alpha f_0 + \beta g_0)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha f_1 + \beta g_1)}{\partial t}i + \frac{\partial(\alpha f_2 + \beta g_2)}{\partial t}j + \frac{\partial(\alpha f_3 + \beta g_3)}{\partial t}k \right) = \\ &= \alpha \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k \right) + \beta \left(\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial t}i + \frac{\partial g_2}{\partial t}j + \frac{\partial g_3}{\partial t}k \right) = \\ &= \alpha \cdot f'(q) + \beta g'(q). \end{aligned}$$

Легко показати, $(q^3)' = 3q^2$, $(q^4)' = 4q^3$.

Покажемо, що функція $f(q) = \frac{1}{q}$, де q – ненульовий кватерніон, диференційовна.

Подамо $\frac{1}{q}$ в канонічному вигляді.

$$\frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{q\bar{q}} = \frac{t - xi - yj - zk}{(t + xi + yj + zk)(t - xi - yj - zk)}.$$

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= t^2 - (xi + yj + zk)^2 = t^2 - (xi + yj + zk)(xi + yj + zk) = \\ &= t^2 + x^2 + y^2 + z^2 - (xyk - xzj - xyk + yzi + xzj - yzi) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Позначимо $\|q\|^2 = q\bar{q} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$.

А тому $\frac{1}{q} = \frac{t}{\|q\|} - \frac{x}{\|q\|}i - \frac{y}{\|q\|}j - \frac{z}{\|q\|}k$.

Тому

$$f_0(t, x, y, z) = \frac{t}{\|q\|}, f_1(t, x, y, z) = -\frac{x}{\|q\|},$$

$$f_2(t, x, y, z) = -\frac{y}{\|q\|}, f_3(t, x, y, z) = -\frac{z}{\|q\|}.$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{t}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{2tx}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{2ty}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{2tz}{\|q\|^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{x}{\|q\|} \right) = \frac{2tx}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{2ty}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{2tz}{\|q\|^2}.$$

Отже, для цієї функції $\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}$, тобто вона диференційовна. Її похідна дорівнює

$$f'(q) = \left(\frac{1}{q} \right)' =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{\|q\|} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{x}{\|q\|} \right) i + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{y}{\|q\|} \right) j + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{z}{\|q\|} \right) k.$$

З того що

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{-t^2 + x^2 + y^2 + z^2}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{2tx}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{2ty}{\|q\|^2}, \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{2tz}{\|q\|^2}.$$

випливає

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{q} \right)' &= \frac{1}{\|q\|^2} (-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2txi + 2tyj + 2tzk) = \\ &= -\frac{1}{\|q\|^2} (t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2txi - 2tyj - 2tzk) = -\frac{1}{\|q\|^2} (\bar{q})^2. \end{aligned}$$

А оскільки $\|q\|^2 = (q\bar{q})^2 = q^2(\bar{q})^2$, то $\left(\frac{1}{q} \right)' = -\frac{1}{q^2}$.

Степенева функція q^n

Спочатку розглянемо функцію $f(q) = (xi + yj + zk)^n$

Маємо $(xi + yj + zk)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2)$,

$(xi + yj + zk)^3 = -(x^2 + y^2 + z^2)(xi + yj + zk)$,

$(xi + yj + zk)^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

Тоді для показників степеня маємо $4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3$ маємо

$$(xi + yj + zk)^{4n} = ((xi + yj + zk)^2)^{2n} = (x^2 + y^2 + z^2)^{2n},$$

$$(xi + yj + zk)^{4n+1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{2n} (xi + yj + zk), \quad (7)$$

$(xi + yj + zk)^{4n+2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{2n+1}$,

$(xi + yj + zk)^{4n+3} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{2n+1} (xi + yj + zk)$.

Розглянемо тепер функцію $q^{4n} = (t + xi + yj + zk)^{4n}$.

