

УДК 373.5.016:514(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-7-23

Методичні аспекти навчання учнів 8(9)-х класів перетворенням фігур у планіметрії

Іван Ленчук¹, Олександр Мосіюк²

1. Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

E-mail: lench456@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

2. Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

E-mail: mosxandrwork@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3530-1359>

Анотація. Однією із найбільш важливих тем евклідової геометрії є тема «Перетворення фігур» на площині й у просторі. Вчителі математики та сучасні підручники для ЗЗСО з геометрії по різному представляють цей матеріал. Однак, щоб навчитися вміло користуватися перетвореннями, варто їх уявляти, розуміти в динаміці фактичних операцій по отриманню з однієї фігури іншої. У статті розглянуто паралельне перенесення фігур на вектор, поворот навколо точки на заданий кут, осьову симетрію, а також перетворення подібності, зокрема, гомотетію. Ми вважаємо, що паралельному перенесенню потрібно навчати після опрацювання векторів, адже перенесення на вектор чудово асоціюється з таким перетворенням фігур. Поворот навколо точки на заданий кут пропонуємо подавати в суто геометричному стилі, причому, центральну симетрію розглядати як частинний випадок повороту на кут 180° . Переконані, що учням слід продемонструвати різницю між уже згаданими перетвореннями та симетрією відносно прямої й обґрунтовано ввести поняття однакової (різної) орієнтації фігур після виконання цих перетворень. Що стосується перетворення подібності, то при його вивченні потрібно строго доводити всі без винятку властивості, а гомотетію подавати як частинний випадок подібності. Варто також, пославшись уже на відомі факти, довести теорему про можливий розклад перетворення подібності в добуток (композицію) гомотетії і руху, оскільки після її доведення буде цілком зрозуміло, що в якості властивостей подібності будуть лише ті з них, які є спільними для гомотетії і руху. Ми переконані також, що окрім цього не менш важливо у процесі знайомства учнів з описаними перетвореннями якісно демонструвати кожне з них із використанням сучасних цифрових технологій.

Ключові слова: навчання геометрії, гомотетія, осьова симетрія, паралельне перенесення, поворот, подібність, перетворення фігур.

UDC 373.5.016:514(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-7-23

Methodological aspects of teaching 8(9) grade students transformation of figures in planimetry

Ivan Lenchuk¹, Oleksandr Mosiiuk²

1. Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine

E-mail: lench456@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

2. Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine

E-mail: mosxandrwork@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3530-1359>

Abstract. One of the most critical topics in Euclidean geometry is the theme of «Transformation of Figures». Mathematics teachers and modern general secondary education system textbooks present this material differently. However, to learn how to use transformation skillfully, it is necessary to visualize them and understand the dynamics of actual operations for obtaining one figure from another. The article discusses parallel translation of figures onto a vector, rotation around a point by a given angle, axial symmetry, and similarity transformations, especially homothety. We believe that the parallel translation should be taught after vectors have been studied, since translation to a vector is closely associated with such transformations of figures. We suggest presenting rotation around a point by a given angle in a purely geometric style, with central symmetry considered a special case of rotation by an angle of 180° . We believe that students should be shown the difference between the aforementioned transformations and symmetry with respect to a straight line, and that the concepts of identical (different) orientation of figures after these transformations should be introduced reasonably. When studying similarity transformations, it is necessary to rigorously prove all properties without exception and present homothety as a special case of similarity. It is also worth proving, based on already known facts, the theorem about the possible decomposition of similarity into a product (composition) of homothety and motion, since after its proof, it will be pretty clear that only those properties of similarity that are common to homothety and motion will be considered properties of similarity. We are also convinced that, in addition to this, it is equally important to introduce students to the described transformations to demonstrate each of them qualitatively using modern digital technologies.

Keywords: geometry teaching, homothety, axial symmetry, parallel translation, rotation, similarity, transformation of figures.

Постановка проблеми. Згідно із висловлюваннями Ф. Кляйна (нім. мат, 1849-1925), елементарна геометрія займається вивченням фігур та їхніх властивостей, що не змінюються при перетвореннях подібності, тобто таких фігур, котрі після виконання перетворень залишаються подібними. Отже, рухи і гомотетія, що є частинними випадками перетворення подібності, *мали б бути покладеними в основу розбудови геометрії, ними не можна нехтувати чи подавати будь-як учням.* Тим більше, що з допомогою перетворення подібності у прикладній геометрії розв'язують багато різних задач виробничого характеру (завдяки ІКТ): наприклад, у легкій промисловості технічне розмноження деталей швейних виробів використовують перетворення подібності (Ленчук та ін., 1977, с. 91-95; Ленчук та ін., с. 83-85).

У цілому ж, навчання геометрії переслідує кілька вельми важливих цілей: розвивати геометричну компетентність, власну логіку міркувань, уявлення і уяву, мислення площинними і просторовими образами; розуміння природного змісту будь-якої перетворювальної операції із даною фігурою; уміння якісно видозмінювати (пере/добудовувати) виконані рисунки; глибоко розуміти закономірності природи, мистецтва і архітектури; вміло розв'язувати різного характеру задачі образного, наочно-дійового та інтуїтивного різновиду; здобувати здібності до конструктивно-генетичної діяльності й т. ін., адже: «... геометрія – це не лише розділ математики, шкільний предмет, – це, передусім, *феномен загальнолюдської культури*» (Станжицький та ін., 2023, с. 5).

Аналіз джерел та останніх досліджень. Дивно, однак ми стверджуємо, що у класичному підручнику безсистемно викладено тему площинних рухів. Після вступу відразу розглянуто симетрію відносно точки, потім симетрію відносно прямої; потім – поворот, а на завершення подається паралельне перенесення і його властивості. Причому, останнє перетворення подається аналітично, шляхом уведення прямокутної декартової системи координат. Жодних порівнянь окремо взятих рухів не спостерігається (Погорелов, 1998, с. 126-138).

Чомусь лише в наступному параграфі доладно описується тема «Вектори».

Подібність фігур дано ще в більш примітивному викладенні. Формулюється означення подібності. Гомотетію означено в односторонньому плані (для $k > 0$), векторним методом доведено теорему, що гомотетія є перетворенням подібності. Згадуються кілька властивостей подібності. Особлива увага приділяється ознакам подібності трикутників, зокрема, прямокутних. Описано деякі інші важливі факти стосовно кутів, уписаних в коло, та – пропорційність відрізків, хорд і січних кола (Погорелов, 1998, с. 156-167).

Більш коректно подано тему в іншому підручнику, в якому розпочинають виклад із паралельного перенесення, далі розглядають поворот і симетрію відносно точки, а потім симетрію відносно прямої. Проте для повноти викладу недостатньо властивостей кожного з перетворень (Бевз та ін., 2001, с. 99-127).

