

УДК 517.9:51-7:004.42:378

## Метод Ейлера з подвоєним кроком у навчанні чисельного розв’язання диференціальних рівнянь: програмування, обчислення, візуалізація

Олена Семеніхіна<sup>1</sup>, Артем Юрченко<sup>2</sup>, Юрій Хворостіна<sup>3</sup>,  
Ігор Горовий<sup>4</sup>, Володимир Шамоня<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
кафедра інформатики, м. Суми, Україна  
[e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua](mailto:e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua)  
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

<sup>2</sup>Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
кафедра інформатики, м. Суми, Україна  
[a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua](mailto:a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua)  
<https://orcid.org/0000-0002-6770-186X>

<sup>3</sup>Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
кафедра математики, фізики та методик їх навчання, м. Суми, Україна  
[y-y-y@fizmatsspu.sumy.ua](mailto:y-y-y@fizmatsspu.sumy.ua)  
<https://orcid.org/0000-0002-8354-944X>

<sup>4</sup>Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
кафедра інформатики, м. Суми, Україна  
[i.gorovoy@fizmatsspu.sumy.ua](mailto:i.gorovoy@fizmatsspu.sumy.ua)  
<https://orcid.org/0009-0006-9239-7712>

<sup>5</sup>Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
кафедра інформатики, м. Суми, Україна  
[shamonawg@gmail.com](mailto:shamonawg@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-3201-4090>

---

*Анотація.* У статті представлено результати дослідження, спрямованого на розробку та апробацію методики формування обчислювального мислення студентів педагогічних спеціальностей через інтегроване використання програмування, чисельного аналізу та візуалізації. Центральним компонентом дослідження виступає реалізація методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple як засобу вивчення задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Методика включає розрахунок наближеного розв’язку з двома різними кроками, побудову графіків, оцінку похибки за правилом Річардсона та порівняння з еталонним значенням. Завдяки вбудованій мові програмування та можливостям візуалізації Maple, студенти реалізовували алгоритм, інтерпретували результати і будували графічні об’єкти, що відображають динаміку наближеного розв’язку та його точність.

Результати дослідження свідчать про те, що така форма організації навчання сприяє формуванню гнучких обчислювальних навичок, здатності до програмного моделювання та критичного аналізу помилок. Аналіз типових помилок студентів дозволив виокремити ключові труднощі, пов'язані з оперуванням масивами, коректною індексацією та тлумаченням залишкових членів. Обговорення результатів виконано у порівнянні з сучасними міжнародними підходами, зокрема з дослідженнями, що підкреслюють значущість візуалізації, алгоритмічного мислення і автономної реалізації методів обчислення в навчанні програмуванню. Методика має потенціал до масштабування в освітніх програмах, орієнтованих на підготовку фахівців у STEM-галузях, та демонструє ефективність інтеграції систем комп'ютерної математики в курси математичної інформатики.

*Ключові слова:* метод Ейлера, Maple, чисельне інтегрування, задача Коші, інформатика, програмування, обчислення, обчислювальне мислення, візуалізація, вчитель, інформатика.

---

## 1. Постановка проблеми

У підготовці майбутніх учителів інформатики й математики важливо формувати не лише знання з окремих навчальних дисциплін, а й забезпечити розвиток здатності до їх узгодженого застосування в умовах розв'язування прикладних задач. Особливої актуальності це набуває у сфері чисельного моделювання, яке потребує одночасного володіння математичними методами, навичками програмної реалізації алгоритмів та вміння візуалізувати результати для глибшого розуміння змісту обчислень. Такий міждисциплінарний підхід сприяє не лише професійній підготовці здобувачів освіти, але й створює умови для усвідомлення ними прикладного потенціалу теоретичних знань.

Одним із базових напрямів такого навчання є чисельне розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), що часто зустрічаються у прикладних задачах з фізики, біології, інформатики, економіки. Методи Ейлера, Рунге-Кутта, Адамса тощо не лише демонструють ефективні алгоритми наближеного інтегрування, а й формують у студентів уявлення про роль похибки, стійкість алгоритмів і важливість аналітичної інтерпретації результатів. Разом із тим, класичне вивчення цих методів без належного програмного супроводу, як правило, зводиться до ручних обчислень і статичних прикладів, що обмежує розвиток обчислювального мислення, не сприяє формуванню гнучких навичок застосування знань до нових задач і не дозволяє розвинути вміння бачити за аналітичними формулами динаміку розв'язку.

