МІФ
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 2 (2025), с. 206–215.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 2 (2025), pp. 206–215.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.9:517.977.2

Асимптотична поведінка розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь з малими параметрами

Мар'яна Ковтонюк[1], Олена Соя[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukmm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7444-1234

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

Анотація. Побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел, досліджено його асимптотичний характер.

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел, має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь, малий параметр, формальний розв'язок, асимптотичний характер розв'язку.

1. Вступ

Диференціальні рівняння та скінченні системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами досліджували відомі українські учені, зокрема С. Фещенко, М. Шкіль [8-9], М. Рашевський [8], А. Самойленко та І. Ключник [7], М. Сотніченко, В. Яковець та М. Стрельніков [10], М. Перестюк, О. Капустян, П. Фекета, Н. Касімова [6]. Для таких рівнянь побудовано формальний розв'язок та встановлено їх асимптотичний характер.

Зчисленні системи диференціальних рівнянь досліджували К. Валєєв [1], О. Жаутиков [2], М. Ковтонюк [3-5], К. Персидський, інші учені-математики.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-04

2. Постановка проблеми

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел, має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Цей результат присвячено асимптотичному розщепленню нескінченної системи лінійних диференціальних рівнянь на зчислену множину скінченних систем диференціальних рівнянь першого порядку. При цьому характеристичне рівняння кожної відщепленої системи має тільки один корінь кратності n, якому відповідає один елементарний дільник тотожної кратності. А для таких систем можна використати методику розв'язування систем диференціальних рівнянь з малим параметром в евклідовому просторі.

Отже, розглянемо систему

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{dt} = A(\tau,\varepsilon,\mu)\,x(\tau,\varepsilon,\mu), \tag{1}$$

де $\tau = \varepsilon^m \mu^p t$, m і p – цілі додатні числа $(m, p \in N)$, ε, μ – малі параметри з областей $\varepsilon \in \pi_\varepsilon = \left\{0 < |\varepsilon| \le \varepsilon_0,\ |\arg\varepsilon| \le \alpha\right\}$, $\mu \in \pi_\mu = \left\{0 < |\mu| \le \mu_0, |\arg\mu| \le \beta\right\}$, змінна τ належить області $\tau \in \pi_\tau = \left\{|\tau| \le L\right\}$ $\varepsilon_0, \mu_0, L, \alpha, \beta$ – сталі величини.

$x(\tau, \varepsilon, \mu)$ – нескінченний шуканий вектор, $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ – нескінчена матриця, елементи якої обмежені та аналітичні за комплексними змінними τ, ε, μ в області $D = \pi_\tau \times \pi_\varepsilon \times \pi_\mu$.

Припустимо, що матриця $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ допускає при $\tau \in \pi_\tau$ і $\mu \in \pi_\mu$ рівномірний асимптотичний розклад

$$A(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau, \mu) \tag{2}$$

при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \in \pi_\varepsilon)$. Коефіцієнти $A_s(\tau, \mu)$ $(s = 0, 1, 2, ...)$ нехай є обмеженими і аналітичними функціями по τ і μ.

Нехай

$$A(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^t A_r(\tau, \varepsilon) \tag{3}$$

є рівномірним асимптотичним розкладом $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ за степенями μ $(\mu \to 0)$ з аналітичними коефіцієнтами $A_r(\tau, \varepsilon)$, $r = 0, 1, 2, ...$ за змінними $\tau \in \pi_r$ і $\varepsilon \in \pi_\varepsilon$.

В обох випадках вважаємо, що матриця $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ належить простору рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Тоді коефіцієнти $A_r(\tau, \varepsilon)$ допускають асимптотичний розклад

$$A_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_{rs}(\tau) \tag{4}$$

при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \in \pi_\varepsilon)$.

