

УДК 517.95

Інтегро-диференціальні системи стохастичних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності

Олег Бугрій¹, Ігор Куцевол²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
oleh.buhrii@lnu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-1698-5559>

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
igor.kutsevol@lnu.edu.ua

<https://orcid.org/0009-0009-2157-5376>

Анотація. В статті розглянуто нелінійну параболічну систему другого порядку зі змінним показником нелінійності, інтегральним доданком та білим шумом. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для цієї системи.

Ключові слова: стохастичне параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, білий шум, узагальнений розв'язок.

1. Вступ

Рівняння з частинними похідними моделюють багато процесів оточуючої дійсності. Наприклад, дослідження процесу дифузії чи поширення тепла відіграють важливу роль в медицині, приладобудуванні, енергетиці тощо. Процеси теплопровідності переважно описуються нелінійними параболічними рівняннями чи системами таких рівнянь. Останнім часом активно розвиваються дослідження рівнянь з нелінійними доданками степеневого характеру, показник степеня яких (показник нелінійності) є функцією просторових та часової змінних, тобто є змінним. Вільний член параболічного рівняння переважно відповідає за внутрішні джерела чи стоки тепла, характерні для даного явища.

Часто такі параметри процесу є непередбачуваними. Стохастичні ефекти теплопровідності можуть виникати через неоднорідність матеріалів, що спричиняє неможливість чітко визначити їх теплові характеристики. З точки зору теорії рівнянь з частинними похідними випадковий характер зміни температури досліджуваного об'єкта чи явища можна спробувати врахувати, ввівши у вільний член рівняння доданок типу білого шуму. Отримані стохастичні рівняння з частинними похідними (СРЧП) слід досліджувати методами класичного функціонального аналізу та теорії випадкових процесів, що ми і робитимемо в цій праці.

Нехай $N, n \in \mathbb{N}$ та $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є обмеженою областю з гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір, зокрема, $\mathbb{S}$ – простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра підмножин множини $\mathbb{S}$ та $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ – імовірнісна міра. Введемо також такі позначення:

$$Q_{0,T} := \Omega \times (0, T), \quad \Sigma_{0,T} := \partial\Omega \times (0, T),$$

$$\Pi_{0,T} := \Omega \times (0, T) \times \mathbb{S}, \quad \Theta_{0,T} := (0, T) \times \mathbb{S},$$

У цій статті розглянемо систему СРЧП зі змінним показником нелінійності та інтегральним доданком, збурену випадковим доданком типу білого шуму. Шукатимемо вектор-функцію $u = (u_1, \dots, u_N) : \Pi_{0,T} \rightarrow \mathbb{R}^N$ таку, що

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x, t) u_{x_i} \right)_{x_j} + G(x, t) |u|^{q(x,t)-2} u + \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, y, t) u(y, t) dy = F(x, t, \omega) + b_t(x, t, \omega), \quad (x, t, \omega) \in \Pi_{0,T}, \quad (1)$$

$$u(x, t, \omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t, \omega) \in \Theta_{0,T}, \quad (2)$$

$$u(x, 0, \omega) = u_0(x, \omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}. \quad (3)$$

Тут A_{ij} , G , $\mathfrak{Z}$ – деякі матриці, $q = q(x, t)$ – змінний показник нелінійності системи, F , b_t та u_0 – деякі вектори, зокрема, b_t – вектор типу білого шуму. Далі покажемо, що мішана задача (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок. Відповідне (1) модельне рівняння без інтегрального доданка розглянуто у попередній праці першого автора [1], де також є стислий перелік літератури по цій тематиці. У [2]-[3], зокрема, деталізовано поняття білого шуму та розглянуто деякі його властивості. Рівняння зі змінними показниками нелінійності та без білого шуму досліджено, наприклад, у [4]-[7].