Згідно із новою (Модельною навчальною) програмою узагальнена теорема Фалеса, подібні трикутники, ознаки подібності трикутників, властивість медіани та бісектриси

трикутника, середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику вивчаються у 8-му класі, а переміщення (рух) та його властивості, симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення, рівність фігур, перетворення подібності – у 9-му (М. Бурда, Н. Тарасенкова, Д. Васильєва, МОН України, Модельна навчальна програма «Геометрія 7-9 класи» для ЗЗСО, наказ МОН України від 24.07.2023 № 883).

Підручників (у т. ч., електронних), написаних та офіційно виданих за новою програмою, є чимало. Їх можна знайти в мережі Internet, що варто вітати. Ми не будемо розглядати кожен з цих підручників, а зупинимось лише на двох із них – підручниках для 8-го і 9-го класів, авторами яких є М. Бурда, Н. Тарасенкова та (з інших підручників) А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір.

Отже, приступаємо до стислого аналізу підручників 8 класу.

Вводиться поняття й означення подібності двох трикутників та їхнього коефіцієнта подібності. Формулюють теорему Фалеса і доводять, що пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і паралельна третій стороні, відтинає від нього подібний трикутник. Доводять три ознаки подібності трикутників і дають застосування подібності трикутників до виведення властивостей медіан і бісектрис, а також середніх пропорційних у прямокутному трикутнику. Цікавою є рубрика «Дізнайтеся більше», в якій обґрунтовують деякі терміни, наводять історичні факти, доводять непрості теореми, розв'язують суть важливі задачі, подають серйозні геометричні факти (Бурда, Тарасенкова, 2021, §§10-14).

Теорему Фалеса доводять лише для частинного випадку, оскільки повне доведення виходить за межі шкільної програми. Далі розглядають властивості медіан і бісектрис трикутника, означають подібні трикутники та коефіцієнт подібності. Лемою доводять, що пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і паралельна третій стороні, відтинає від нього подібний трикутник. Доводять усі три ознаки подібності трикутників. Підручник уміщує важливі історичні факти, багато цікавих задач і якісні рисунки (Мерзляк та ін., 2025, §2).

Стислий аналіз підручників 9 класу.

Пояснюють, що таке перетворення і переміщення. Теоремою доводять, що при переміщенні точки, які лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення. Роблять висновок, що переміщення прямі переводить у прямі, промені – у промені, а відрізки – в рівні їм відрізки. Задачею доводять, що переміщення зберігає міру кута. В рубриці «Дізнайтеся більше» чітко розрізняють «відображення фігур» та «переміщення», що важливо. Традиційно розглядають спочатку симетрію відносно точки, а потім симетрію відносно прямої. Доводять, що обидві симетрії є переміщеннями, а тому мають усі властивості переміщення. Чимало якісно виконаних рисунків, які демонструють кожну із симетрій. Доладно вводиться означення повороту навколо точки, пояснюється як можна відтворити образ нарисованої фігури після повороту, пояснюють чому при повороті на кут 180° відносно точки O поворот стає центральною

симетрією. Як наслідок доводять, що поворот є переміщенням, а тому має всі його властивості. Паралельне перенесення подається чітко і грамотно на векторній основі. Доводять, що паралельне перенесення має всі властивості переміщення, а пряма переходить у паралельну їй пряму. У вже відомій рубриці доведено, що композиція двох осьових симетрій із паралельними осями, є паралельним перенесенням. Усі площинні переміщення (рухи) фігур супроводжуються відмінним набором задач і якісно виконаними рисунками. Не зрозуміло, чому не доведено, що центральна симетрія переводить усяку пряму в паралельну їй пряму.

Перетворення подібності розпочато зі зміни плану (і масштабу) зображення ділянки місцевості в 2,5 рази, чим наочно пояснюють, що таке подібність. Далі дають означення перетворення з коефіцієнтом подібності $k > 0$. Показують, що рух із коефіцієнтом $k = 1$ є окремим випадком перетворення подібності. Доводять властивість перетворення подібності: 1) точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій; 2) зберігається порядок взаємного розміщення точок на прямій. Як наслідок – прямі переводить у прямі, промені – у промені, а відрізки – у відрізки. Чомусь без доведення приймають, що дане перетворення переводить кут у рівний йому кут. Дають означення подібності фігур. Виходячи із властивостей, роблять висновок, що таке перетворення відрізки переводить у їм пропорційні відрізки. Доводять теорему, що відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Звідси висновок, що площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних елементів. Особливий випадок перетворення – гомотетію, із незрозумілих причин, винесено у рубрику «Дізнайтеся більше». Якісні рисунки і доладний підбір задач (Бурда, Тарасенкова, 2017, с. 142-173).

Першими двома прикладами, з допомогою центрального і паралельного проєкціювання, демонструють відображення однієї фігури на іншу. Третім прикладом вводять на векторній основі поняття паралельного перенесення. На прикладах означають перетворення однієї фігури (образу) в іншу (прообраз). Перетворення називають рухом (переміщенням), якщо зберігаються відстані між будь-якими двома його точками. Констатують (не доводячи), що в русі образом прямої є пряма, відрізка – відрізок, рівний даному, кута – кут, рівний даному і, отже, у випадку трикутника, – трикутник, що дорівнює даному. Дають означення двох рівних фігур. Доводять теорему, що паралельне перенесення є рухом. Подають задачу, в якій паралельне перенесення обґрунтовують у прямокутній системі координат, а також задачу, де будують кут, рівний даному куту. Дають означення осьової симетрії, наводять приклад із деякою фігурою. Доводять, користуючись координатним методом, що осьова симетрія є рухом. Означають поняття осьової симетрії для будь-якої фігури, наводять приклади фігур, що мають вісь симетрії. Розв'язують корисні задачі. Спочатку подають центральну симетрію, а потім поворот. Причому, знову ж таки, координатним методом доводять, що центральна симетрія є рухом, а для повороту – пропонують довести аналогічне твердження самостійно.

Елементарними рисунками вводять поняття гомотетії з центром у тоці O , демонструючи, що коефіцієнт k цього перетворення може бути додатнім числом, від'ємним, цілим і дробовим, підкреслюючи, що $k \neq 1$. Розглядають приклади. Векторним методом доводять теорему: При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B – довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 – їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k , то $A_1B_1 = |k| AB$. Наслідок формулюють для трикутника. Подають без доведення інші властивості: в гомотетії образом прямої є пряма; образом відрізка – відрізок; образом кута – кут, який рівний даному; образом трикутника є трикутник, подібний даному; образом кола є коло; площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k – коефіцієнт гомотетії. Пропонують це доведення на математичному гуртку. Прикладами означають подібність двох фігур, причому, подають це у вигляді композиції гомотетії та руху, що надто важливо. Наводять означення: Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень – гомотетії і руху. Зауважують, що при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів, що називають коефіцієнтом подібності. Окремо для трикутників доводять теорему: Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Далі, в теорії, розв'язують кілька цікавих задач, подають практичні завдання та вправи. Окремо додають цікаву рубрику «Застосування перетворень фігур при розв'язуванні задач» (Мерзляк, Полонський, Якір, 2021, с. 172-228).