3. Основні результати

Отже, відносно коефіцієнтів системи (1) припускаємо, що:

1. Матрицю $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ можна подати у вигляді асимптотичного розкладу

$$A_r(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s A_{rs}(\tau) \tag{5}$$

2. Матрицю $A_{00}(\tau)$ можна подати у вигляді

$$A_{00}(\tau) = diag\left\{ A_{00}^{(1)}(\tau), A_{00}^{(2)}(\tau), \ldots \right\} \tag{6}$$

де $A_{00}^{(j)}(\tau)$ – клітини Жордана розмірності n з характеристичним числом $\lambda_{00}^{(j)}(\tau)$.

3. Функції $\dfrac{d^n a_k(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau^n} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{d^n \left| a_{ki}(\tau, \varepsilon, \mu) \right|}{d\tau^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ аналітичні й обмежені за змінною $\tau \in \pi_\tau$ у цій області.

4. Для матриці $A_{00}(\tau)$ має місце умова $\lambda_{00}^{(j)}(\tau) \neq \lambda_{00}^{(i)}(\tau)$,

$$\left| \lambda_{00}^{(j)}(\tau) - \lambda_{00}^{(i)}(\tau) \right| \geq d,\ \ \tau \in \pi_\tau, \left(j \neq i,\ i,\ j = 1, 2 \ldots \right).$$

Теорема 1. *Нехай для матриці $A(\tau, \varepsilon, \mu)$ з нескінченної системи диференціальних рівнянь (1) виконуються умови 1 – 4, тоді дана система має формальний вектор–розв'язок*

$$x(\tau, \varepsilon, \mu) = U(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu) \tag{7}$$

де $U(\tau, \varepsilon, \mu)$ – нескінченна матриця, $h(\tau, \varepsilon, \mu)$ – нескінченний вектор, який можна визначити з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dh(\tau, \varepsilon, \mu)}{dt} = \Omega(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu) \tag{8}$$

в якій $\Omega^{(j)}(\tau, \varepsilon, \mu)$ є квадратними матрицями порядку n.

При цьому припустимо, що матриці $U(\tau, \varepsilon, \mu)$, $\Omega(\tau, \varepsilon, \mu)$ мають аналітичні елементи по τ, ε, μ в D і їх можна подати у вигляді рівномірних асимптотичних розкладів

$$U(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r U_r(\tau, \varepsilon),\ \ U_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_{rs}(\tau) \tag{9}$$

$$\Omega(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \Omega_r(\tau, \varepsilon),\ \ \Omega_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_{rs}(\tau) \tag{10}$$

при $\mu \to 0$, $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \in \pi_\varepsilon, \mu \in \pi_\mu) \forall \tau \in \pi_\tau$.

Доведення теореми полягає в побудові алгоритму, за яким можна знайти невідомі члени розкладів (9) і (10).

Підставимо вектор (7) у систему (1) і врахувавши, що
$\dfrac{dx(\tau, \varepsilon, \mu)}{dt} = \dfrac{dx(\tau, \varepsilon, \mu) d\tau}{d\tau} \dfrac{d\tau}{dt} = \varepsilon^m \cdot \mu^p \dfrac{dx(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau}$, отримаємо тотожність

$$\varepsilon^m \mu^p \frac{dU(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} h(\tau, \varepsilon, \mu) + \varepsilon^m \mu^p \frac{dh(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon, \mu) U(\tau, \varepsilon, \mu) h(\tau, \varepsilon, \mu),$$

або

$$\varepsilon^m \mu^p U(\tau,\varepsilon,\mu)\frac{dh(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=\left(A(\tau,\varepsilon,\mu)U(\tau,\varepsilon,\mu)-\varepsilon^m\mu^p\frac{dU(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\right)h(\tau,\varepsilon,\mu).$$

Врахуємо тепер умову (8), тоді остання рівність запишеться у вигляді

$$U(\tau,\varepsilon,\mu)\Omega(\tau,\varepsilon,\mu)h(\tau,\varepsilon,\mu)=\left(A(\tau,\varepsilon,\mu)U(\tau,\varepsilon,\mu)-\varepsilon^m\mu^p\frac{dU(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\right)h(\tau,\varepsilon,\mu).$$