2. Постановка задачі і основні результати

Перш за все введемо необхідні позначення. Нехай $m, s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, B – банахів простір, $\|\cdot\|_B \equiv \|\cdot\|_B$ – його норма, B^* – спряжений до B простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ – скалярний добуток між B^* та B , $B^N := B \times \dots \times B$ – декартовий степінь B , $\|z; B^N\| := \|z_1\|_B + \dots + \|z_N\|_B$, $z = \text{col}(z_1, \dots, z_N) \in B^N$, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ – скалярний добуток в деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $|\cdot|_{\mathcal{H}} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}}$.

Користуватися такими стандартними позначеннями функційних просторів: $C(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ – простори гладких функцій, $D(\Omega)$ – простір основних функцій, $L^p(\Omega)$ – стандартний простір Лебега, $W^{m,p}(\Omega)$ та $W_0^{m,p}(\Omega)$ – стандартні простори Соболева, $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$, $C(\Omega; B)$ та $C^m(\Omega; B)$ – простори B -значних

гладких функцій, визначених на Ω , $L^p(\Omega; B)$ – простори Лебега-Бохнера B -значних інтегровних функцій, визначених на Ω . Нехай $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x)$ – деяка функція, $L^{\mathbf{p}(x)}(\Omega)$ – узагальнений простір Лебега функцій, інтегровних зі степенем $\mathbf{p}(x)$ на Ω (див. [3, с. 84-85] для деталізації). Аналогічні позначення використовуватимемо для просторів функцій, які визначено на $(0, T)$ чи $Q_{0,T}$ тощо.

Нехай $L_p(\mathbb{S})$ – випадковий простір Лебега, тобто простір випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом порядку p (див. [2, с.16-17] для деталізації), $L_p(\mathbb{S}; B)$ – відповідний простір B -значних випадкових величин, $L_{r(t)}(\Theta_{0,T})$ – узагальнений випадковий простір Лебега, де $r = r(t)$ – деяка функція (див. [3, с. 87]). Аналогічно визначимо простір $L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$ вимірних функцій $u : \Pi_{0,T} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що

$$\rho_q(u, \Pi_{0,T}) := \int_{\Pi_{0,T}} |u(x, t, \omega)|^{q(x,t)} dx dt \mathbb{P}(d\omega) < \infty,$$

де $q \in L^\infty(Q_{0,T})$, $q^0 := \operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in Q_{0,T}} q(x, t)$, $q_0 := \operatorname{ess\,inf}_{(x,t) \in Q_{0,T}} q(x, t)$ та $q_0 > 1$. Розглядатимемо цей простір з нормою Люксембурга

$$\|u; L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})\| := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_q(u/\lambda; \Pi_{0,T}) \leq 1\}. \quad (4)$$

Нехай (див. [4] для деталей)

$$\mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T}) := \{q \in L^\infty(Q_{0,T}) \mid q \text{ – глобально log-неперервна}$$

$$\text{за Гельдером функція, } q_0 \geq 1\}. \quad (5)$$

Введемо також такі позначення:

$$H := [L^2(\Omega)]^N, \quad V_s := [H_0^s(\Omega)]^N, \quad (6)$$

$$V(t) := V_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^N, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$U(Q_{0,T}) := L^2(0, T; V_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N, \quad (8)$$

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \mid u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\}, \quad (9)$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A1): A_{ij} – квадратні матриці N -го порядку з елементами з $L^\infty(Q_{0,T})$;

$A_{ij} = A_{ji}$ ($i, j = \overline{1, n}$); майже для всіх (м.д.в.) $(x, t) \in Q_{0,T}$ та для всіх (д.в.) $\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathbb{R}^N$ виконуються оцінки

$$a_0 \sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x, t) \xi^i, \xi^j \right)_{\mathbb{R}^N} \leq a^0 \sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \quad (0 < a_0 \leq a^0 < +\infty);$$

(Q1): $q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$, $q_0 \geq 2$;

(G1): G – квадратна матриця N -го порядку, $G = \operatorname{diag}(g_1, \dots, g_N)$,

$g_l \in L^\infty(Q_{0,T})$ та $0 < g_0 \leq g_l(x, t) \leq g^0 < +\infty$ м.д.в. $(x, t) \in Q_{0,T}$, $l = \overline{1, N}$;

(F1): $F \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0, T; H))$;