Якщо аналізувати напрацювання українських науковців у сфері використання сучасних цифрових технологій до навчання учнів геометрії, то в останні роки увага педагогів-практиків більшою мірою зосереджена на застосуванні такого загальнодоступного програмного рішення як GeoGebra. Це й не дивно, адже як його локальне рішення (можна встановити на комп'ютер чи планшет), так і онлайн версія дозволяє якісно демонструвати конструктивну спрямованість геометричної науки. До прикладу, Зіновеев І. В. та Манько Н. І.- В. наводять у власній роботі, розкриваючи підхід до навчання геометрії на основі системного використання 2D та 3D візуалізацій (Зіновеев І. В., Манько Н. І.-В., 2025). Також відповідний програмний інструмент активно залучається й у процесі підготовки майбутніх учителів математики (Дубовик В., Рудницький С., 2022; Титаренко Н., Муртазієв, Е., 2019). Звичайно це не повний перелік робіт з тематики застосування цифрових технологій у навчанні математики, але вони вказують на практичну значимість такого програмного продукту для математичної освіти в Україні.

Тим не менше варто розглянути й інший програмний продукт – вебсервіс Desmos. Так, Ду А. С. розглядає особливості використання сервісу на уроках математики, його переваги для демонстрації змін параметрів функцій у реальному часі та формування дослідницьких умінь учнів (Ду А. С., 2024). Систематичний огляд досліджень щодо застосування Desmos у математичній освіті запропонували (Mediana N. L., Dio R. V., 2025). Автори узагальнюють

результати десятків емпіричних робіт і показують, що використання Desmos позитивно впливає як на академічну успішність, математичне мислення, залученість учнів до освітнього процесу, так і на здатність до візуалізації абстрактних понять. Також важливо, що науковці розглядають приклади використання сервісу для навчання шкільної геометрії, й навіть окремих тем з аналітичної геометрії.

Підсумовуючи (коротко), варто зазначити, що було б надто важливо, щоб учні 8 і 9 класів насправді опановували курс геометрії не за одним, а за кількома підручниками, а конструктивні елементи демонструвалися б із виваженим застосування сучасних цифрових технологій.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Поки що в підручниках геометрії для ЗЗСО не вирішено питання чіткого, однозначного, зрозумілого учням представлення матеріалу «Перетворення геометричних фігур на площині».

Мета статті. Тому ми вважаємо, що фактичний матеріал підручника за темою «Перетворення фігур на площині» потрібно розповідати учням дещо по іншому. Не варто розпочинати викладення з фактичного матеріалу, а образно, щоб усвідомити тему в цілому, потрібно глибоко, всебічно зрозуміти природу кожного окремо взятого перетворення. Якраз у цьому й полягає мета нашої праці: *з'ясувати природу перетворень* та уточнити окремі аспекти їх подання.

Виклад основного матеріалу. У підручнику читаємо: «Якщо кожному даної фігури змістити яким-небудь чином, то дістанемо нову фігуру. Говорять, що ця фігура утворилась *перетворенням* даної» (Погорелов, 1998, с.126). Відразу виникає запитання, то що ж ми переміщуємо, точки чи фігуру, коли говоримо про перетворення фігур? Є чимало й інших схожих запитань до текстів у даному підручнику: однак ніхто не буде сперечатися, що в навчанні геометрії *понад усе важливо розвинути в учня уявлення, розуміння природного змісту, динаміки будь-якої перетворювальної операції* з даною фігурою, адже саме геометрія призначена розвивати уявлення і уяву – як жоден з інших предметів.

Коли ведемо мову про паралельне перенесення або поворот навколо точки на даний кут, потрібно пам'ятати, що тут усі точки одночасно зсовуються в одному напрямі на зарання заданий вектор чи повертаються на кут – кутовий вектор відповідно, тобто переміщується вся фігура, що надто важливо для уявлення цих перетворень. До речі, центральну симетрію, що природно, варто завжди подавати частинним випадком повороту на кут 180° із доведенням лише однієї (єдиної) властивості про паралельність прямих (променів і відрізків).

Якщо ж ми говоримо про осьову симетрію, то не замислюємося глибоко над природою цього переміщення, означаючи лише конструкцію побудови окремих точок у даному перетворенні. Цитуємо: «Нехай q – фіксована пряма. Візьмемо довільну точку X і опустимо перпендикуляр AX на пряму q . На продовженні перпендикуляра за точку A відкладемо відрізок AX' , що дорівнює відрізку AX . Точка X' називається *симетричною точкою X відносно*

прямої q . Якщо точка X лежить на прямій q , то симетрична їй точка є сама точка X . Очевидно, що точка, симетрична точці X' , є точка X . Наступний абзац: «Перетворення фігури F у фігуру F' , при якому кожна її точка X переходить у точку X' , симетричну відносно даної прямої q , називається *перетворенням симетрії відносно прямої q* . При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно прямої q* (рис. 1)» (Погорелов, 1998, с. 130).

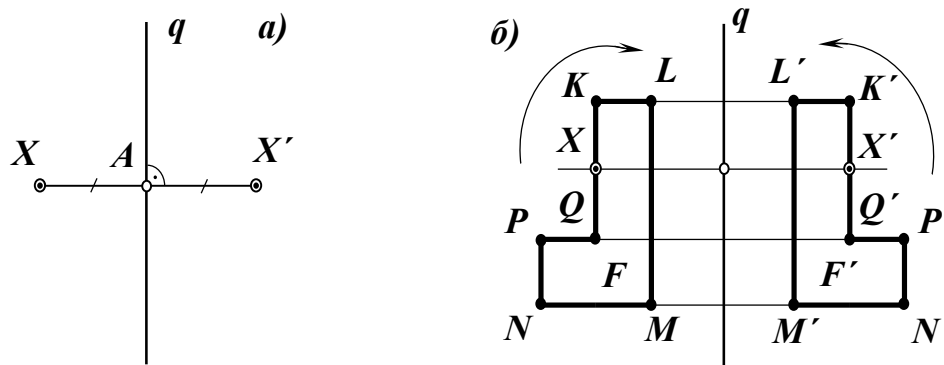


Рис. 1

Усе неначе добре, але схожу конструктивну операцію не можна називати переміщенням фігури F на площині, адже це не що інше, як переміщення окремих точок (зокрема, кардинальних точок фігури F) за чітко фіксованим правилом. Очевидно, що паралельне перенесення і поворот, з одного боку, а осьова симетрія, з іншого боку, мають несхожу природу. Якщо конкретно, то останнє перетворення фігури F у фігуру F' потрібно уявляти не площинним, а рухом у просторі (рис. 2). Уявіть собі, що вісь перетворення і фігура F лежить у площині дошки, а кожна її точка, виходячи із площини дошки і обертаючись по колу в площині, перпендикулярній осі, описує кут 180° і знову попадає на дошку. Отже, осьова симетрія є насправді *поворотом у просторі* на фіксований кут.