Припустимо, що в останній тотожності матриці при векторі $h(\tau,\varepsilon,\mu)$ рівні:

$$U(\tau,\varepsilon,\mu)\Omega(\tau,\varepsilon,\mu)=\left(A(\tau,\varepsilon,\mu)U(\tau,\varepsilon,\mu)-\varepsilon^m\mu^p\frac{dU(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\right)$$

або

$$\varepsilon^m\mu^p\frac{dU(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=A(\tau,\varepsilon,\mu)U(\tau,\varepsilon,\mu)-U(\tau,\varepsilon,\mu)\Omega(\tau,\varepsilon,\mu) \tag{11}$$

В останньому співвідношенні прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра μ, прийдемо до рекурентних формул вигляду:

$$\mu^0: A_0(\tau,\varepsilon)U_0(\tau,\varepsilon)-U_0(\tau,\varepsilon)\Omega(\tau,\varepsilon)=0 \tag{12}$$

$$\mu^r: A_0(\tau,\varepsilon)U_r(\tau,\varepsilon)-U_r(\tau,\varepsilon)\Omega(\tau,\varepsilon)=U_0(\tau,\varepsilon)\Omega_r(\tau,\varepsilon)-$$
$$-\sum_{j=1}^{r}A_j(\tau,\varepsilon)U_{r-j}(\tau,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{r-1}U_j(\tau,\varepsilon)\Omega_{r-j}(\tau,\varepsilon) \tag{13}$$

$$\mu^r: A_0(\tau,\varepsilon)U_r(\tau,\varepsilon)=U_r(\tau,\varepsilon)\Omega_0(\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{r-1}U_j(\tau,\varepsilon)\Omega_{rj}(\tau,\varepsilon)-$$
$$-\sum_{j=1}^{r}A_j(\tau,\varepsilon)U_{r-j}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^m\frac{dU_{r-p}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}. \tag{14}$$

Тепер у рівняннях (12) – (14) будемо $(r\ge p)$ прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε.

Зокрема, з рівняння (12) отримаємо:

$$\varepsilon^0: A_{00}(\tau)U_{00}(\tau)-U_{00}(\tau)\Omega_{00}(\tau)=0. \tag{15}$$

$$\varepsilon^s: A_{00}(\tau)U_{0s}(\tau)-U_{0s}(\tau)\Omega_{00}(\tau)=U_{00}(\tau)\Omega_{0s}(\tau)+$$
$$+\sum_{j=1}^{s-1}U_{0i}(\tau)\Omega_{0,s-i}(\tau)-\sum_{i=1}^{s}A_{0i}(\tau)U_{0,s-i}(\tau) \qquad i=1,2,... \tag{16}$$

У рівнянні (14) покладемо $\Omega_{00}(\tau)=A_{00}(\tau)$. Тоді матрицю $U_{00}(\tau)$ можна взяти рівною нескінченній одиничній матриці, тобто $U_{00}(\tau)=E_\infty$.

Запишемо $U_{0s}(\tau)$ і $A_{0s}(\tau)$ у вигляді блочних матриць, відповідно до структури матриць $\Omega_{0s}(\tau)$, $s=0,1,2,...,k$

$$U_{0s}(\tau)=\begin{pmatrix}U_{0s,11}(\tau) & U_{0s,12}(\tau)\\ U_{0s,21}(\tau) & U_{0s,22}(\tau)\\ U_{0s,31}(\tau) & U_{0s,32}(\tau)\end{pmatrix},\ A_{0s}(\tau)=\begin{pmatrix}A_{0s,11}(\tau) & A_{0s,12}(\tau)\\ A_{0s,21}(\tau) & A_{0s,22}(\tau)\\ A_{0s,31}(\tau) & A_{0s,32}(\tau)\end{pmatrix},$$

де $U_{0s,ij}(\tau)\left\|u_{0s,ij}^{kl}(\tau)\right\|_{k,l=1}^{n}$, $A_{0s,ij}(\tau)=\left\|a_{0s,ij}^{kl}(\tau)\right\|_{k,l=1}^{n}$, $j=1,2$ – квадратні матриці розмірів $n\times n$.