Скористаємось біномом Ньютона і рівностями ((7)). Подамо функцію в канонічному вигляді

$$q^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k t^{4n-k} (xi + yj + zk)^k = t^{4n} - C_{4n}^2 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) +$$

$$+ C_{4n}^4 t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \dots + C_{4n}^{4n-4} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} -$$

$$- C_{4n}^{4n-2} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + (x^2 + y^2 + z^2)^{2n} +$$

$$+ (C_{4n}^1 t^{4n-1} - C_{4n}^3 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots +$$

$$+ C_{4n}^{4n-3} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n}^{4n-1} (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1}) \cdot (xi + yj + zk).$$

Тут

$$f_0(t, x, y, z) = t^{4n} - C_{4n}^2 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) + C +$$

$$+ 4n^4 t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \dots + C + 4n^{4n-4} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} -$$

$$- C_{4n}^{4n-2} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + (x^2 + y^2 + z^2)^{2n},$$

$$f_1(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)x, \quad f_2(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)y,$$

$$f_3(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)z, \text{ де}$$

$$\varphi(t, x, y, z) = C_{4n}^1 t^{4n-1} - C_{4n}^3 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots +$$

$$+ C_{4n}^{4n-3} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n}^{4n-1} t (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1}.$$

Перевіряємо умови диференційовності

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial x} &= -C_{4n}^2 t^{4n-2} 2x + C_{4n}^4 t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2) 4x - \dots + \\ &\quad + C_{4n}^{4n-4} t^4 (2n-2) (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} 2x - \\ &\quad - C_{4n}^{4n-2} t^2 (2n-1) (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} 2x + 2n (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} 2x = \\ &= 4n \left(-C_{4n-1}^1 t^{4n-2} x + C_{4n-1}^3 t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2) x - \dots + \right. \\ &\quad \left. + C_{4n-1}^{4n-5} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} x - \right. \\ &\quad \left. - C_{4n-1}^{4n-3} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} x + (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} x \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t} &= C_{4n}^1 (4n-1) t^{4n-2} x - C_{4n}^3 (4n-3) t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2) x + \dots + \\ &\quad + C_{4n}^{4n-3} 3t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} x - C_{4n}^{4n-1} (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} x = \\ &= 4n \left(C_{4n-1}^1 t^{4n-2} x - C_{4n-1}^3 t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2) x + \dots - \right. \\ &\quad \left. - C_{4n-1}^{4n-5} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} x + \right. \\ &\quad \left. + C_{4n-1}^{4n-3} 4n - 3t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} x - (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} x \right).\end{aligned}$$

Отже, $\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}$. Аналогічно $\frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}$.

Функція $f(q) = q^{4n}$ диференційовна і її похідна дорівнює

$$\begin{aligned}(q^{4n})' &= \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} i + \frac{\partial f_2}{\partial t} j + \frac{\partial f_3}{\partial t} k = 4nt^{4n-1} - \\ &\quad - C_{4n}^2 (4n-2) t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2) + \\ &\quad + C_{4n}^4 (4n-4) t^{4n-5} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \dots + \\ &\quad + C_{4n}^2 (4n-4) t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n}^2 (4n-2) 2t (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + \\ &\quad + 4n \left(C_{4n-1}^1 t^{4n-2} - C_{4n-1}^4 (4n-2) t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2) + \right. \\ &\quad \left. + \dots - C_{4n-1}^{4n-5} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} + C_{4n-1}^{4n-3} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - \right. \\ &\quad \left. - (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} \right) \cdot (xi + yj + zk) = \\ &= 4n (t^{4n-1} + C_{4n-1}^1 t^{4n-2} (xi + yj + zk) + \\ &\quad + C_{4n-1}^2 t^{4n-3} (xi + yj + zk)^2 + C_{4n-1}^3 t^{4n-4} (xi + yj + zk)^3 + \dots + \\ &\quad + C_{4n-1}^{4n-3} t^2 (xi + yj + zk)^{4n-3} + C_{4n-1}^{4n-2} t (xi + yj + zk)^{4n-2} + \\ &\quad + (xi + yj + zk)^{4n-1}) = 4n(t + xi + yj + zk)^{4n-1} = 4nq^{4n-1}\end{aligned}$$

Перевіримо це для $q^{4n+1}f(q) = q^{4n+1}(t + xi + yj + zk)^{4n+1}$.