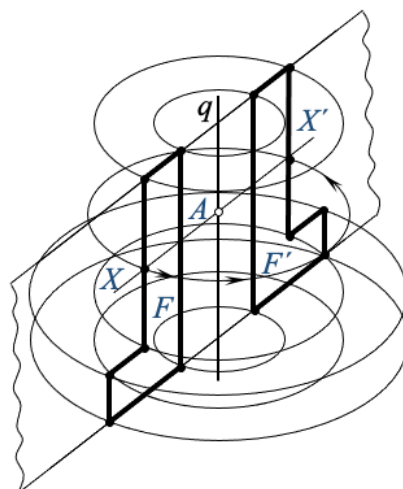


Рис. 2.

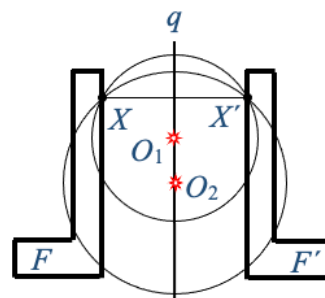


Рис. 3

Завдячуючи природі, розглядуване перетворення змінює орієнтацію фігур на площині, що суттєво для розуміння перетворень у цілому (рис. 1, б).

Цікаво, що конструктивно осьову симетрію можна також обґрунтовувати по іншому. Тобто точку X' можна назвати симетричною точці X , коли всяке коло з центром на осі q , яке вміщує точку X , проходить також і через точку X' . Це ще один варіант побудови симетричних точок у осьовій симетрії (рис. 3).

У підручнику для 9 класу М. Бурди і Н. Тарасенкової, як ми вже відмічали, показано, що композиція двох осьових симетрій відносно паралельних осей є паралельне перенесення. Паралельне перенесення здійснюється на відстань у 2 рази більшу ($2m$) за відстань між осями (m). Більш цікаво інше, що коли осі не паралельні, а перетинаються, в результаті двох послідовних симетрій відносно цих осей отримують (аналогічно) поворот навколо точки перетину осей на кут, що у 2 рази більший (2α) за кут (α) між осями, які задані (рис. 4, 5). Це просто доводиться на рисунках та дозволяє певною мірою реалізувати ідею комп'ютерної уніфікації рухів між настільки різними, на перший погляд, перетвореннями.

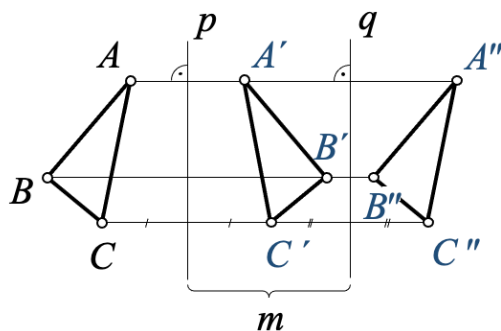


Рис. 4

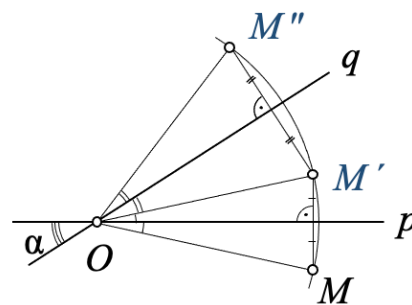


Рис. 5

Отже, робимо висновок, що перетворення паралельного перенесення та повороту навколо точки на даний кут можна побудовно (у графічній реалізації) подавати добутком двох осьових симетрій. Це ще більше споріднює паралельне перенесення та поворот навколо точки на даний кут із осьовою симетрією. Й цим пізнається природа обох перетворень. Іншими словами, можна трактувати паралельне перенесення як подвійне паралельне перенесення або ж – подвійний поворот у площині.

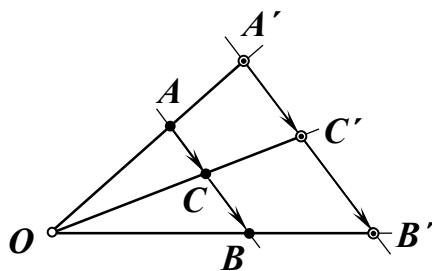


Рис. 6

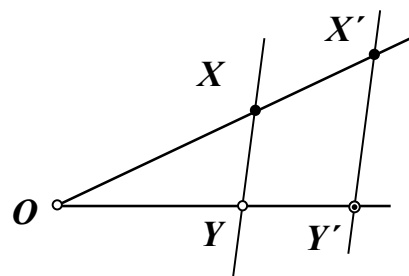


Рис. 7

Вивчаючи тему «Подібність геометричних фігур» потрібно в першу чергу продемонструвати, що рухи і гомотетія є частинними випадками подібності. Починати варто із означення подібності, дати також чітке, однозначне означення гомотетії, довести (векторним методом) властивості, зокрема те, що: гомотетія є перетворенням подібності та зберігає відношення відрізків на прямій (рис. 6). Із цих властивостей прямо слідує, що гомотетія переводить усяку пряму, котра не проходить через її центр, у пряму, паралельну заданій, а пряму, яка містить центр гомотетії, в цю саму пряму. Крім того, гомотетія переводить промінь у промінь, відрізок – у відрізок, а три точки, які не лежать на одній прямій, – у три точки, які теж не лежать на одній прямій.

Окрім того, з теорем також впливає геометричний (рисунковий) спосіб задавання гомотетії центром і парою відповідних точок цього перетворення (рис. 7). Нарешті, скориставшись уже доведеною вище властивістю, що гомотетія всяку пряму, якій не належить центр цього перетворення, переводить у пряму, паралельну заданій, та пригадавши властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, легко доводимо рисунком, що гомотетія зберігає градусну міру кута між прямими (рис. 8).