У цьому випадку, використовуючи правило множення блочних матриць, рівняння (16) можна записати у вигляді

$$U_{0s,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(j)}(\tau)-\Omega_{00}^{(j)}(\tau)U_{0s,ij}(\tau)=\Omega_{0s}(\tau)+ \\ +\sum_{i=1}^{s-1}U_{0i}(\tau)\Omega_{0s-1}^{(j)}(\tau)-\sum_{l=1}^{s}A_{0l,ij}(\tau)\cdot U_{0s-1,ij}(\tau), \tag{17}$$

причому, вказана матрична система рівнянь розглядається уже в евклідовому просторі.

Нехай $i=j$, при цьому останню систему рівнянь можна подати у вигляді

$$U_{0s,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(j)}(\tau)-\Omega_{00}^{(j)}(\tau)U_{0s,ij}(\tau)=\Omega_{01}^{(j)}(\tau)-A_{01,ij}(\tau),\quad i=1,2,... \tag{18}$$

Покладемо $U_{01,ij}(\tau)=0$, тоді для матриць $\Omega_{01}^{(i)}(\tau)$ отримаємо такий вираз:

$$\Omega_{01}^{(i)}(\tau)=A_{01,ij}(\tau)\text{ або }\Omega_{01}^{(i)}(\tau)=\left\{A_{01,ij}(\tau);A_{01,22}(\tau);A_{01,33}(\tau);...\right\}$$

Нехай $i\neq j$. Тоді систему рівнянь (17) можна записати так:

$$U_{01,ij}\Omega_{00}^{(j)}(\tau)-\Omega_{00}^{i}(\tau)U_{01,ij}(\tau)=A_{01,ij}(\tau) \tag{19}$$

Неоднорідна матрична система рівнянь (18) внаслідок різних власних значень матриць $\Omega_{00}^{(j)}(\tau)$ і $\Omega_{00}^{(j)}(\tau)$ має єдиний розв’язок. Значить розв’язавши рівняння (18) відносно невідомих матриць $U_{01,ij}(\tau)$, знайдемо невідому матрицю $U_{01}(\tau)$.

Побудовані матриці $\Omega_{01}(\tau)$ і $U_{01}(\tau)$ в силу їх побудови й умов 1 – 2 теореми 1 є аналітичними за змінною τ, причому нескінченна матриця $U_{01}(\tau)$ є обмеженим лінійним оператором у просторі m. Останнє твердження проілюстровано на прикладі, коли розмірність блоку рівна 3 $(n=3)$. У цьому випадку матрична система (19) буде еквівалентна трьом системам неоднорідних рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha U_{01,ij}^{k1}(\tau)-U_{01,ij}^{k+1,1}(\tau)=a_{01,ij}^{k1}(\tau);\\ \alpha U_{01,ij}^{k2}(\tau)+U_{01,ij}^{k1}(\tau)-U_{01,ij}^{k+1,2}(\tau)=a_{01,ij}^{k2}(\tau);\quad k=1,2\\ \alpha U_{01,ij}^{k3}(\tau)+U_{01,ij}^{k2}(\tau)-U_{01,ij}^{k+1,3}(\tau)=a_{01,ij}^{k3}(\tau).\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}\alpha U_{01,ij}^{31}(\tau)=a_{01,ij}^{31}(\tau);\\ \alpha U_{01,ij}^{32}(\tau)+U_{01,ij}^{31}(\tau)=a_{01,ij}^{32}(\tau);\quad k=1,2\\ \alpha U_{01,ij}^{33}(\tau)+U_{01,ij}^{32}(\tau)=a_{01,ij}^{33}(\tau).\end{cases} \tag{21}$$