$$\begin{aligned}
 q^{4n+1} &= \sum_{k=0}^{4n+1} C_{4n+1}^k t^{4n+1-k} (xi + yj + zk)^k = \\
 &= t^{4n+1} + C_{4n+1}^1 t^{4n} (xi + yj + zk) + C_{4n+1}^2 t^{4n-1} (xi + yj + zk)^2 + \\
 &+ C_{4n+1}^3 t^{4n-2} (xi + yj + zk)^3 + C_{4n+1}^4 t^{4n-3} (xi + yj + zk)^4 + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-4} t^5 (xi + yj + zk)^{4n-4} + C_{4n+1}^{4n-3} t^4 (xi + yj + zk)^{4n-3} + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-2} t^3 (xi + yj + zk)^{4n-2} + C_{4n+1}^{4n-1} t^2 (xi + yj + zk)^{4n-1} + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n} t (xi + yj + zk)^{4n} + (xi + yj + zk)^{4n+1} = \\
 &= t^{4n+1} + C_{4n+1}^1 t^{4n} (xi + yj + zk) - C_{4n+1}^2 t^{4n-1} (x^2 + y^2 + z^2) - \\
 &- C_{4n+1}^3 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) (xi + yj + zk) + C_{4n+1}^4 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-4} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} + C_{4n+1}^{4n-3} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} (xi + yj + zk) - \\
 &- C_{4n+1}^{4n-2} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} - C_{4n+1}^{4n-1} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} (xi + yj + zk) + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n} t (x^2 + y^2 + z^2)^{2n} + (x^2 + y^2 + z^2)^{2n} (xi + yj + zk) = \\
 &= t^{4n+1} - C_{4n+1}^2 t^{4n-1} (x^2 + y^2 + z^2) + C_{4n+1}^4 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-4} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-2} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n} t (x^2 + y^2 + z^2)^{2n} + \\
 &+ (C_{4n+1}^1 t^{4n} - C_{4n+1}^3 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-3} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + \\
 &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{2n}) (xi + yj + zk).
 \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 f_0(t, x, y, z) &= t^{4n+1} - C_{4n+1}^2 t^{4n-1} (x^2 + y^2 + z^2) + \\
 &+ C_{4n+1}^4 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \dots + C_{4n+1}^{4n-4} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - \\
 &- C_{4n+1}^{4n-2} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + C_{4n+1}^{4n} t (x^2 + y^2 + z^2)^{2n}, \\
 f_1(t, x, y, z) &= (C_{4n+1}^1 t^{4n} - C_{4n+1}^3 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-3} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + \\
 &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{2n}) \cdot x, \\
 f_2(t, x, y, z) &= (C_{4n+1}^1 t^{4n} - C_{4n+1}^3 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-3} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + \\
 &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{2n}) \cdot y, \\
 f_3(t, x, y, z) &= (C_{4n+1}^1 t^{4n} - C_{4n+1}^3 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots + \\
 &+ C_{4n+1}^{4n-3} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - C_{4n+1}^{4n-1} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + \\
 &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{2n}) \cdot z.
 \end{aligned}$$

Знайдемо необхідні похідні. Маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial x} &= -C_{4n+1}^2 t^{4n-1} 2x + C_{4n+1}^4 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2) 4x - \dots + \\ &\quad + C_{4n+1}^{4n-4} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} (4n-4)x - \\ &\quad - C_{4n+1}^{4n-2} t^3 (2n-1) (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} 2x + C_{4n+1}^{4n} t (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} 4nx = \\ &= (4n+1)x (-4nt^{4n-1}x + C_{4n}^3 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2) - \dots + \\ &\quad + C_{4n}^{4n-3} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} - C_{4n}^{4n-1} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} + \\ &\quad + 4nt(x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1}), \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} &= (4n+1)x (4nt^{4n-1}x - C_{4n}^3 t^{4n-3} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots - \\ &\quad + C_{4n}^{4n-3} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} + C_{4n}^{4n-1} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - \\ &\quad - 4nt(x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1}).\end{aligned}$$

Маємо $\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t}$. Аналогічно $\frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t}$.