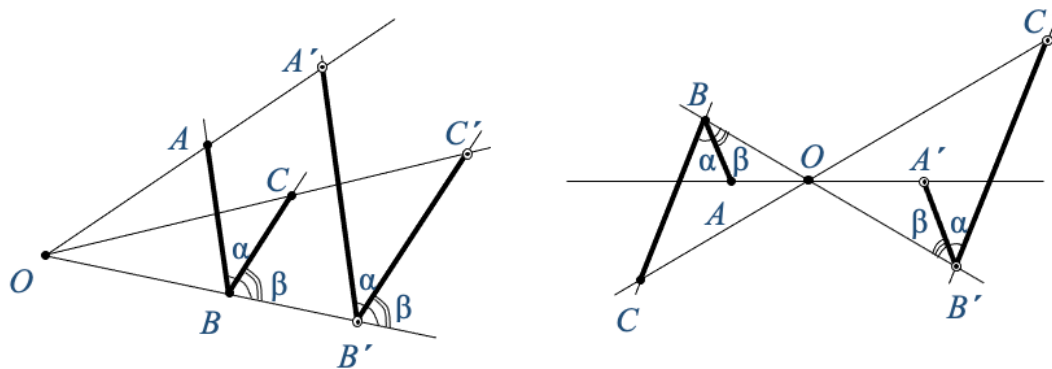


Рис. 8

Якщо деяка гомотетія з центром у точці O і коефіцієнтом гомотетії k переводить точку A в точку A' ($\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OA'}$), то очевидно, що гомотетія з цим самим центром O і коефіцієнтом гомотетії $\frac{1}{k}$ уже точку A' переведе в точку A . Тобто, h_0^k і $h_0^{1/k}$ – *суть два взаємно обернені перетворення*: $h_0^k(A) = A'$, $h_0^{1/k}(A') = A$. Їх же послідовне виконання переводить точку A саму в себе: $(h_0^{1/k} \cdot h_0^k)(A) = A$. Таке *тотожне* перетворення часто позначають ще й по іншому, а саме: $h_0^{1/k} \cdot h_0^k = 1$. Про це теж варто вести мову з учнями.

Наведені висновки дозволяють елементарними міркуваннями довести ще одну надто важливу *теорему*, котра має неабияке практичне застосування:

Нехай p – перетворення подібності з коефіцієнтом k , а h – гомотетія з цим самим коефіцієнтом k та з центром у будь-якій точці O . Тоді існує один і лише один рух r такий, що $p = r \cdot h$ (*)

Говорять так: усяке перетворення подібності можна розкласти в добуток гомотетії на рух. Або по іншому: перетворення подібності є композицією двох перетворень: гомотетії та руху.

Доведення. Введемо в розгляд таке перетворення: $r = p \cdot h_0^{1/k}$ (**). Воно, очевидно, є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k \cdot \frac{1}{k} = 1$. Але ж, винятково рух кваліфікується як перетворення подібності з коефіцієнтом рівним 1.

Отже, в рівності (**) r – рух. Із цієї ж рівності, що теж очевидно, одержуємо наступне: $r \cdot h_0^k = (p \cdot h_0^{1/k}) \cdot h_0^k$, або $r \cdot h_0^k = p \cdot (h_0^{1/k} \cdot h_0^k) = p$. Таким чином, існування руху r , який задовольняє умову (*), доведено.

Нехай тепер r_1 – довільний рух, що задовольняє рівність $p = r_1 \cdot h_0^k$. Звідси, діючи аналогічно, отримаємо $p \cdot h_0^{1/k} = r_1$. Урахувавши рівність (**), приходимо до висновку, що $r_1 = r$. Єдиність руху і теорему в цілому доведено.

Якраз ця теорема з невідгадливою і суровою логікою міркувань дозволяє зробити висновок, що перетворення подібності володіє властивостями, які є спільними для перетворень гомотетії і руху. Отже, істинно мають місце твердження: перетворення подібності переводить пряму у пряму, зберігає відношення відрізків на прямій, промінь переводить у промінь, відрізок – у відрізок, а три точки, які не лежать на одній прямій, – у три точки, що не лежать на одній прямій. При цьому перетворення подібності кут переводить у рівний йому кут (перпендикулярні прямі – в перпендикулярні прямі).

Якщо подібність представлена добутком гомотетії на рух ($p = r \cdot h$), а рух є паралельним перенесенням чи поворотом, то така подібність не змінює орієнтацію фігур на площині (з рисунка 9, а вочевидь впливає, що будь-яка гомотетія – додатна чи від’ємна – зберігає орієнтацію). Якщо ж у композиції перетворень рухом є симетрія відносно прямої, то цей різновид подібності змінює орієнтацію плоских фігур на протилежну: пара подібних трикутників ABC і $AB'C'$ на рисунку 9, а однаково орієнтовані, а на рисунку 9, б – протилежно. Це обґрунтовує роль у подібності (композиції перетворень) осьової симетрії.

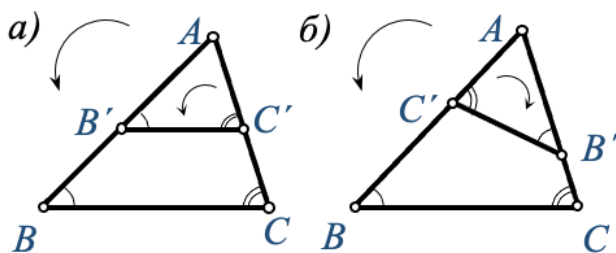


Рис. 9

Ще одним важливим аспектом, який однозначно буде сприяти засвоєнню фактів, пов'язаних з геометричними перетвореннями, є застосування на уроках математики інструментів динамічної геометрії. Безперечно, робота учнів та вчителя на дошці є важливим

елементом освітнього процесу, замінити який навіть в умовах цифровізації навчання досить складно, але існує ряд операцій, котрі відобразити без використання комп'ютерних технологій практично надто важко.

Сьогодні учням варто знати, що існує два програмні продукти, які доцільно і, головне зручно, як ми вже зазначали, використовувати в навчанні математики – GeoGebra та Desmos. Ключовою їх перевагою є наявність загальнодоступних вебверсій, що спрощує розгортання математичних комплексів на шкільних комп'ютерах або ж інтерактивних дошках шляхом встановлення (оновлення) до актуальних версій звичайного вебпереглядача. З позицій зручності та простоти освоєння для школярів 8 (9) класів, на наш, можливо суб'єктивний погляд, варто використовувати Desmos (див. «Офіційну сторінку Desmos»).

Ця центральна сторінка Desmos пропонує ряд спеціалізованих сервісів для побудови графіків функцій, числових розрахунків, операцій з матрицями, планіметричними та просторовими геометричними побудовами. Нам важливо у статті продемонструвати можливості конструктивних побудов на площині.