де $\alpha(\tau)=\lambda_0^{(j)}(\tau)-\lambda_0^{(i)}(\tau)$, $i,j=1,2,...$, починаючи з (21). При цьому, у зв’язку з громіздкими записами, запис аргументів і нижніх індексів будемо опускати. Тоді розв’язки приймають відповідно такий вигляд:

$$U^{31}=\frac{1}{\alpha}a^{31},$$

$$U^{32}=\frac{1}{\alpha}a^{32}-\frac{1}{\alpha^2}a^{31},$$

$$U^{33}=\frac{1}{\alpha}a^{33}-\frac{1}{\alpha^2}a^{32}+\frac{1}{\alpha^3}a^{31},$$

$$U^{21}=\frac{1}{\alpha}a^{21}-\frac{1}{\alpha^2}a^{31},$$
$$U^{22}=\frac{1}{\alpha}a^{22}-\frac{1}{\alpha^2}a^{21}+\frac{1}{\alpha^2}a^{32}+\frac{2}{\alpha^3}a^{31},$$
$$U^{23}=\frac{1}{\alpha}a^{23}-\frac{1}{\alpha^2}a^{22}+\frac{1}{\alpha^2}a^{21}+\frac{1}{\alpha^2}a^{33}-\frac{2}{\alpha^3}a^{32}+\frac{3}{\alpha^4}a^{31},$$
$$U^{11}=\frac{1}{\alpha}a^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a^{31},$$
$$U^{12}=\frac{1}{\alpha}a^{12}-\frac{1}{\alpha^2}a^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a^{22}-\frac{2}{\alpha^3}a^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a^{32}-\frac{3}{\alpha^4}a^{31},$$
$$U^{13}=\frac{1}{\alpha}a^{13}-\frac{1}{\alpha^2}a^{12}+\frac{1}{\alpha^3}a^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a^{23}-\frac{2}{\alpha^3}a^{22}+\frac{3}{\alpha^4}a^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a^{33}-\frac{3}{\alpha^4}a^{32}+\frac{6}{\alpha^5}a^{31},$$

Оцінимо матрицю $U_{01}(\tau)$. Для $j=3t,\ t=1,2,\dots$ маємо

$$U_{01,3t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left|U_{01,3ti}^{3k}\right|=\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right|\left|\alpha_{01,3t1}^{31}\right|+\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right|\cdot\left|a_{01,3t1}^{32}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|\left|a_{3t1}^{33}\right|+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right|\left|a_{01,2t2}^{21}\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|\left|a_{01,3t2}^{32}\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\left|a_{01,3t2}^{33}\right|+\ldots\le\delta\left(\left|a_{01,3t1}^{31}\right|+\left|a_{1,3t1}^{32}\right|+\left|a_{01,3t1}^{33}\right|+\left|a_{01,3t2}^{31}\right|+\left|a_{01,3t2}^{32}\right|+\ldots\right)\le\delta_1\gamma_0,$$

де $\alpha=\lambda_0^{(3)}(\tau)-\lambda_0^{(i)}(\tau),\ i=1,2,\ \delta_1=\max\left\{\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right|,\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|,\left|\frac{1}{a}\right|\right\}.$

Аналогічно для $j=rt,\ r=1,2,\ t=1,2,\dots$ отримаємо оцінки:

$$U_{01,2t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left|U_{01,2ti}^{2k}\right|=\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right|\left|\alpha_{01,2t1}^{21}\right|+\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right|\cdot\left|a_{01,2t+1}^{22}\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\left|a_{01,2t1}^{23}\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\right|\left|a_{01,2t1}^{31}\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\left|a_{01,2t1}^{23}\right|+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}\right|\left|a_{01,2t1}^{31}\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right|\left|a_{01,2t1}^{32}\right|+\left|\frac{1}{a^2}\right|\left|a_{01,2t1}^{33}\right|+\ldots\le 2\delta_2\gamma_0,$$

де $\delta_2=\max\left\{\delta_1;\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}\right|;\left|\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right|;\left|\frac{1}{a^2}\right|\right\},$

$$U_{01,t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left|U_{01,ti}^{1k}\right|\le 3\delta_3\gamma_0;$$
$$\delta_3=\max\left\{\delta_2;\left|\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^4}+\frac{6}{a^5}\right|;\left|\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^4}\right|;\left|\frac{1}{a^3}\right|\right\}.$$