У зв'язку з цим особливе значення мають програмні середовища, що забезпечують комплексну підтримку моделювання: символічні й чисельні обчислення, візуалізацію та можливість створення власних алгоритмів засобами вбудованої мови програмування. До таких систем належить Maple [3], яка поєднує функціонал комп'ютерної алгебри з можливістю реалізації авторських методів та побудови графіків, що є особливо цінним у навчанні майбутніх учителів. Реалізація методів наближеного інтегрування в Maple дозволяє не лише ілюструвати принцип роботи алгоритмів, а й проводити гнучкий аналіз похибки, порівнювати методи, модифікувати їх для різних задач, поєднуючи програмування, чисельне моделювання та візуалізацію.

Таким чином, проблема дослідження полягає в обґрунтуванні та реалізації дидактичної моделі вивчення чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що ґрунтується на використанні методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple. Такий підхід має на меті формування в студентів інтегрованих професійних знань і вмінь, необхідних для ефективного викладання математики й інформатики в умовах цифрової трансформації освіти.

## 2. Аналіз актуальних досліджень

Сучасна освітня парадигма, орієнтована на інтеграцію теоретичних знань і прикладних навичок, висуває нові вимоги до викладання математичних і інформатичних дисциплін. Одним із ефективних засобів реалізації таких вимог є використання систем комп'ютерної математики (СКМ), які забезпечують широкий інструментарій для моделювання, обчислення та візуалізації. Згідно з низкою досліджень [2; 9], застосування таких систем як Maple, Mathematica, MATLAB не лише оптимізує обчислювальні процеси, а й сприяє розвитку логіко-аналітичного мислення, дозволяючи студентам бачити зв'язок між математичною моделлю, програмним кодом та її графічним представленням.

СКМ мають низку переваг, що роблять їх незамінними у навчанні методів чисельного інтегрування. По-перше, вони підтримують широкий спектр математичних задач: від розв'язання алгебраїчних рівнянь до обробки систем диференціальних рівнянь та векторного аналізу. Це забезпечує безперервність і взаємозв'язок навчального матеріалу в межах кількох дисциплін. По-друге, такі системи містять вбудовані мови програмування, що дає змогу реалізовувати авторські алгоритми або модифікувати класичні, як-от метод Ейлера чи метод Рунге–Кутта, що є основою для формування гнучких алгоритмічних навичок. Зокрема, Maple дозволяє одночасно працювати з процедурним і функціональним стилем програмування, що сприяє глибшому розумінню структури обчислювального процесу [7].

По-третє, важливу роль відіграє можливість візуалізації, яка значною мірою впливає на глибину засвоєння матеріалу. Візуальне подання результатів чисельного інтегрування у вигляді ламаних, точкових графіків, кривих розв'язку чи геометричних моделей дозволяє студентам не лише простежити динаміку наближеного розв'язку, а й зіставити його з еталонним. Такі можливості особливо важливі для формування уявлень про похибку чисельного методу, порядок точності та стабільність алгоритму. У роботах [1; 4] наголошується, що саме візуальна інтерпретація чисельних методів виступає основою для розвитку інженерного та обчислювального мислення в студентів.

Для майбутніх учителів математики та інформатики використання СКМ у навчальному процесі має особливе значення. Це дає змогу майбутнім педагогам не лише оволодіти ефективними інструментами для власного професійного застосування, а й зрозуміти принципи їх дидактичного впровадження у шкільну практику. Як зазначають Т. Кобильник, У. Когут і В. Жидик [8], формування алгоритмічної культури майбутніх учителів можливе лише за умови цілісного охоплення змістових, інструментальних та візуально-аналітичних компонентів, чого і можна досягти через використання інтегрованих підходів на основі СКМ.

Таким чином, сучасні дослідження підтверджують, що системи комп'ютерної математики є не лише інструментами розв'язання задач, а й потужним засобом навчання. Їх застосування в контексті чисельного розв'язування диференціальних рівнянь сприяє розвитку обчислювального мислення, гнучкості програмного моделювання та вміння візуально осмислювати результати. У поєднанні ці чинники створюють сприятливе середовище для підготовки кваліфікованих учителів нової генерації, здатних ефективно впроваджувати цифрові методи в освітній процес.

**Метою дослідження** є обґрунтування та перевірка ефективності використання методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple як засобу інтегрованого навчання майбутніх учителів інформатики та математики. Такий підхід передбачає поєднання програмування, чисельного обчислення й візуалізації результатів у рамках реалізації алгоритмів розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Реалізація цієї мети передбачає формування у студентів здатності до створення власних

програмних реалізацій відомих методів, інтерпретації отриманих результатів і критичного аналізу похибки.