Робоче поле для виконання геометричних побудов онлайн реалізовано за допомогою досить невеликого набору інструментів, які, тим не менше, цілком дозволяють виконувати більшість геометричних побудов у планіметрії. Є можливість будувати точку (зокрема, відмічати точку на об'єкті лише підвести курсор миші до неї та здійснивши звичний «клік» лівою кнопкою), відкладати відрізки, задавати прямі (через дві точки проводити пряму, через дану точку – паралельно чи перпендикулярно до прямої), користуватися променями й векторами, будувати бісектрису кута; окреслювати кола та його дугу за трьома точками; позначати кути й будувати багатокутники тощо. Присутні також засоби для реалізації геометричних перетворень таких як: паралельне перенесення, поворот на заданий кут відносно вказаної точки, симетрію відносно прямої, гомотетію, а також перетворення подібності. Варто відмітити, що симетрія відносно даної точки в окремий інструмент не виділена, оскільки таке перетворення, як уже було показано вище, є частинним випадком повороту відносно точки на кут 180° . У лівій частині робочого простору екрану виділено поле, де користувач може вводити певні змінні величини, які потім використовувати, ілюструючи перетворення в динаміці – для зміни параметрів на рисунку.

Розглянемо, для прикладу, як можна продемонструвати факт, що поворот навколо точки є композицією з двох симетрій відносно прямих, які перетинаються.

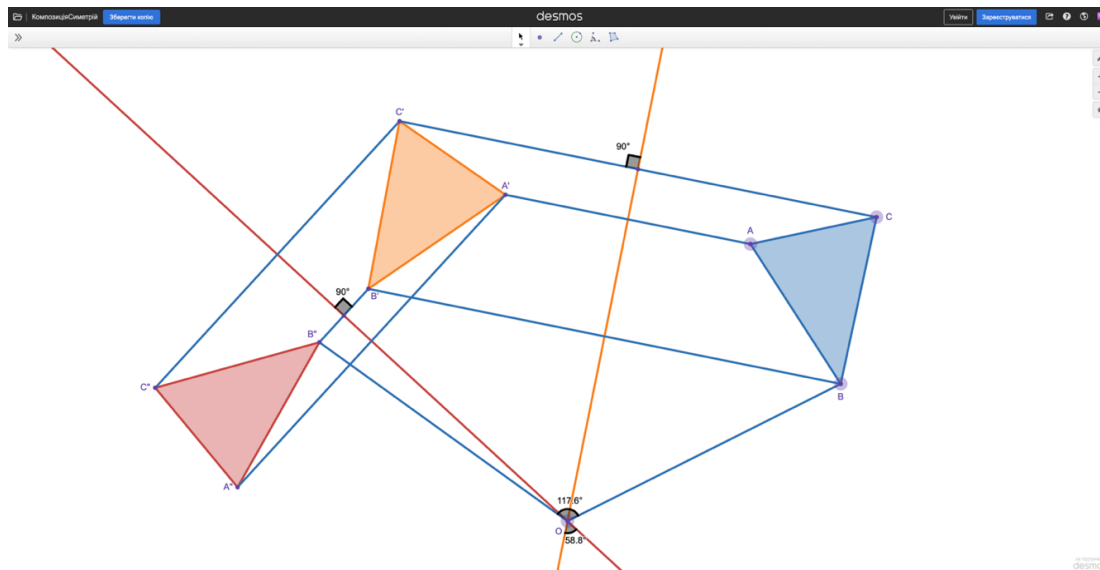


Рис. 10

Нехай на площині задано довільний трикутник ABC (на рисунку зображений синім кольором). Відобразимо його спочатку відносно помаранчевої прямої (матимемо помаранчевий трикутник $A'B'C'$), а потім результат відобразимо відносно червоної прямої (рис. 10). Як наслідок отримаємо трикутник $A''B''C''$ – на рисунку позначено червоним кольором. Червона та помаранчева прямі перетинаються в точці O . Якщо виміряти кут між осями симетрії і кут BOB'' , то побачимо цікаву закономірність: кут між осями симетрії буде у два рази меншим за кут BOB'' . Схожим чином доречно виміряти й кути AOA'' та COC'' . Однозначно їх значення будуть такими як у кута BOB'' , отже, можемо запропонувати учням зробити висновок, що трикутник $A''B''C''$ також можна утворити поворотом ABC на кут, що у двічі більший за кут між осями симетрії.

Покажемо цю операцію у динаміці. Для цього введемо у спеціальному полі, ліворуч від основної робочої області змінну A , яка набиратиме значень від 0 до 180° з кроком $0,01$. Виконаємо операцію повороту трикутника ABC навколо точки O на кут, що визначається введеною змінною (за замовчуванням змінній було надано значення 13°). Результируючий образ (зелений трикутник без позначених вершин) є результатом повороту вихідного трикутника на 13° проти годинникової стрілки – вважатимемо його «динамічною тінню» фігури ABC (рис. 11).

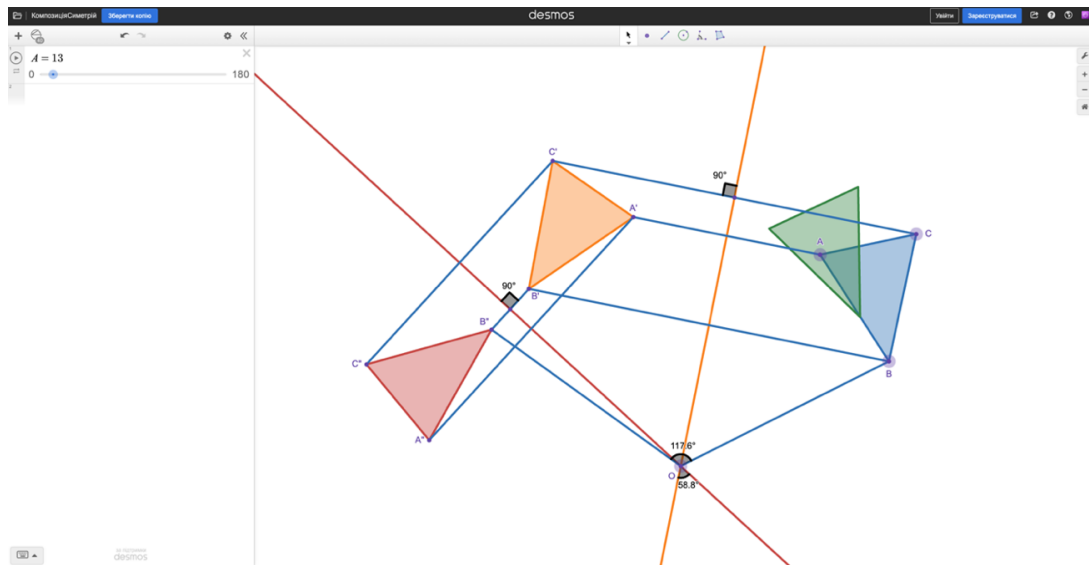


Рис. 11

Тепер змінюватимемо значення введеної змінної на проміжку від 0 до 180° . Зі збільшенням її значення новоутворений зелений трикутник здійснюватиме обертання навколо точки O і при значенні $117,6^\circ$ зелений трикутник буде повністю збігатися з червоним трикутником $A''B''C''$, що буде ще одним наочним підтвердженням розглядуваного геометричного факту, який необхідно з учнями на дошці строго довести (рис. 12).