(U1): $u_0 \in L_2(\mathbb{S}; H)$;

(W1): W – вінерівський процес (див. [1, с. 109]), $b_0 \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$,

$$b(x, t, \omega) = b_0(x)W(t, \omega), \quad (x, t, \omega) \in \Pi_{0,T}. \quad (10)$$

Нехай b_t – білий шум, тобто похідна в сенсі розподілів від функції b з умови **(W1)**. Щоб ввести поняття розв'язку задачі (1)-(3) зробимо в ній заміну невідомої функції $u \rightsquigarrow \tilde{u}$ за правилом

$$u(x, t, \omega) = \tilde{u}(x, t, \omega) + b(x, t, \omega). \quad (11)$$

Оскільки $b|_{x \in \partial\Omega} = 0$ та $b|_{t=0} = 0$, то для знаходження нової невідомої функції $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N) : \Pi_{0,T} \rightarrow \mathbb{R}^N$ отримаємо таку задачу:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x, t) \left(\tilde{u} + b(x, t, \omega) \right)_{x_i} \right)_{x_j} + G(x, t) \left| \tilde{u} + b(x, t, \omega) \right|^{q(x,t)-2} \left(\tilde{u} + b(x, t, \omega) \right) + \\ + \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, y, t) \left(\tilde{u} + b(y, t, \omega) \right) dy = F(x, t, \omega), \quad (x, t, \omega) \in \Pi_{0,T}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{u}(x, t, \omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t, \omega) \in \Theta_{0,T}, \quad (13)$$

$$\tilde{u}(x, 0, \omega) = u_0(x, \omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}. \quad (14)$$

Визначимо оператори $A(t) : V_1 \rightarrow V_1^*$, $\mathbf{A} : L^2(0, T; V_1) \rightarrow L^2(0, T; V_1^*)$, $N(t) : [L^{q(x,t)}(\Omega)]^N \rightarrow [L^{q'(x,t)}(\Omega)]^N$ (тут $q' = \frac{q}{q-1}$), $\mathbf{N} : [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N \rightarrow [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^N$, $E(t) : [L^2(\Omega)]^N \rightarrow [L^2(\Omega)]^N$ та $\mathbf{E} : [L^2(Q_{0,T})]^N \rightarrow [L^2(Q_{0,T})]^N$ за такими правилами:

$$\langle A(t)z, w \rangle_{V_1} := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x, t) z_{x_i}(x), w_{x_j}(x) \right)_{\mathbb{R}^N} dx, \quad t \in (0, T), \quad z, w \in V_1; \quad (15)$$

$$\langle \mathbf{A}u, v \rangle_{L^2(0,T;V_1)} := \int_0^T \langle A(t)u(t), v(t) \rangle_{V_1} dt, \quad u, v \in L^2(0, T; V_1); \quad (16)$$

$$(N(t)s)(x) := G(x, t) |s(x)|^{q(x,t)-2} s(x), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad s \in [L^{q(x,t)}(\Omega)]^N; \quad (17)$$

$$(\mathbf{N}r)(x, t) := G(x, t) |r(x, t)|^{q(x,t)-2} r(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad r \in [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N; \quad (18)$$

$$(E(t)h)(x) := \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, t, y) h(y) dy, \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad h \in [L^2(\Omega)]^N; \quad (19)$$

$$(\mathbf{E}p)(x, t) := (E(t)p(t))(x) = \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, t, y) p(y, t) dy, \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad p \in [L^2(Q_{0,T})]^N. \quad (20)$$

Використовуватимемо позначення

$$(z, v)_{\Omega} := \begin{cases} \int_{\Omega} (z(x), v(x))_{\mathbb{R}^N} dx, & z = \text{col}(u_1, \dots, u_N) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ & v = \text{col}(v_1, \dots, v_N) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \int_{\Omega} z(x) v(x) dx, & z, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases} \quad (21)$$