Також можна довести, що матриця $U_{01}(\tau)$ обмежена по стовпцях. Дійсно

$$\sup_i\left\{\left|U_{01,ij}^{31}\right|;\left|U_{01,ij}^{21}\right|;\left|U_{01,ij}^{11}\right|\right\}=$$
$$=\sup_i\left\{\left|\frac{1}{\alpha}\alpha_{01,ij}^{31}\right|;\left|\frac{1}{\alpha}a_{01,ij}^{21}+\frac{1}{\alpha^2}a_{01,ij}^{31}\right|;\left|\frac{1}{\alpha}a_{01,ij}^{11}+\frac{1}{\alpha^2}a_{01,ij}^{21}+\frac{1}{\alpha^3}a_{01,ij}^{31}\right|\right\}\le$$
$$\le\sup_i\left|\frac{1}{\alpha}\right|\left\{\left|a_{01,ij}^{31}\right|,\left|a_{01,ij}^{21}\right|;\left|a_{01,ij}^{11}\right|\right\}+\sup_i\frac{1}{\left|\alpha^2\right|}\left\{\left|a_{01,ij}^{31}\right|;\left|a_{01,ij}^{21}\right|\right\}+$$

$$+\sup_i\left|\frac{1}{\alpha^3}\right|\left\{\left|a_{01,ij}^{31}\right|\right\}\le\left(\left|\frac{1}{\alpha}\right|+\left|\frac{1}{\alpha^2}\right|+\left|\frac{1}{\alpha^3}\right|\right)\delta_j,\ \forall j=1,2,...$$

Нехай у рівняннях (17) індекс $s=2$:

$$U_{02}(\tau)\Omega_{00}(\tau)-\Omega_{00}(\tau)U_{02}(\tau)=-\Omega_{02}(\tau)-U_{01}(\tau)\Omega_{01}(\tau)+A_{01}(\tau)U_{01}(\tau)+A_{02}(\tau),$$

або, використовуючи блочний вигляд матриць $U_{02}(\tau)$ і $\Omega_{02}(\tau)$, останнє рівняння записуємо у вигляді:

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(i)}(\tau)-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau)=-\delta_{ij}\Omega_{02}^{(i)}(\tau)-U_{01,ij}(\tau)\Omega_{01}^{(j)}(\tau)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,kj}(\tau)+A_{02,ij}(\tau) \tag{22}$$

Нехай у рівняннях (22) $i=j$:

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(i)}(\tau)-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau)=-\Omega_{02}^{(i)}(\tau+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,kj}(\tau)+A_{02,ij}(\tau).$$

Покладемо $U_{02,ij}(\tau)\equiv 0$, тоді

$$\Omega_{02}^{(i)}(\tau)=A_{02,ij}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,ki}(\tau) \tag{23}$$

Отже, матриця $\Omega_{02}(\tau)$ визначена. Матриця $\Omega_{02}(\tau)$ є обмеженим лінійним оператором у просторі m одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей, оскільки, згідно з умовами 1 – 3 теореми 1, маємо

$$\left\|A_{02}(\tau)\right\|=\sup_i\left\{\left\|A_{02,ij}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}U_{01,ki}(\tau)\right\|\right\}\le\gamma_0+r_q\gamma_0=\left(1+r_q\right)\gamma_0,$$

де $r_q=\sup_i\max\left|U_{02,ki}(\tau)\right|$.