Отже, шляхом інтерактивних експериментів було розглянуто та наочно продемонстровано важливе геометричне твердження, яке при класичному введенні не є очевидним для багатьох учнів. Аналогічним чином варто подавати та розглядати й інші перетворення на площині, демонструючи школярам, що геометрія є захоплюючою і динамічною наукою, в якій кожен може віднайти багато важливих й корисних для себе цікавинок.

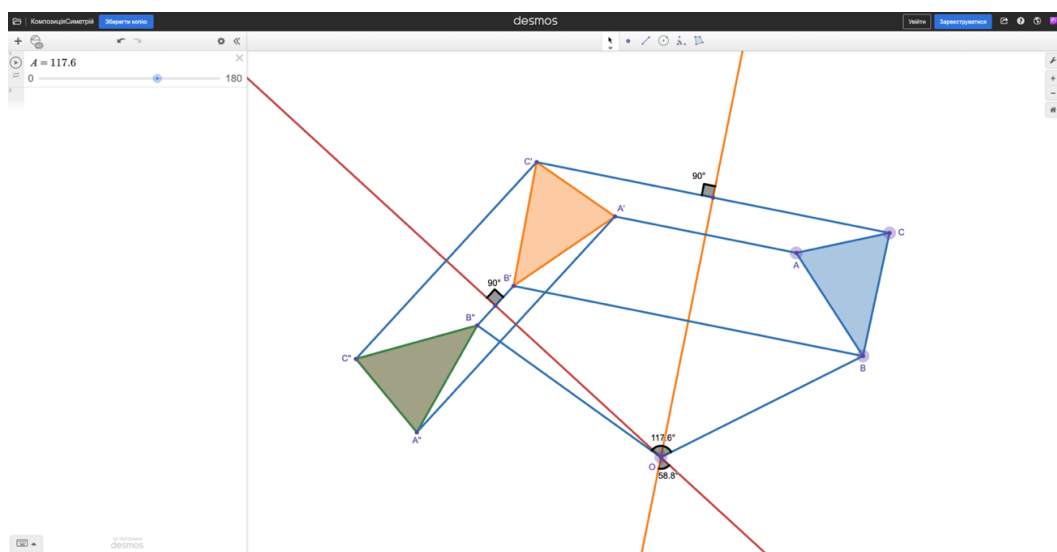


Рис. 12

Особливо ефективним такі геометричні експерименти виглядають на екрані проєктора або ж інтерактивної дошки. При цьому варто віддати перевагу саме інтерактивній дошці, оскільки в цьому випадку школярі самі матимуть змогу брати участь у виведенні геометричних фактів.

Висновки. Деталізовані за змістом методичні корективи в навчанні тем «Рух» і «Подібність фігур» мають на увазі їх неабияку собівартість у курсі геометрії, на чому ми вже робили наголос. Не секрет, що майбутні вчителі, а отже й учні, не завжди чітко розуміють призначення і суть цих перетворень, «плавають» у теоретичному обґрунтуванні властивостей, слабо володіють практичними навичками використання останніх у пошуку розв'язань не лише задач на побудову (що в конструктивній геометрії надважливо), але й задач на доведення та обчислення. Неспроста знані вітчизняні методисти ще в 90-х роках минулого століття «били на сполох», говорячи (приблизно) так: Незважаючи на те, що геометричні перетворення вводяться у 8 і 9 класах, у планіметрії вони не виступають як апарат доведення теорем і розв'язування задач. Шкода, але така думка визнаних українських педагогів поки що в основній школі проігнорована, мовчазно знехтувана.

Ідея перетворень є однією із провідних у сучасних наукових дослідженнях учених не лише у сфері геометрії. З їх допомогою успішно доводять складні твердження в різних розділах, які виходять далеко за межі геометрії ЗЗСО. Перетворення, до того ж, мають прикладний характер. Дякуючи геометричним перетворенням і сучасним комп'ютерним технологіям кінематографісти бентежать уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані. Перетворення покладено в основу правильної побудувати художниками композиції картин, а хімікам, приміром, допомагають досліджувати структуру кристалів.

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Ще в Епоху Відродження з'явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, зокрема роботи видатних художників Леонардо да Вінчі (1452-1519) і Альбрехта Дюрера (1471-1528). Розробником математичних основ теорії проєктивних перетворень (теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг (1593-1662).

Завдяки теорії перспективи вдалося досягнути достатньої наочності зображень, однак технічний прогрес вимагав точного відтворення об'єктів із дотриманням розмірів. Багато талановитих учених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначної відповідності (ізоморфізму) між оригіналами просторових фігур та їх бінарними зображеннями на площині. Серед них був, зокрема, французький математик Мішель Шаль (1793-1880), який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (теорема Шалю: «Будь-який рух площини, що зберігає орієнтацію, тобто не перевертає фігуру, є або поворотом (включаючи

тотожне перетворення та центральну симетрію), або паралельним перенесенням. Будь-який рух, що змінює орієнтацію, є осью симетрії або ковзною симетрією» (див. Вікіпедію)).

У наукових пошуках свій власний метод у галузі зображень і геометричних перетворень запропонував французький геометр Гаспар Монж (1746-1818), створивши новий розділ геометрії – нарисну геометрію, що набула статусу *граматики креслення*, яке у свою чергу визнано «мовою техніки».

Пізніше, на основі розподілу геометричних перетворень на групи, було виділено ще декілька розділів геометрії – афінна, проєктивна та інші. Здобутки науковців у розробці й вивченні перетворень склали фундаментальну основу розвитку багатьох галузей сучасної *прикладної геометрії*.

Коли ми маємо на увазі студентів фізико-математичного факультету, то на допомогу їм у майбутньому, все ж таки, вельми потрібно написати змістовний посібник, у якому в усіх деталях викладалася б тема «Перетворення фігур на площині та у просторі».