Насамкінець введемо оператори $S(t) : V(t) \rightarrow V^*(t)$ та $\mathbf{S} : U(Q_{0,T}) \rightarrow [U(Q_{0,T})]^*$ так:

$$\langle S(t)z, w \rangle_{V(t)} := \langle A(t)z, w \rangle_{V_1} + (N(t)z, w)_{\Omega} + (E(t)z, w)_{\Omega}, \quad z, w \in V(t), \quad t \in (0, T); \quad (22)$$

$$\langle Su, v \rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle Au, v \rangle_{L^2(0,T;V_1)} + \int_{Q_{0,T}} \left[(Nu)(x, t) + (Eu)(x, t) \right] v(x, t) \, dxdt, \quad (23)$$

$u, v \in U(Q_{0,T})$. Припустимо, що виконується умова

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0} \right), \quad h = \min \left\{ 2, \frac{q^0}{q^0 - 1} \right\}. \quad (24)$$

Зазначимо, що з (24) випливає, що простір V_s з позначення (6) задовольняє включення: $V_s \supset (V_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^N) \supset V(t)$, $t \in [0, T]$.

Означення 1. Функція $\tilde{u}$ називається узагальненим розв'язком задачі (12)-(14), якщо

- 1) $\tilde{u} \in W(Q_{0,T})$ майже напевно (м.н.);
- 2) м.н. функція $\tilde{u}$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_{0,T}} \left[-(\tilde{u}, z_t)_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(\tilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), z_{x_j} \right)_{\mathbb{R}^N} + \left(G|\tilde{u} + b|^{q(x,t)-2}(\tilde{u} + b), z \right)_{\mathbb{R}^N} + \right. \\ \left. + \left(\int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, y, t) (\tilde{u} + b) dy, z \right)_{\mathbb{R}^N} \right] dxdt = \int_{Q_{0,T}} (F, z)_{\mathbb{R}^N} dxdt \end{aligned} \quad (25)$$

для всіх пробних функцій $z \in U(Q_{0,T})$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $[D^*(Q_{0,T})]^N$ м.н. виконується рівність

$$\tilde{u}_t + S(\tilde{u} + b) = F; \quad (26)$$

- 3) $\tilde{u}$ м.н. задовольняє умову (14) в сенсі простору $C([0, T]; H)$.

Означення 2. Функція u називається узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо u має вигляд (11) та функція $\tilde{u} \in U(Q_{0,T})$ є узагальненим розв'язком (12)-(14) в сенсі означення 1.

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема 3. Нехай виконуються умови (A1)-(W1), стала s взята з умови (24), $\partial\Omega \subset C^{2s}$. Тоді задача (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок u . Крім того,

$$u \in L_2(\mathbb{S}; C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V_1)) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T}).$$

3. Доведення основних результатів

Для доведення теореми 3 спершу розглянемо схожу до (12)-(14) задачу

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x, t) (\tilde{u} + b(x, t))_{x_i} \right)_{x_j} + G(x, t) |\tilde{u} + b(x, t)|^{q(x,t)-2} (\tilde{u} + b(x, t)) + \\ + \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, y, t) (\tilde{u} + b(y, t)) dy = F(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tilde{u}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \quad (28)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (29)$$

де функції F, b, u_0 не залежать від випадкового параметра ω (тому казатимемо, що це детермінована задача). Припустимо, що замість (F1)-(W1) тепер виконуються умови

(F2): $F \in L^2(0, T; H)$;

- (U2): $u_0 \in H$;
 (W2): $b \in U(Q_{0,T})$.

Означення 4. Функція $\tilde{u}$ називається узагальненим розв'язком детермінованої задачі (27)-(29) (коротко записуватимемо цей факт так: $\tilde{u} \in SP(u_0, F, b)$), якщо

- 1) $\tilde{u} \in W(Q_{0,T})$;
- 2) функція $\tilde{u}$ задовольняє рівність

$$\int_{Q_{0,T}} \left[-(\tilde{u}, z_t)_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(\tilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), z_{x_j} \right)_{\mathbb{R}^N} + \left(G|\tilde{u} + b|^{q(x,t)-2}(\tilde{u} + b), z \right)_{\mathbb{R}^N} + \right. \\ \left. + \left(\int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x, y, t)(\tilde{u} + b) dy, z \right)_{\mathbb{R}^N} \right] dxdt = \int_{Q_{0,T}} (F, z)_{\mathbb{R}^N} dxdt \quad (30)$$

для всіх пробних функцій $z \in U(Q_{0,T})$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $[D^*(Q_{0,T})]^N$ виконується рівність

$$\tilde{u}_t + \mathfrak{S}(\tilde{u} + b) = F; \quad (31)$$

- 3) $\tilde{u}$ задовольняє умову (29) в сенсі простору $C([0, T]; H)$.