З рівнянь (22) випливає, що

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(i)}(\tau)-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau)=-U_{01,ij}(\tau)(\tau+\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,kj}(\tau)+A_{02,ij}(\tau). \tag{24}$$

Це неоднорідна матрична система в евклідовому просторі.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}(\tau)U_{01,ki}(\tau)$ збіжний в силу умов 1 – 3 теореми 1 і обмеженості по стовпцях матриці $U_{01}(\tau)$ (за побудовою). Дійсно,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_{01,ik}U_{01,ki}(\tau)\right\|\le\gamma_q\sum\left\|A_{01,jk}(\tau)\right\|\le r_q\gamma_0.$$

Крім того, цей ряд в силу тих же умов є і нескінченне число разів диференційовним за змінною $\tau\in[0;L]$. Отже, аналогічно як для системи (17) – (18), можна знайти єдиний розв'язок $U_{02,ij}(\tau)$ системи (24) і визначити матрицю $U_{02}(\tau)$; причому матриці $U_{02}(\tau)$ і $\Omega_{02}(\tau)$ необмежено диференційовні за змінною τ і $U_{02}(\tau)$ є лінійним обмеженим оператором у просторі m.

Рівняння (17) при $s>2$ розв'язуємо аналогічно за тільки що описаною методикою. При цьому у лівій частині рівностей стоять вирази

$$U_{02,ij}(\tau)\Omega_{00}^{(j)}-\Omega_{00}^{(i)}(\tau)U_{02,ij}(\tau),\ i,\ j=1,2,... \tag{25}$$

а у правій

$$-\delta_y \Omega_{02}^{(i)}(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} U_{0k,ij}(\tau)\Omega_{0s-k}^{(j)}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k,ij}(\tau) U_{0s-1,ij}(\tau),\ i, j = 1, 2, ... \qquad (26)$$

Матриці, що стоять у (26), визначаються на попередніх кроках, при цьому кожний раз встановлюється необмежена диференційовність їх елементів за змінною $\tau \in [0; L]$, а також в силу умов теореми показується рівномірна збіжність рядів вигляду

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k,ij}(\tau) U_{0l-1,ij}(\tau),\ i, j = 1, 2, ...$$

і виконання для матриць $U_{0s}(\tau)$ умов (9), а також обмеженості по стовпцях.

Тому система рівнянь (17) $s > 2$ завжди має єдиний розв'язок $U_{0s}(\tau)$, $\Omega_{0s}(\tau)$, який є необмежено диференційовним за змінною τ, матриці $U_{0s}(\tau)$ обмежені по стовпцях і задовольняють умову (7).

Описана тут схема побудови і розв'язку показує, як можна знайти елементи формальних розкладів (12) – (14), тобто матриці $U_r(\tau),\ \Omega_r(\tau),\ r = 0, 1, 2, ...$

На завершення сформулюємо теорему, яка вказує на асимптотичний характер формального розщеплення.

Теорема 2. *Нехай для системи диференціальних рівнянь виконуються умови теореми 1 і* $\operatorname{Re}\lambda_j(\tau) < r \quad \forall r \in \pi_r$, *і нехай* $x_p(\tau, \varepsilon, \mu)$ – p *- наближений розв'язок, який отримуємо шляхом обривання рядів (10), (11) на* p *- му члені.*

Тоді існує стала C *, яка не залежить від* ε *і* μ *, що для всіх* $\tau \in \pi_\tau,\ \varepsilon \in \pi_\varepsilon,\ \mu \in \pi_\mu$ *виконується нерівність*

$$\left\| x(\tau, \varepsilon, \mu) - x_p(\tau, \varepsilon, \mu) \right\| \le \left(|\varepsilon|^p + |\mu|^p \right) \cdot C.$$

Висновки. Авторами статті визначено умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами вигляду (1) має розв'язок; побудовано формальний розв'язок такої системи у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана однакової розмірності та різних характеристичних чисел; встановлено асимптотичний характер побудованих розв'язків.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у вивченні розв'язків системи вигляду (1), коли головна матриця є нескінченною клітиною Жордана або інші випадки дискретного спектру.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Valeev K. G., Zhautikov O. A. Infinite systems of differential equations. Alma-Ata: Nauka, 1974. 413 p.
2. Жаутиков О. С Розв'язок крайової задачі для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*. 1960. Т. 12. С. 157–164.
3. Ковтонюк М. М. Асимптотична поведінка розв'язку однієї нескінченної системи лінійних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*, 1983, Т. 35. С. 630–636.
4. Ковтонюк М.М. Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика: колективна монографія / за заг. ред. М. М. Ковтонюк, С. М. Бака. Вінниця: ВНТУ, 2023. С. 54–79. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811