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. (2001). *Геометрія*: підруч. для 7-9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. «Вежа».
- Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. (2016). *Геометрія*: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. УОВЦ «Оріон».
- Бурда М., Тарасенкова Н., Васильєва Д., МОН України, *Модельна навчальна програма «Геометрія 7-9 класи» для ЗЗСО*, наказ МОН України від 24.07.2023, № 883.
- Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. (2017). *Геометрія*: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. УОВЦ «Оріон».
- Дубовик В., Рудницький С. (2022). Візуалізація навчального матеріалу в процесі підготовки майбутніх учителів математики засобами середовища geogebra. *Фізико-математична освіта*. 34 (2), С. 33-37. DOI: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-005>.
- Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В. (2025). Створення засобами GeoGebra інтерактивних візуалізацій до геометричних задач у ході підготовки до НМТ. *Педагогічна Академія: наукові записки*. 21. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16807346>.
- Ленчук І. Г., Павленко Ю. С., Павлов А. В. (1977). Про один із алгоритмів технічного розмноження деталей швейних виробів. *Відомості вузів, сер. «Технологія легкої промисловості»*. Київ, №3. 91-95.
- Ленчук І. Г., Павлов А. В., Павленко Ю. С. (1979). Про подібність кривих 2-го порядку в інженерному варіанті задавання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ, «Будівельник», вип. 28. 83-85.
- Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2021). *Геометрія*: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія.
- Мерзляк А.Г., Якір М.С. (2025). *Геометрія*: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія.
- Офіційна сторінка вебсервісу Desmos. URL: <https://www.desmos.com/?lang=uk>.
- Погорелов О. В. (1998). *Геометрія (Планіметрія)*: підруч. для 7-9 кл. сер. школи, Київ: Освіта.
- Станжицький О. М., Собчук В. В., Капустян О. В., Федоренко Ю. В., Цань В. Б. (2023). *Метод. вказ. та завд. для самост. роботи з дисципл.* «Методика навчання математики», ч. IV: «Методика вивчення геометрії» для студ. спеціальн. 014.04 Середня освіта (Математика) механікоматематичного факультету.

- Титаренко Н., Муртазієв Е. (2019). Застосування Geogebra на уроках геометрії. *Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору*, 84(II), С. 279-292. DOI: <https://doi.org/10.38014/osvita.2019.84.25>.
- Dy A. C. (2024). Implementation of DESMOS as a Teaching Tool in Graphing Functions in the New Normal. *Journal of Research and Investigation in Education*, 2(2), P. 59–64. DOI: <https://doi.org/10.37034/residu.v2i2.175>.
- Mediana N. L., Dio R. V. (2025). Systematic Review on the Efficacy of Desmos Integration in Mathematics Education: Unveiling Impacts on Learning Outcomes and Pedagogical Strategies. *International Journal of Future Engineering Innovations*, 2(4), P. 104–115. DOI: <https://doi.org/10.54660/IJFEI.2025.2.4.104-115>.

References

- Bevz, H. P., Bevz, V. H., & Vladimirova, N. H. (2001). *Heometriia: pidruchnyk dlia 7–9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grades 7–9 of secondary schools]. Kyiv: Vezha.
- Burda, M., Tarasenkova, N., & Vasyliieva, D. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Heometriia. 7–9 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Model curriculum "Geometry. Grades 7–9" for general secondary education institutions]. Ministry of Education and Science of Ukraine. Order No. 883 dated July 24, 2023.
- Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2016). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 8 of secondary schools]. Kyiv: Orion.
- Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2017). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 9 of secondary schools]. Kyiv: Orion.
- Dubovyk, V., & Rudnytskyi, S. (2022). Vizualizatsiia navchalnoho materialu v protsesi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky zasobamy seredovyshcha GeoGebra [Visualization of educational material in the training of future mathematics teachers using the GeoGebra environment]. *Fyzyko-matematychna osvita*, 34(2), 33–37. DOI: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-005>
- Zinovieiev, I. V., & Manko, N. I.-V. (2025). Stvorennia zasobamy GeoGebra interaktyvnykh vizualizatsii do heometrychnykh zadach u khodi pidhotovky do NMT [Creation of interactive visualizations for geometry problems using GeoGebra in preparation for the National Multi-subject Test]. *Pedahohichna Akademiia: naukovi zapysky*, 21. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16807346>
- Lenchuk, I. H., Pavlenko, Yu. S., & Pavlov, A. V. (1977). Pro odyin iz alhorytmiv tekhnichnoho rozmnozhennia detalei shveinykh vyrobiv [On an algorithm for technical reproduction of garment pattern components]. *Vidomosti vyshchykh navchalnykh zakladiv. Seriia: Tekhnolohiia lehkoi promyslovosti*, 3, 91–95.
- Lenchuk, I. H., Pavlov, A. V., & Pavlenko, Yu. S. (1979). Pro podobnist kryvykh druhoho poriadku v inzhenernomu varianti zadavannia [On the similarity of second-order curves in the engineering representation]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 28, 83–85.
- Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 9 of secondary schools]. Kharkiv: Himnaziia.
- Merzliak, A. H., & Yakir, M. S. (2025). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 8 of secondary schools]. Kharkiv: Himnaziia.
- Desmos. (n.d.). *Desmos official website*. Retrieved from <https://www.desmos.com/?lang=uk>
- Pohorielov, O. V. (1998). *Heometriia (Planimetriia): pidruchnyk dlia 7–9 klasiv serednoi shkoly* [Geometry (Planimetry): Textbook for grades 7–9]. Kyiv: Osvita.
- Stanzhytskyi, O. M., Sobchuk, V. V., Kapustian, O. V., Fedorenko, Yu. V., & Tsan, V. B. (2023). *Metodychni vkazivky ta zavdannia dlia samostiinoi roboty z dystsypliny "Metodyka navchannia matematyky". Chastyna IV: "Metodyka vyvchennia heometrii"* [Methodological guidelines and assignments for independent work in the discipline "Methods of Teaching Mathematics". Part IV: "Methods of Teaching Geometry"].
- Tytarenko, N., & Murtaziiev, E. (2019). Zastosuvannia GeoGebra na urokakh heometrii [Application of GeoGebra in geometry lessons]. *Vyshcha osvita Ukrainy u konteksti intehtratsii do yevropeiskoho osvitnoho prostoru*, 84(II), 279–292. DOI: <https://doi.org/10.38014/osvita.2019.84.25>
- Dy, A. C. (2024). Implementation of DESMOS as a teaching tool in graphing functions in the new normal. *Journal of Research and Investigation in Education*, 2(2), 59–64. DOI: <https://doi.org/10.37034/residu.v2i2.175>
- Mediana, N. L., & Dio, R. V. (2025). Systematic review on the efficacy of Desmos integration in mathematics education: Unveiling impacts on learning outcomes and pedagogical strategies. *International Journal of Future Engineering Innovations*, 2(4), 104–115. DOI: <https://doi.org/10.54660/IJFEI.2025.2.4.104-115>

Отримано / Received 29.06.2026

Прийнято до друку / Accepted 10.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026