### 3. Методи дослідження

Дослідження базується на ідеї, що вивчення чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь має супроводжуватися не лише демонстрацією формул і правил, а й активним залученням студентів до побудови алгоритмів, графічної інтерпретації наближених розв'язків і дослідження впливу кроку інтегрування на точність результату. Саме така діяльність дозволяє досягти міждисциплінарної інтеграції та забезпечити розвиток обчислювального мислення, аналітичних навичок і компетентностей, пов'язаних із програмуванням.

У рамках дослідження було реалізовано навчальну лабораторну роботу, що містить алгоритмічну реалізацію класичного методу Ейлера для розв'язування задачі Коші з фіксованим кроком  $h=0,1$  та зменшеним кроком  $h/2=0,05$ . Студенти реалізовували обчислення у середовищі Maple з використанням його вбудованої мови та інструментів для побудови графіків. Особливу увагу було приділено побудові ламаних, що відображають наближений розв'язок, точок, які відображають послідовність інтегрування, та вертикальних ліній, які репрезентують похибки у кожній точці.

У дослідженні застосовувалася методика подвійного перерахунку із подальшим використанням правила Річардсона для наближеного оцінювання похибки. Такий підхід дає змогу обчислювати правильні значущі цифри у наближеному розв'язку та зіставляти його з еталонним, отриманим за допомогою високоточних методів (наприклад, Runge–Kutta порядку 4 або RKF45). Додатково студенти проводили аналітичний супровід обчислень: вивчали вплив кроку на точність, інтерпретували залишковий член та аналізували порядок методу.

Методологія дослідження поєднує елементи якісного й кількісного аналізу. Здійснювалося педагогічне спостереження за ходом виконання роботи, аналіз змісту звітів, побудованих графіків та коментарів студентів. Збір емпіричних даних дозволив оцінити сформованість навичок програмування, обґрунтування чисельних процедур, здатність візуально інтерпретувати результати і рефлексувати над точністю обчислень.

Таким чином, у дослідженні використовувалися як інструменти Maple для обчислення та графіки, так і педагогічні засоби організації інтерактивної діяльності, спрямованої на розвиток складних професійних умінь у майбутніх педагогів. Це дозволило забезпечити повну реалізацію поставленої мети та закласти основу для аналізу ефективності подібних інтегрованих методик.

### 4. Основні результати

Проведене дослідження ґрунтувалося на аналізі виконання студентами лабораторної роботи, що передбачала реалізацію методу Ейлера з подвоєним кроком у середовищі Maple для чисельного розв'язання задачі Коші. Усі студенти працювали з власними варіантами рівняння у формі  $y'(x)=f(x,y)$  із заданими початковими умовами та кроками  $h=0,1$  і  $h/2=0,05$ . Вони здійснювали два незалежні розрахунки: перший – методом Ейлера на грубішому розбитті, другий – на уточненому, із подальшим визначенням похибки за правилом Річардсона. Результати наближених розрахунків зіставлялися з еталонними значеннями, обчисленими вбудованими чисельними методами Maple (RK45).