Використовуючи методику праці [1] доводимо таке твердження.

Теорема 5. Нехай виконуються умови (A1)-(G1), (F2)-(W2), стала s взята з умови (24), $\partial\Omega \subset C^{2s}$. Тоді існує єдиний розв'язок $\tilde{u}$ детермінованої задачі (27)-(29).

За умов теореми 5 можна показати, що розв'язок задачі (27)-(29) неперервно залежить від вхідних даних u_0, F, b , тобто, якщо для всіх $u_0 \in H$, $F \in L^2(0, T; H)$, $b \in U(Q_{0,T})$ і всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільних функцій $u_0^\delta \in H$, $F^\delta \in L^2(0, T; H)$, $b^\delta \in U(Q_{0,T})$ таких, що задовольняють оцінки

$$\|u_0^\delta - u_0; H\| < \delta, \quad \|F^\delta - F; L^2(0, T; H)\| < \delta, \quad (32)$$

$$\|b^\delta - b; U(Q_{0,T})\| < \delta, \quad (33)$$

відповідні розв'язки $\tilde{u} \in SP(u_0, F, b)$ та $\tilde{u}^\delta \in SP(u_0^\delta, F^\delta, b^\delta)$ задовольняють оцінку

$$\|u^\delta - u; C([0, T]; H)\| + \|u^\delta - u; U(Q_{0,T})\| < \varepsilon. \quad (34)$$

Доведення цього факту опустимо.

Тепер перейдемо до доведення існування розв'язку відповідної (27)-(29) задачі з випадковим параметром, тобто задачі (12)-(14).

Теорема 6. Якщо $F \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0, T; H))$, $b \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0, T; V_1)) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$ та $u_0 \in L_2(\mathbb{S}; H)$, то задача (12)-(14) має єдиний розв'язок $\tilde{u}$. Крім того,

$$\tilde{u} \in L_2(\mathbb{S}; C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V_1)), \quad (35)$$

$$\tilde{u} \in L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T}). \quad (36)$$

Доведення. Крок 1. Для кожного фіксованого $\omega \in \mathbb{S}$ задача (12)-(14) має розв'язок в сенсі означення 1 як розв'язок детермінованої задачі (27)-(29) з випадковим параметром $\omega \in \mathbb{S}$. Нехай

$$\mathfrak{R} : H \times L^2(0, T; H) \times U(Q_{0,T}) \rightarrow C([0, T]; H) \cap U(Q_{0,T})$$

– таке відображення, що

$$\mathfrak{R}\{u_0, F, b\} = \tilde{u}, \quad (37)$$

де $\tilde{u}$ – розв’язок детермінованої задачі (27)-(29). З наведених нами міркувань слідує, що функція $\mathfrak{R}$ визначена коректно і є неперервною.

Введемо функцію випадкового аргументу

$$\phi : \mathbb{S} \rightarrow H \times L^2(0, T; H) \times U(Q_{0,T})$$

за правилом

$$\phi(\omega) := \{u_0(\cdot, \omega), F(\cdot, \cdot, \omega), b(\cdot, \cdot, \omega)\}, \quad \omega \in \mathbb{S}. \quad (38)$$

Використаємо (37) та (38) для означення функції $\Psi : \mathbb{S} \rightarrow C([0, T]; H) \cap U(Q_{0,T})$ за таким правилом:

$$\Psi(\omega) := \mathfrak{R} \circ \phi(\omega) = \mathfrak{R}(\phi(\omega)), \quad \omega \in \mathbb{S}. \quad (39)$$

Отже, для кожного $\omega \in \mathbb{S}$ значення $\Psi(\omega)$ дорівнює $\tilde{u}(\cdot, \cdot, \omega)$, де $\tilde{u}$ – розв’язок детермінованої задачі (27)-(29) з фіксованим випадковим параметром ω .