Отже, функція $f(q) = q^{4n+1}$ диференційовна і

$$\begin{aligned}f'(q) &= \frac{\partial}{\partial f} f(q) = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} i + \frac{\partial f_2}{\partial t} j + \frac{\partial f_3}{\partial t} k = \\ &= (4n+1) (t^{4n} - C_{4n}^2 t^{4n-2} (x^2 + y^2 + z^2) + \\ &\quad + C_{4n}^4 t^{4n-4} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \dots + C_{4n}^{4n-4} t^4 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - \\ &\quad - C_{4n}^{4n-2} t^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-1} + (x^2 + y^2 + z^2)^{2n} + \\ &\quad + (4n+1) (C_{4n}^1 t^{4n-1} - C_{4n}^3 t^{4n-1} (x^2 + y^2 + z^2) + \dots - \\ &\quad - C_{4n}^{4n-3} t^5 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-3} + C_{4n}^{4n-1} t^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{2n-2} - \\ &\quad - C_{4n}^{4n-1} t (xi + yj + zk)^{2n}) (xi + yj + zk) = (4n+1) q^{4n} \\ &\quad (q^{4n+1})' = (4n+1) q^{4n}.\end{aligned}$$

Аналогічно переконуємося, що функції q^{4n+2} і q^{4n+3} диференційовні і їхні похідні дорівнюють $(4n+2)q^{4n+1}$ і $(4n+3)q^{4n+2}$ відповідно. **А отже, для будь-якого натурального n функція q^n диференційовна і $(q^n)' = n \cdot q^{n-1}$.**

Висновки

У своїй роботі ми проводили дослідження в алгебрі кватерніонів. Основними результатами даної роботи є означення диференційовної функції кватерніонної змінної $f(q)$ та її похідної в особливий спосіб. А саме:

якщо

$$f(q) = f_0(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z)i + f_2(t, x, y, z)j + f_3(t, x, y, z)k$$

то умовами її диференційовності є

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial t} \end{cases}$$

і похідна обчислюється за формулою

$$f'(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}i + \frac{\partial f_2}{\partial t}j + \frac{\partial f_3}{\partial t}k.$$

В роботі ми побудували функції $f(q) = q^n$ і $f(q) = \frac{1}{q}$. Показали їх диференційовність за нашим означенням і переконались, що їхні похідні є такими ж, як для відповідних функцій дійсної і комплексної змінної, а саме:

$$(q^n)' = n \cdot q^{n-1},$$

$$\left(\frac{1}{q}\right)' = -\frac{1}{q^2}.$$

Перспективу подальших досліджень бачимо у побудові елементарних функцій, диференційовних за введеним нами означенням.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Вотякова Л. А. Основи аналізу функцій тернарної змінної. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова*. Серія 1: Фізико-математичні науки. Київ, 2008. № 9. С. 111–119.
2. Вотякова Л. А. Елементарні функції тернарної змінної. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. Серія: фізико-математичні науки. Київ, 2009. Вип. 1. С. 11–13.
3. Вотякова Л. А. Нормована алгебра тернарних чисел. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. Серія: фізико-математичні науки. Київ, 2009. Вип. 2. С. 7–10.
4. Abdel-Khalek K. Quaternion analysis. Dipartimento di Fisica – Università di Lecce, Italy, 1996. arXiv: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9607152v2>

UDC 517.5:512.55

Differentiable functions of quaternion variable

Lesia Votiakova, Liudmila Nakonechna

Abstract. This paper conducts research in the algebra of quaternions. In particular, functions of a quaternion variable are considered. We propose a different approach to introducing the concept of a differentiable function. We have also constructed some elementary functions that are differentiable within this approach.

Keywords: quaternion algebra, differentiable function, quaternion variable, partial derivative.

References

1. Votiakova, L. A. (2008). *Foundations of analysis of functions of a ternary variable*, Naukovyi chasopys NPU im. M. P. Drahomanova, Series 1: Physical and Mathematical Sciences, **9**, 111–119. [in Ukrainian]
2. Votiakova, L. A. (2009). *Elementary functions of a ternary variable*, Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics, **1**, 11–13. [in Ukrainian]
3. Votiakova, L. A. (2009). *Normed algebra of ternary numbers*, Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics, **2**, 7–10. [in Ukrainian]
4. Abdel-Khalek, K. (1996). *Quaternion analysis (v2)*, Preprint, arXiv.<https://arxiv.org/abs/hep-th/9607152v2>

Про авторів / About the authors

Леся Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Lesia Votiakova, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematics Education, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Людмила Наконечна, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Liudmyla Nakonechna, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematics Education, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 24.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 13.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025