Наведемо розв'язання ДР  $y' = e^{-x-y} + \frac{1}{2y^2}$  з використанням Maple.  
 $> \text{with}(plots): \text{ur} := \text{exp}(-x-y) + 0.5*y^{(-2)}$ : права частина рівняння

```

> ur1:=subs(y=y(x),ur): eq:=diff(y(x),x)=ur1: диференціальне рівняння

$$eq := \frac{d}{dx} y(x) = e^{(-x - y(x))} + \frac{0.5}{y(x)^2}$$

> x0:=0: y0:=0.2: початкові умови
> u:=y(x0)=y0:
> r:=dsolve({eq,u},y(x),type=numeric); розв'язання методом RKF45.
> kd:=odeplot(r,[x,y(x)],0..1,color=pink,thickness=5): рожева крива - розв'язок задачі
Коші ДР для майбутньої побудови
> r_i := dsolve({eq,u}, type=numeric, output=array([0..1..2..3..4..5..6..7..8..9,1]));
Результатом буде масив даних на 10 точок розбиття (еталонні значення).
> a:=0: b:=1: n:=10; задання кінців відрізка та кількості точок розбиття
> xx:=array(0..n): xx2:=array(0..2*n): yy:=array(0..n): yy2:=array(0..2*n):
> t:=array(0..n): t2:=array(0..2*n):
> xx[0]:=x0: xx2[0]:=x0: yy[0]:=y0: yy2[0]:=y0:
> h:=(b-a)/n: крок
> h2:=h/2: подвійний крок
> f:=unapply(ur,x,y):
одинарний обрахунок
> for i from 1 to n do xx[i]:=xx[i-1]+h: yy[i]:=yy[i-1]+h*f(xx[i-1],yy[i-1]) od:
> for i from 0 to n do t[i]:=[xx[i],yy[i]] od: tt:=convert(t,list): створення масиву точок
кривої Ейлера
> ke:=listplot(tt,color=black): te:=pointplot(tt,color=red): побудова чорної ламаної та
червоних точок кривої Ейлера
> lom_ejler:=display(ke,te):
> for i from 1 to 2*n do xx2[i]:=xx2[i-1]+h2: yy2[i]:=yy2[i-1]+h2*f(xx2[i-1],yy2[i-1])
od: подвійний перерахунок
> for i from 0 to 2*n do
t2[i]:=[xx2[i],yy2[i]] od: tt2:=convert(t2,list):
> ke2:=listplot(tt2,color=blue): ламана Ейлера для подвійного перерахунку
> for i from 1 to n do
t3[i]:=[xx2[2*i-1],yy2[2*i-1]] od: tt3:=convert(t3,list):
> te2n:=pointplot(tt2,color=green): побудова зелених точок кривої Ейлера другого
перерахунку
> for i from 1 to n do
t4[i]:=[xx2[2*i],yy2[2*i]] od: tt4:=convert(t4,list):
> te2c:=pointplot(tt2,color=red): точки кривої Ейлера другого перерахунку
> lom_ejler2:=display(ke2,te2n,te2c):
> v:=array(1..n): вертикалі першого обрахунку
> for i from 1 to n do
v[i]:=implicitplot(x=xx[i],x=0..1, y=y0..rhs(r(xx[i])[2]),linestyle=DOT, color=green)
od:
> ve:=convert(v,list): v2:=array(1..2*n): жовті вертикалі подвійного перерахунку
> for i from 1 to 2*n do v2[i]:=implicitplot(x=xx2[i],x=0..1,
y=y0..yy2[i],linestyle=DOT,color=gold) od:
> ve2:=convert(v2,list):
> vo:=array(1..n): вертикалі похибок першого обрахунку
> for i from 1 to n do
vo[i]:=implicitplot(x=xx[i],x=0..1, y=rhs(r(xx[i])[2])..yy[i],color=red) od:
> veo:=convert(vo,list):

```

> *op(y);op(y2);* вивід таблиць значень шуканої функції для одинарного і подвійного перерахунків.

<i>array(0 .. 10, [</i>	(4) = 1.644037336	<i>array(0 .. 20, [</i>	(9) = 1.180404738
(0) = 0.2	(5) = 1.675486748	(0) = 0.2	(10) = 1.208139553
(1) = 1.531873075	(6) = 1.704653023	(1) = 0.8659365375	(11) = 1.234327649
(2) = 1.572736472	(7) = 1.731839082	(2) = 0.9192837980	(12) = 1.259132031
(3) = 1.609937495	(8) = 1.757297332	(3) = 0.9669093661	(13) = 1.282691179
	(4) = 1.010014290	(14) = 1.305123912	
	(5) = 1.049430649	(15) = 1.326533066	
(9) = 1.781239945	(6) = 1.085765348	(16) = 1.347008318	
(10) = 1.803846637	(7) = 1.119478416	(17) = 1.366628397	
<i>]</i>	(8) = 1.150929111	(18) = 1.385462832	