Оскільки функція ϕ з (38) є вимірною, а $\mathfrak{R}$ є неперервною, то функція Ψ з (39) є вимірною. Отже, $\tilde{u}$ буде $C([0, T]; H) \cap U(Q_{0,T})$ -значною випадковою величиною.

Крім того, можна показати, що $\tilde{u}$ задовольняє такі оцінки:

$$\int_{\Omega} |\tilde{u}(x, \tau, \omega)|^2 dx \leq C_1 \mathbf{F}(\tau, \omega), \quad (40)$$

$$\int_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^n |\tilde{u}_{x_i}(x, t, \omega)|^2 + |\tilde{u}(x, t, \omega)|^2 + |\tilde{u}(x, t, \omega)|^{q(x,t)} \right] dx dt \leq C_1 \mathbf{F}(\tau, \omega), \quad (41)$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від ω, u_0, F, b ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\tau, \omega) = & \int_{\Omega} |u_0(x, \omega)|^2 dx + \int_{Q_{0,\tau}} \left[|F(x, t, \omega)|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n |b_{x_i}(x, t, \omega)|^2 + |b(x, t, \omega)|^{q(x,t)} + |b(x, t, \omega)|^2 \right] dx dt, \quad \tau \in (0, T], \quad \omega \in \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (42)$$

Візьмемо в (40) максимум за τ , а в (41) $\tau = T$. Оскільки функція $\mathbf{F}(T, \cdot)$ належить до $L_1(\mathbb{S})$, то, зінтегрувавши отримані рівності за змінною $\omega \in \mathbb{S}$, отримаємо існування інтегралів, що гарантують виконання вкладень (35)-(36).

Крок 2. Доведення єдиності розв’язку проводимо методом від супротивного. Якщо $\tilde{u}_1$ та $\tilde{u}_2$ – розв’язки задачі (12)-(14), то можна показати, що їх різниця $\tilde{u} = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ задовольняє таку оцінку:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\tilde{u}(x, \tau, \omega)|^2 dx + \int_{Q_{0,\tau}} \left[C_2 \sum_{i=1}^n |\tilde{u}_{x_i}(x, t, \omega)|^2 + \right. \\ & \left. + C_3 |\tilde{u}(x, t, \omega)|^{q(x,t)} \right] dx dt \leq 0, \quad \tau \in (0, T], \quad \omega \in \mathbb{S}, \end{aligned} \quad (43)$$

де $C_2, C_3 > 0$ – деякі сталі. При доведенні (43) використано формулу інтегрування частинами для функцій з простору $W(Q_{0,T})$, яка виконується згідно умови (Q1) та [4, с. 95]. Зінтегрувавши за $\omega \in \mathbb{S}$, отримаємо з (43), що $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$, наприклад, в сенсі простору $L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$. Теорему 6 доведено. $\square$

Доведення основної теореми 3. Якщо виконується умова **(W1)**, то функція b має вигляд (10), де $b_0 \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$. Тоді існує стала $C_4 > 0$ така, що для всіх $x \in \Omega$ виконуються оцінки

$$|b_0(x)| \leq C_4, \quad |(b_0)_{x_i}(x)| \leq C_4, \quad i = \overline{1, n}. \quad (44)$$

Тому

$$|b(x, t, \omega)| \leq C_4 |W(t, \omega)|, \quad (45)$$

$$|b_{x_i}(x, t, \omega)| \leq C_4 |W(t, \omega)|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (46)$$

З оцінок (45)-(46) та властивостей вінерівського процесу W випливає, що

$$\int_{\Pi_{0,T}} \left[|b(x, t, \omega)|^2 + \sum_{i=1}^n |b_{x_i}(x, t, \omega)|^2 + |b(x, t, \omega)|^{q(x,t)} \right] dx dt \mathbb{P}(d\omega) \leq C_5.$$

Тому функція b з умови **(W1)** задовольняє умови Теореми 6.