5. Ковтонюк Мар’яна, Соя Олена. Дослідження розв’язків зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*, Вип. 2 (1), с. 24–36. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02
6. Перестюк М. О, Капустян О. В., Фекета П. В, Касімова Н. В. Асимптотичні властивості розв’язків диференціальних рівнянь: навч.посіб. Київ: Київський університет, 2015. 125 с.
7. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. *Нелінійні коливання.* 2009. Т. 12, № 2. С. 208–234.
8. Шкіль М. І., Рашевський М. О. Асимптотичне інтегрування лінійних систем другого порядку з нестабільним спектром. Доповіді НАН України. 2002. № 3. С. 39–43.
9. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. Київ: Вища школа, 1971. 226 с.
10. Яковець В. П., Стрельніков М. А. Побудова асимптотичних розв’язків лінійних систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. *Український математичний журнал*. 2003. Т. 55. № 7. С. 961–976.

UDC 517.9:517.977.2

Asymptotic behavior of solutions of a countable system of linear differential equations with small parameters

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia

Abstract. A formal solution has been constructed for a countable system of first-order differential equations with two small parameters in the case where the principal matrix consists of Jordan blocks of equal dimension with distinct characteristic numbers. The asymptotic behavior of this solution has been investigated.

The aim of the article is to determine the conditions under which a countable system of first-order linear differential equations with two small parameters, in the case where the principal matrix consists of Jordan blocks of equal dimension and distinct characteristic numbers, admits a solution; to construct a formal solution; and to prove its asymptotic behavior.

Keywords: computable systems of differential equations, small parameter, formal solution, asymptotic behavior of the solution.

References

1. Valeev K. G., Zhautikov O. A. (1974). Infinite systems of differential equations. Nauka. Alma-Ata 1974. 413 p.
2. Zhautikov O. S. (1960). *Solution of the boundary value problem for an infinite system of ordinary differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **12**, 157–164.
3. Kovtoniuk M. M. (1983). *The asymptotic behavior of the solution of an infinite system of linear differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **35**, 630–636.
4. Kovtoniuk M. M. (2023). *Asymptotic solutions of a countable system of differential equations with two small parameters*, Problems of Mathematics and Computer Science in Pedagogical Institutions of Higher Education: Theory and Practice: A Collective Monograph, VNTU, Vinnytsia, 54–79. [in Ukrainian]. https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811
5. Kovtoniuk Mariana, Soia Olena. (2025). *Investigation of solutions of the countable system of second-order differential equations with small parameter of fractional rank*. Math. Inf. Phys. Sc. Ed. **2** (1), 24–36 [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02
6. Perestiuk M. O, Kapustian O. V., Feketa P. V, Kasimova N. V. (2015). Asymptotic Properties of Solutions to Differential Equations: A Textbook. Kyivskyi universytet. Kyiv. 125 p. [in Ukrainian]
7. Samoilenko A. M., Kliuchnyk I. H. (2009). *On the Asymptotic Integration of a Linear System of Differential Equations with a Small Parameter in Some of the Derivatives*. Neliniini kolyvannia. **12** (2), 208–234. [in Ukrainian]
8. Shkil M. I., Rashevskyi M. O. (2002). *Asymptotic integration of second-order linear systems with an unstable spectrum*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, **3**, 39–43. [in Ukrainian]
9. Shkil M. I. (1971). *Asymptotic Methods in Differential Equations*, Vyshcha shkola, Kyiv. [in Ukrainian]
10. Iakovets V. P., Strelnikov M. A. (2003). *Construction of Asymptotic Solutions to Linear Systems of Differential Equations with Two Small Parameters*, Ukrainian Mathematical Journal. **55** (7), 961–976.

Про авторів / About the authors

Мар'яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Sciences in Pedagogy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Sciences in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 24.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 12.11.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025