> *display(lom\_ejler,lom\_ejler2,ve,ve2,veo,kd);*

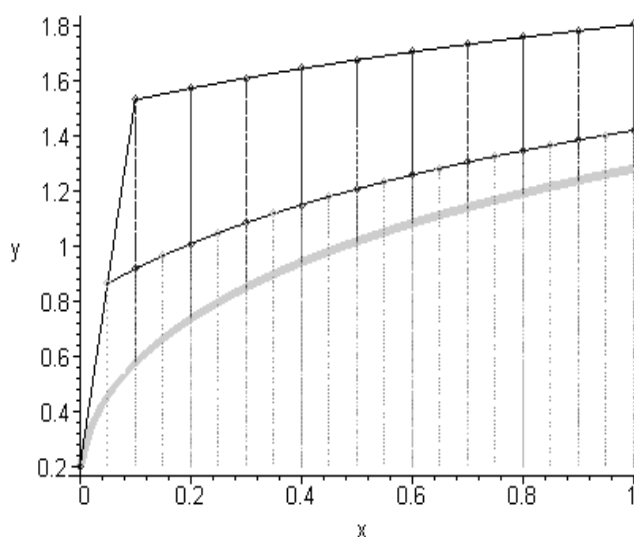


Рис. 1. Результати візуалізації за набором команд

Ключовим елементом роботи було програмування власного алгоритму чисельного інтегрування. Студенти створювали масиви значень аргументу та функції, реалізовували цикл послідовного обчислення значень функції, будували ламані лінії, що описують наближене розв'язання, а також зображали точки та вертикалі, які репрезентують залишкові похибки. Візуальний супровід забезпечував глибше осмислення результатів, дозволяючи спостерігати зменшення відхилення наближеного розв'язку при зменшенні кроку інтегрування. Така динамічна візуалізація сприяла емпіричному усвідомленню порядку точності методу Ейлера. Завдяки візуальному супроводу результати набували не лише числового, але й графічного значення, що сприяло осмисленню динаміки наближеного процесу інтегрування. Зокрема, студенти спостерігали, як із зменшенням кроку інтегрування зменшується відхилення наближеного розв'язку від еталонного, що дозволяло емпірично підтвердити порядок точності методу Ейлера.

У результаті аналізу студентських звітів було виявлено, що більшість учасників експерименту правильно реалізували як числову частину алгоритму, так і графічну інтерпретацію. Значна частина студентів виявила здатність самостійно модифікувати код: змінювати кроки, створювати нові масиви, додавати вертикальні оцінки похибок, використовувати вбудовані процедури для аналітичного розв'язання, зберігаючи при цьому логіку побудови алгоритму. Це засвідчило сформованість обчислювального мислення, вміння застосовувати програмування у розв'язанні математичних задач та здатність до узгодженого аналізу числових і графічних результатів.

Особливо важливим є те, що у процесі роботи студенти здійснювали порівняння результатів, інтерпретували залишкові члени похибок, встановлювали, скільки правильних значущих цифр міститься у наближеному розв'язку на кожному кроці. Це сприяло розвитку критичного мислення та вміння оцінювати якість отриманого результату. Завдяки вбудованій підтримці Maple для побудови графіків, учасники проєкту змогли створити багатокомпонентні візуалізації, що одночасно демонстрували кілька аспектів розв'язання: ламані Ейлера першого й другого порядку, вертикалі похибок, еталонну інтегральну криву, кольорове маркування точок, відповідно до способу обчислення.

Однак, у процесі виконання роботи було зафіксовано й низку типових помилок, що мають методичне значення. Найпоширенішою проблемою було змішування індексації в масивах: деякі студенти некоректно задавали початкові значення, що призводило до зсуву результатів у послідовності. Також траплялися труднощі з узгодженням типів даних при побудові точок та ламаних, зокрема при переході між масивами й списками, що вимагало додаткових пояснень щодо структур даних у Maple.

Інша помилка полягала у спробі безпосереднього обчислення похибки як різниці двох значень без врахування масштабу кроку або залишкового члена Річардсона, що свідчить про недостатнє розуміння змісту поняття «оцінка точності». У деяких випадках спостерігалось невірне формулювання аналітичного розв'язку або використання невідповідного методу для порівняння результатів (наприклад, Runge–Kutta 2-го порядку замість RK45), що потребувало індивідуальних консультацій.

Попри зазначені труднощі, студенти виявили високий рівень зацікавленості в аналізі результатів і особливо позитивно сприйняли візуальне представлення похибок у вигляді вертикальних ліній. Така форма візуалізації сприяла усвідомленню того, як навіть незначна зміна кроку може впливати на точність обчислень, а також дала змогу відчувати метод у дії, а не як абстрактну формулу.

У підсумку, результати виконання завдання засвідчили доцільність запропонованого підходу: студенти не лише опанували алгоритм чисельного інтегрування, але й отримали досвід роботи з мовою програмування Maple, навчилися аналізувати похибку, будувати наочні моделі результатів та формулювати висновки на основі візуальних і числових даних. Запропонована методика сприяла інтегрованому розвитку математичних, програмних і візуально-аналітичних компетентностей, що має вирішальне значення у професійній підготовці майбутніх педагогів у галузі STEM. Загальний аналіз виконаних робіт показав, що розроблена методика сприяє формуванню навичок застосування математичних знань у програмному середовищі, розвитку здатності будувати алгоритми та критично оцінювати наближені результати. Усі учасники продемонстрували базову або вищу здатність до реалізації обчислювального алгоритму у Maple, що свідчить про ефективність поєднання програмування, чисельних обчислень і візуалізації в підготовці майбутніх учителів математики та інформатики.