Оскільки в теоремі 6 ми довели існування єдиного розв'язку задачі (27)-(29), то згідно формули (11) та означення 2 маємо, що теорему 3 доведено. $\square$

Висновки. В статті розглянуто мішану задачу для системи нелінійних параболічних рівнянь зі змінним показником нелінійності, інтегральним доданком та білим шумом. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку цієї задачі. Отримані результати є узагальненням результатів праці [1], де було розглянуто модельне рівняння без інтегрального члена і з показником нелінійності, що залежав тільки від змінної x .

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бугрій Н., Бугрій О., Доманська О. Напівлінійне стохастичне параболічне рівняння зі змінним показником нелінійності. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2022. Випуск 93. С. 108–121. DOI: <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.108-121>
2. Бугрій О., Бугрій Н., Власов В. Просторово-часовий стохастичний інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда. *Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта.* 2024. Том 1, №1. С. 13–26. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-02>
3. Бугрій О., Хома М., Вовк І.-М. Стохастичне диференціювання в рівняннях зі змінними показниками нелінійності. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2024. Випуск 96. С. 83–104. DOI: <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092>
4. Kaltenbach A. Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents. *Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 2329. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023. 358 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-29670-3>
5. Bokalo M.M., Ilnytska O.V. Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay. *Applicable Anal.* 2017. Vol. 96, No. 7. P. 1240–1254. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1183771>
6. Bokalo M. Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity. *J. Optim., Diff. Eq. Appl.* 2022. Vol. 30, No. 1. P. 98–121. DOI: <http://dx.doi.org/10.15421/142205>

7. Bokalo M.M., Domanska O.V. Higher-orders elliptic-parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity. *Matematychni Studii*. 2023. Vol. 59, No. 1. P. 86–105. DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.59.1.86-105>

UDC 517.95

Integro-differential systems of stochastic parabolic equations with variable exponents of nonlinearity

Oleh Buhrii, Ihor Kutsevol

Abstract. Some nonlinear second order parabolic system with the variable exponents of nonlinearity, integral term, and the white noise is considered. The existence and uniqueness of the weak solution for the corresponding initial-boundary value problem are proved.

Keywords: stochastic parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, white noise, weak solution.

References

1. Buhrii, N., Buhrii, O., Domanska, O. (2022). *Semilinear stochastic parabolic equation with variable exponent of nonlinearity*, Visnyk of the Lviv Univ., Series Mech. Math., **93**, 108–121. [in Ukrainian]. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.108-121>
2. Buhrii, O., Buhrii, N., Vlasov, V. (2024). *On stochastic space-time Paley-Wiener-Zygmund integral*, Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, **1** (1), 13–26. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-02>
3. Buhrii, O., Khoma, M., Vovk, I.-M. (2024). *Stochastic differentiations in equations with variable exponents of nonlinearity*, Herald of Lviv University, Ser. Mech.-Math., **96**, 83–104. [in Ukrainian]. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092>
4. Kaltenbach, A. (2023). *Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, **2329**, Springer Nature Switzerland AG, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-29670-3>
5. Bokalo, M.M., Ihnytska, O.V. (2017). *Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay*, Applicable Anal., **96** (7), 1240–1254. <https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1183771>
6. Bokalo, M. (2022). *Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity*, J. Optim., Diff. Eq. Appl., **30** (1), 98–121. <http://dx.doi.org/10.15421/142205>
7. Bokalo, M.M., Domanska, O.V. (2023). *Higher-orders elliptic-parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Matematychni Studii, **59** (1), 86–105. <https://doi.org/10.30970/ms.59.1.86-105>

Про авторів / About the authors

Олег Бугрій, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

Oleh Buhrii, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine;

Ігор Куцевол, аспірант, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

Ihor Kutsevol, Postgraduate student, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine.

Отримано / Received 25.06.2025
Прийнято до друку / Accepted 29.10.2025
Опубліковано / Published 26.11.2025