## 5. Обговорення

Аналіз результатів виконання лабораторної роботи свідчить про високу ефективність використання методу Ейлера з подвоєним кроком у навчанні майбутніх учителів математики та інформатики. Така методика дозволяє поєднати математичну строгість чисельного інтегрування з алгоритмічною гнучкістю програмної реалізації, створюючи умови для формування обчислювального мислення та прикладного розуміння математичних методів. Практичне засвоєння методу через самостійну побудову обчислювального алгоритму і його реалізацію у Maple забезпечує інтеграцію кількох змістових доменів: чисельного аналізу, програмування та візуалізації даних.

Системи комп'ютерної математики, зокрема Maple, дозволяють не лише реалізувати чисельні алгоритми, а й сприяють глибшому засвоєнню принципів моделювання. Подібні підходи отримують дедалі ширше визнання у міжнародному освітньому контексті. Так, згідно з дослідженням Q. Ou та інших [4], ефективне навчання програмуванню у школах і ЗВО Китаю значною мірою залежить від візуального представлення процесу обчислення, особливо при вивченні алгоритмів, що потребують ітераційної побудови, як-от метод Ейлера. Аналогічно, I. Sanusi, E. Cudjoe та інші [5] наголошують, що ключовою умовою формування програмної компетентності є осмислення обчислювальної логіки через моделювання процесів, а не лише шляхом синтаксичного відтворення коду.

Важливість візуалізації у вивченні чисельних методів підкреслюється й у роботі [1], де зазначено, що навіть на початковому рівні студенти краще опановують алгоритми, коли результати розв'язку представлені не тільки числово, а й графічно. У цьому сенсі інтеграція візуального з програмним та математичним шаром у Maple забезпечує синергетичний ефект, який в умовах україномовної вищої школи лише починає впроваджуватись системно. Відмінність запропонованого підходу полягає у залученні студента до повного циклу роботи з математичною задачею: від постановки й формулювання моделі до її чисельного розв'язання, верифікації, візуального супроводу та аналізу похибок.

Порівняльний аналіз також виявляє суттєві переваги роботи у Maple над іншими підходами. У багатьох країнах, зокрема США та Канаді, популяризуються середовища з фокусом на графічний інтерфейс і готові об'єкти (наприклад, GeoGebra, MATLAB GUI), однак це часто зменшує залучення до розуміння алгоритму. У нашому підході акцент зроблено саме на поєднання формального алгоритмічного мислення та візуалізації, що відповідає рекомендаціям дослідження [6], де підкреслено важливість контролю над процесом розв'язання як передумови успішного оволодіння програмуванням. Автор зазначає, що нові інструменти штучного інтелекту, як-от ChatGPT, не повинні витіснити традиційного моделювання, а мають доповнювати його, зберігаючи аналітичний компонент у навчальному процесі.

Нарешті, важливо зазначити, що за кордоном чисельне моделювання у педагогічних ЗВО ще не завжди розглядається як частина підготовки вчителів, тоді як в українському контексті така інтеграція (як у представленій роботі) дає змогу підготувати педагогів, здатних не лише викладати інформатику чи математику, а й пояснювати учням прикладну цінність формул, розкривати структуру обчислення та заохочувати до побудови власних цифрових моделей. Запропонована методика може бути адаптована до різних рівнів складності, що дозволяє її масштабувати відповідно до цілей шкільної чи вищої освіти в контексті STEM.

Таким чином, результати обговорення підтверджують значущість розробленого підходу як сучасного засобу формування цілісної математико-інформатичної компетентності з опорою на міжнародний досвід. Синтез чисельного обчислення, алгоритмічного мислення й візуального аналізу формує не лише фахові вміння, але й педагогічну готовність застосовувати ці методи у власній навчальній практиці.

**Висновки.** Проведене дослідження засвідчило ефективність використання методу Ейлера з подвоєним кроком у навчанні чисельного розв'язання диференціальних рівнянь як засобу інтеграції математичних, програмних і візуально-аналітичних компонентів професійної підготовки майбутніх учителів інформатики та математики. Реалізація навчального завдання в середовищі Maple створила умови для формування обчислювального мислення, розвитку алгоритмічних навичок, осмислення поняття похибки та її впливу на точність чисельного розв'язку. Студенти пройшли повний цикл роботи з математичною задачею: від формулювання математичної моделі до побудови



візуального представлення результатів із подальшим аналізом точності й коректності наближеного розв'язку.

Важливою перевагою запропонованого підходу стало залучення студентів до самостійної розробки алгоритму та реалізації чисельної процедури засобами мови програмування Maple. Це дозволило не лише поглибити розуміння структури методу Ейлера, але й сформуванню вміння використовувати програмне середовище як інструмент моделювання, візуалізації та аналітичного дослідження. Візуальна підтримка у вигляді побудови ламаних кривих, маркування точок, вертикалей похибок і порівняння з еталонними значеннями відіграла ключову роль у закріпленні понять, пов'язаних із наближенням, точністю та порядком методу.

Аналіз типових помилок, допущених студентами у процесі виконання завдання, виявив зони труднощів, пов'язані із застосуванням принципів індексації, розумінням структури масивів і правильним тлумаченням правила Річардсона. Ці труднощі мають не лише технічний, але й методичний характер, і можуть бути використані для вдосконалення навчального процесу через введення проміжних пояснювальних етапів і підтримки з боку викладача у момент формування критичних точок розуміння.

Порівняння з міжнародними підходами до навчання чисельного моделювання підтверджує відповідність обраної методики сучасним трендам STEM-освіти. Використання систем комп'ютерної математики, які підтримують одночасно обчислення, програмування і візуалізацію, дедалі частіше трактується як необхідна умова для підготовки педагогів нового покоління, здатних працювати в умовах цифрової трансформації освіти. Запропонований формат лабораторної роботи у Maple уможлиблює диференціацію навчання, підтримку індивідуальних темпів роботи та створення навчального середовища, орієнтованого на формування рефлексивного, критичного і продуктивного ставлення до обчислювального процесу.

Таким чином, результати дослідження підтверджують доцільність інтеграції програмування, обчислення і візуалізації в курсах підготовки майбутніх учителів математики та інформатики. Метод Ейлера з подвоєним кроком, реалізований у середовищі Maple, може виступати не лише навчальним об'єктом, а й дидактичним інструментом формування професійних компетентностей. У подальших дослідженнях доцільно розширити спектр завдань, включити системи з автоматичним оцінюванням результатів та здійснити порівняльний аналіз ефективності різних середовищ комп'ютерної математики у формуванні обчислювальних і педагогічних навичок.

**Конфлікт інтересів і етика.** Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

**Подяки.** Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

### Список використаних джерел

1. Coşkunserçe O. Comparing the use of block-based and robot programming in introductory programming education: Effects on perceptions of programming self-efficacy. *Computer Applications in Engineering Education*. 2023. Vol. 31 (5). P. 1234–1255. DOI: <https://doi.org/10.1002/cae.22637>
2. Khvorostina Yu., Shamonia V., Semenikhina O. The connection between the study of mathematics and programming through the prism of scientific and pedagogical research. *Вісник науки та освіти*. 2025. Т. 4, №34. С. 932–945. DOI: [https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4\(34\)-932-945](https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4(34)-932-945)
3. Maplesoft. *Maple – Technical Computing Software for Engineers, Mathematicians, and Scientists*. Waterloo Maple Inc. URL: <https://www.maplesoft.com/products/maple/>
4. Ou Q., Liang W., He Z., Liu X., Yang R., Wu X. Investigation and analysis of the current situation of programming education in primary and secondary schools. *Heliyon*. 2023. Vol. 9 (4). Article e15530. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15530>

5. Sanusi I. T., Cudjoe E. S., Ayanwale M. A., Adepoju B. Pre-Service Teachers' Perception of Programming Education. *SAGE Open*. 2025. Vol. 15 (1). DOI: <https://doi.org/10.1177/21582440251327019>
6. Yang T.-C. The Era of Learning Programming Through Program: Challenges and Potential of ChatGPT in Revolutionizing High School Programming Education. In A. Kashihara, B. Jiang, M. M. Rodrigo, & J. O. Sugay (Eds.). *32nd International Conference on Computers in Education Conference Proceedings. Asia Pacific Soc Computers in Education*. ICCE 2024. Vol II. P. 572–577. URL: <https://icce2024.org>
7. Дем'янт'єв Є., Шамо́ня В., Семеніхі́на О. Підготовка ІТ-фахівців до створення мобільних додатків: огляд актуальних досліджень. *Освіта. Інноватика. Практика*. 2025. Т. 13, № 1. С. 7–14. DOI: <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i1-001>
8. Кобильник Т., Когут У., Жидик В. Методичні аспекти вивчення основ алгоритмізації і програмування мовою Python у шкільному курсі інформатики у старших класах. *Фізико-математична освіта*. 2021. Т. 31, №5. С. 36–44. DOI: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-006>
9. Пенко В., Пенко О. Використання візуалізації на різних етапах вивчення дисципліни «Програмування». *Освіта. Інноватика. Практика*. 2023. Т. 11, № 2. С. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i2-005>

UDC 517.9:51-7:004.42:378

## Euler's Method with a double step in teaching the numerical solution of differential equations: programming, computation, visualization

Olena Semenikhina, Artem Yurchenko, Yurii Khvorostina,  
Ihor Gorovyi, Volodymyr Shamonia

*Abstract.* The article presents the results of a study aimed at developing and testing a methodology for fostering computational thinking in students of pedagogical specialties through the integrated use of programming, numerical analysis, and visualization. The central component of the research is the implementation of Euler's method with a double step in the Maple environment as a means of studying the Cauchy problem for an ordinary differential equation. The methodology involves calculating an approximate solution with two different step sizes, constructing graphs, estimating the error using Richardson's rule, and comparing the results with a reference value. Leveraging Maple's built-in programming language and visualization capabilities, students implemented the algorithm, interpreted the results, and created graphical objects illustrating the dynamics of the approximate solution and its accuracy. The findings indicate that this form of learning organization fosters the development of flexible computational skills, the ability to perform program-based modeling, and the capacity for critical error analysis. An analysis of typical student errors identified key difficulties related to array handling, correct indexing, and interpretation of residual terms. The discussion of results is carried out in comparison with contemporary international approaches, particularly with studies emphasizing the importance of visualization, algorithmic thinking, and independent implementation of computational methods in programming education. The methodology shows potential for scaling within educational programs aimed at preparing specialists in STEM fields and demonstrates the effectiveness of integrating computer algebra systems into courses on mathematical informatics.

*Keywords:* Euler's method, Maple, numerical integration, Cauchy problem, informatics, programming, computation, computational thinking, visualization, teacher, computer science.

### References

1. Coşkunserçe, O. (2023). *Comparing the use of block-based and robot programming in introductory programming education: Effects on perceptions of programming self-efficacy*, *Computer Applications in Engineering Education*, **31** (5), 1234–1255. <https://doi.org/10.1002/cae.22637>
2. Khvorostina, Yu., Shamonia, V., Semenikhina, O. (2025). *The connection between the study of mathematics and programming through the prism of scientific and pedagogical research*, *Visnyk nauky ta osvity – Bulletin of Science and Education*, **4** (34), 932–945. [https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4\(34\)-932-945](https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4(34)-932-945)
3. Maplesoft. (2024). *Maple – Technical Computing Software for Engineers, Mathematicians, and Scientists*. Waterloo Maple Inc. <https://www.maplesoft.com/products/maple/>
4. Ou, Q., Liang, W., He, Z., Liu, X., Yang, R., Wu, X. (2023). *Investigation and analysis of the current situation of programming education in primary and secondary schools*, *Heliyon*, **9** (4), e15530. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15530>
5. Sanusi, I. T., Cudjoe, E. S., Ayanwale, M. A., Adepoju, B. (2025). Pre-Service Teachers' Perception of Programming Education, *SAGE Open*, **15** (1). <https://doi.org/10.1177/21582440251327019>

6. Yang, T.-C. (2024). *The Era of Learning Programming Through Program: Challenges and Potential of ChatGPT in Revolutionizing High School Programming Education*, In A. Kashihara, B. Jiang, M. M. Rodrigo, & J. O. Sugay (Eds.), *32nd International Conference on Computers in Education Conference Proceedings*, Asia Pacific Soc Computers in Education, ICCE 2024, **II**, 572–577. <https://icce2024.org>
7. Diemientiev, Ye., Shamonia, V., Semenikhina, O. (2025). *Preparing IT specialists for mobile application creating: a review of current research*, Education. Innovation. Practice, **13** (1), 7–14. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i1-001>
8. Kobylnyk, T., Kohut, U., Zhydyk, V. (2021). *Methodical aspects of studying the fundamentals of algorithmization and programming language Python school course in informatics in high school*, Physical and Mathematical Education, **5** (31), 36-44. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-006>
9. Penko, V., Penko, O. (2023). *Using visualization at different stages of studying the discipline "Programming"*, Education. Innovation. Practice, **11** (2), 31–39. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i2-005>

### Про авторів / About the authors

**Олена Семеніхіна**, доктор педагогічних наук, професор, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

**Olena Semenikhina**, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

**Артем Юрченко**, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

**Artem Yurchenko**, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

**Юрій Хворостіна**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики, фізики та методик їх навчання, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

**Yurii Khvorostina**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Physics and Methods of Their Teaching, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

**Ігор Горовий**, аспірант, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

**Ihor Gorovyi**, Postgraduate student, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine;

**Володимир Шамо́ня**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра інформатики, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, вул. Роменська, 87, м. Суми, 40002, Україна;

**Volodymyr Shamonia**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, 87 Romenska Str., Sumy 40002, Ukraine.

Отримано / Received 15.08.2025  
Прийнято до друку / Accepted 04.11.2025  
Опубліковано / Published 26.11.2025